



A Simulated Annealing Algorithm for Fuzzy Reliability Optimization Model in Series-Parallel and Standby Systems

M. Seyed Esfahani^{*}, M. Hajian Heidary & S. Jaberi

Mir Mahdi Seyed Esfahani, Associated Professor, Industrial Engineering Department, Amirkabir University of Technology, msesfahani@aut.ac.ir

Mojtaba Hajian Heidary, M.Sc. student, Industrial Engineering Department, Amirkabir University of Technology, mojtabahajian@aut.ac.ir

Saeed Jaberi, M.Sc. student, Industrial Engineering Department, Amirkabir University of Technology, s_jaberi@aut.ac.ir

Keywords

Fuzzy reliability,
Defuzzification methods,
Reliability optimization,
Simulated annealing algorithm

ABSTRACT

In recent years, reliability as a design characteristic of products has widespread applications in many industries including defense and aerospace industries and became attractive issue. The main aim of reliability engineering is to improve system performance. Use of redundancy components is one of the ways for reliability improvement, although usually it is not possible to gain exact data in this type of systems to determine optimum number of redundancy components. Therefore, fuzzy logic has been introduced for assessing and analyzing the systems. This study presents a mathematical model for optimal allocation of the number of redundant components at each stage of multi-stage systems with structures such as parallel-series and standby to maximize system reliability subjecting to cost and weight constraints; which in this model reliability and cost and weight of each components and cost and weight of system are considered as fuzzy parameters. At last a numerical example regarding to triangular and trapezoidal fuzzy numbers and using different methods for defuzzification is surveyed and value of variables is computed with a simulated annealing meta-heuristic approach and the results are presented.

^{*} **Corresponding author.** Mir Mahdi Seyed Esfahani
Email: msesfahani@aut.ac.ir

ارائه الگوریتم شبیه سازی تبرید به منظور بهینه سازی قابلیت اطمینان سیستم های سری-موازی، k-از-n و جانشینی با پارامترهای فازی

میرمهدی سید اصفهانی*، مجتبی حاجیان حیدری و سعید جابری

چکیده:

کلمات کلیدی

در دهه های اخیر قابلیت اطمینان به عنوان یکی از ویژگی های طراحی محصولات در بسیاری از صنایع از جمله صنایع دفاعی و هوافضا کاربردهای بسیاری پیدا کرده و به شدت مورد توجه واقع شده است. هدف اصلی در مهندسی قابلیت اطمینان بهبود عملکرد سیستم در طول زمان می باشد. استفاده از سیستم های با قطعات مازاد یکی از راه های بهبود قابلیت اطمینان است که معمولاً در این نوع سیستم ها، دسترسی به اطلاعات دقیق جهت تعیین تعداد بهینه قطعات مازاد همیشه به راحتی امکان پذیر نیست. به همین منظور برای ارزیابی و تجزیه و تحلیل سیستم از منطق فازی استفاده می شود. در این مقاله یک مدل ریاضی برای تخصیص بهینه تعداد اجزای مازاد هر مرحله از یک سیستم چند مرحله ای با ساختارهای سری-موازی، k-از-n و جانشینی با هدف حداکثر سازی قابلیت اطمینان سیستم و با توجه به محدودیت های وزن و هزینه سیستم ارائه شده که در این مدل قابلیت اطمینان، وزن و هزینه اجزا و نیز وزن و هزینه سیستم، فازی در نظر گرفته شده است. در انتها یک مثال عددی با در نظر گرفتن اعداد فازی مثلثی و دوزنقه ای و با استفاده از روش های غیرفازی کردن مختلف، بیان شده و مقادیر متغیرها به وسیله الگوریتم فراابتکاری شبیه سازی تبرید محاسبه شده و نتایج ارائه گردیده اند. نتایج نشان دادند که ساختار جانشینی، قابلیت اطمینان بالاتری برای سیستم به وجود می آورد.

قابلیت اطمینان فازی،
غیر فازی کردن،
بهینه سازی قابلیت اطمینان،
الگوریتم شبیه سازی تبرید.

۱. مقدمه

قابلیت اطمینان به صورت احتمال کارکرد مطلوب یک دستگاه در دوره زمانی معین و تحت شرایط کاری مشخص تعریف می گردد؛ [اسمیت، ۱۹۷۶] از این رو به عنوان یکی از ابعاد کیفیت محصول شناخته می شود. هدف اصلی مهندسی قابلیت اطمینان بهبود قابلیت اطمینان سیستم است. برای بهبود قابلیت اطمینان سیستم راه های متفاوتی همچون کاهش پیچیدگی سیستم، تعمیرات

پیشگیرانه و افزایش قابلیت اطمینان قطعات وجود دارد. همچنین استفاده از وسایل یدکی موازی یا جانشینی یکی از موثرترین و شناخته شده ترین راه های افزایش قابلیت اطمینان است. (یون و کیم، ۲۰۰۴؛ یوتکین، ۱۹۹۴) در تخصیص قطعات یدکی موازی همه اجزای مازاد به صورت فعال در سیستم قرار دارند در حالیکه برای عملکرد مناسب حداقل به یکی از آنها نیاز است. این ساختار معمولاً زمانی استفاده می شود که سیستم نیاز به عملکرد برای یک دوره طولانی بدون خرابی را داشته باشد در حالیکه در تخصیص قطعات یدکی جانشینی هر یک از اجزای یدکی مازاد در زمانی که جزء فعال دچار خرابی می شود شروع به کار می کند. هدف از مسئله بهینه سازی قابلیت اطمینان، پیدا کردن تعداد بهینه قطعات مازادی است که باید جهت ارضای اهداف مهندس قابلیت اطمینان در سیستم قرار گیرند. کیم و یوم (۱۹۹۳) طریقه افزایش قابلیت اطمینان اجزای سیستم را بررسی نمودند. ژائو و لیو (۲۰۰۳) سیستم هایی با قطعات مازاد را در حالت سری و جانشینی با

تاریخ وصول: ۹۰/۶/۹

تاریخ تصویب: ۹۰/۱۲/۱

*نویسنده مسئول مقاله: دکتر میرمهدی سید اصفهانی، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر، msesfahani@aut.ac.ir
مجتبی حاجیان حیدری، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر، mojtabahajian@aut.ac.ir
سعید جابری، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر، s_jaberi@aut.ac.ir

برنامه‌ریزی ریاضی و الگوریتم ژنتیک حل نمودند. با توجه به مطالعات بسیاری که در زمینه بهینه‌سازی قابلیت اطمینان انجام شده است مقالات معدودی مسئله را در حالت فازی بررسی نموده‌اند که اغلب آن‌ها با استفاده از روش‌های حل دقیق به دنبال حل مسئله در ابعاد کوچک هستند. (ماهاپاترا، ۲۰۱۱) از آنجا که استفاده کاربردی از روش‌های دقیق در چنین مسائلی محدود به حجم مسئله است لذا روش‌های فرا ابتکاری می‌تواند جایگزینی برای روش‌های دقیق باشد. همچنین یکی از پرکاربردترین ساختارهای سیستمی در صنعت، سیستم‌های چند مرحله‌ای هستند.

این سیستم‌ها شامل اجزای چندگانه یا مراحل هستند که برای خروجی مناسب سیستم مورد نیازند. (شی و ژو، ۲۰۰۹). در این مقاله مسئله حداکثرسازی قابلیت اطمینان فازی با توجه به محدودیت‌های هزینه و وزن برای انواع سیستم‌های چند مرحله‌ای سری-موازی، k -از- n و جانشینی (به عنوان پرکاربردترین سیستم‌ها) و با استفاده از روش‌های مختلف غیرفازی کردن مدلسازی گردیده و با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری شبیه‌سازی تبرید حل شده است. ساختار مقاله بدین صورت است که پس از ارائه مدل ریاضی برای انواع ساختارها در بخش دوم، در بخش سوم به مفاهیم فازی و روش‌های غیر فازی کردن پرداخته می‌شود و در قسمت چهارم مدل‌های ارائه شده در بخش دوم برای یک مثال عددی آورده شده و سپس مسئله با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی تبرید حل و نتایج ارائه شده است. در بخش پنجم به نتیجه گیری و پیشنهادات برای مطالعات آتی پرداخته شده است.

۲. مدل ریاضی

مسائل بهینه‌سازی قابلیت اطمینان در سیستم‌های چند مرحله‌ای در حالت کلی به دو صورت بررسی می‌شوند. گروه اول مسائلی هستند که قابلیت اطمینان اجزای موجود در سیستم را بهینه می‌کنند و گروه دوم به دنبال بهینه‌سازی تعداد اجزای تخصیصی به هر مرحله از سیستم هستند در حالیکه فرض می‌شود که قابلیت اطمینان اجزای سیستم مشخص است. مدل‌های ارائه شده در این مقاله جزء گروه دوم هستند.

برای یک سیستم n مرحله‌ای که مراحل به صورت سری قرار گرفته‌اند می‌توان قابلیت اطمینان را از طریق اختصاص قطعات یدکی (در حالت جانشینی) و یا از طریق اختصاص قطعات مشابه به صورت موازی (در حالت سری-موازی و k -از- n) به هر یک از مراحل افزایش داد. در هر مرحله فرض می‌شود که اجزای یدکی و قطعات اصلی سیستم کارکرد یکسان دارند. همچنین فرض می‌شود که عملکرد سیستم در طول دوره عمر مفید مد نظر است، بنابراین طبق منحنی میرایی ارائه شده در شکل ۱، نرخ خرابی در

استفاده از برنامه‌ریزی تصادفی مطالعه کردند. چارلز الگدبد و همکاران (۲۰۰۳) یک مسئله بهینه‌سازی قابلیت اطمینان را جهت دستیابی به یک سطح قابلیت اطمینان آرمانی با هدف کمترین هزینه بررسی نمودند. تیلمن و همکاران (۱۹۸۰) مروری جامع بر روی سیستم‌های با قطعات مازاد انجام دادند. پراساد و همکاران (۱۹۹۹) تخصیص بهینه قطعات یدکی چند حالت را برای سیستم سری بررسی کردند. کو و پراساد (۲۰۰۰) مروری بر بهینه‌سازی قابلیت اطمینان انجام دادند.

قابلیت اطمینان یک سیستم می‌تواند بر اساس آزمایش و دسترسی به اطلاعات عملیاتی تعیین شود. به طور کلی مسئله بهینه‌سازی قابلیت اطمینان با این فرض حل می‌شود که قابلیت اطمینان، وزن و هزینه اجزا به صورت قطعی تعیین می‌شوند. گاهی اوقات به علت عدم قطعیت و عدم دقت در تعیین این پارامترها، تخمین مقدار دقیق قابلیت اطمینان در بسیاری از سیستم‌ها مشکل است. (الهوری ۲۰۰۰) لذا به این دلیل مفهوم قابلیت اطمینان فازی مطرح شده است.

مبنای این روش بر اساس کارهای بنیادی بر روی تئوری فازی توسط زاده (۱۹۷۸) و زمیمرن (۲۰۰۱) بنا شده است. کای و همکاران (۱۹۹۱) مفاهیم و کاربردهای قابلیت اطمینان فازی را بیان نمودند. کویت و تکینر-موگولکوک (۲۰۱۱) بهینه‌سازی قابلیت اطمینان در شرایط عدم قطعیت را بررسی نمودند. یاگر (۱۹۸۱) و کافمن و گوپتا (۱۹۸۸) روش‌های مختلفی برای تبدیل اعداد فازی به اعداد قطعی بیان نمودند. ماهاپاترا و روی (۲۰۱۱) یک مسئله بهینه‌سازی قابلیت اطمینان فازی برای سیستم سری-موازی را با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی هندسی حل نمودند. مسائل تخصیص قطعات مازاد (بهینه‌سازی قابلیت اطمینان) معمولاً به صورت یک برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح فرموله می‌شوند که به خاطر مراحل محاسباتی و زمان حل طولانی جهت دستیابی به جواب دقیق جزء مسائل NP-hard می‌باشند. (چرن، ۱۹۹۲) سوپ و وون (۱۹۹۹) مسئله بهینه‌سازی تخصیص مازاد برای یک سیستم سری با محدودیت انتخاب چندگانه را با استفاده از روش شاخه و کران حل نمودند. جن و یون (۲۰۰۶) یک روش مبتنی بر الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی قابلیت اطمینان سیستم‌های جانشینی در حالت وابسته به زمان حل نمودند.

کو و همکاران (۱۹۷۸) و ناکاگاو و میازاکی (۱۹۸۱) مروری بر روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی قابلیت اطمینان را انجام دادند. احمدی زر و سلطان پناه (۲۰۱۱) یک مسئله بهینه‌سازی قابلیت اطمینان سیستم سری با محدودیت بودجه و انتخاب‌های چندگانه را با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان حل نمودند. ابراهیم پور و شیخ علیشاهی (۲۰۱۱) یک مسئله بهینه‌سازی تخصیص قطعات مازاد در حالت فازی را برای یک سیستم k -از- n با استفاده از

t : دوره عملکرد سیستم

N : تعداد کل مراحل سیستم

λ_i : نرخ خرابی فازی هر قطعه

C_s : تابع هزینه سیستم

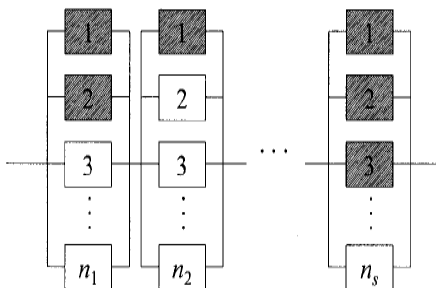
\bar{C}_i : هزینه فازی هر قطعه در مرحله i ام

\bar{C} : بودجه کل در دسترس در حالت فازی

در مدل بیان شده از آنجا که قابلیت اطمینان هر جزء در طول عمر مفید خود که نرخ خرابی ثابت است در نظر گرفته شده در نتیجه توزیع طول عمر نمایی می‌باشد. همانطور که قبلاً بیان شد در بسیاری از کاربردهای عملی دسترسی به اطلاعات دقیق ممکن نیست لذا در این مدل‌ها پارامترهای هزینه، وزن و نرخ خرابی فازی در نظر گرفته می‌شوند. همچنین همانطور که از مدل معلوم است متغیری که با حل این مدل بهینه می‌شود n_i ، یعنی تعداد قطعات مازاد در هر مرحله است.

۲-۲. حالت k-از-n

گاهی اوقات برای عملکرد مناسب سیستم در یک مرحله نیاز به عملکرد مطلوب حداقل k جزء از n جزء را داریم. شکل ۳ به صورت شماتیک این سیستم را نمایش می‌دهد.



شکل ۳. شمای کلی یک سیستم k-از-n

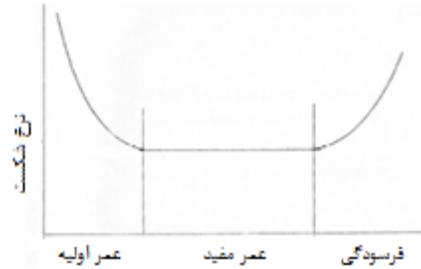
از طرفی سیستم سری-موازی یک حالت خاص از سیستم k-از-n است. از آنجا که سیستم k-از-n در بسیاری از کاربردهای عملی مورد استفاده قرار می‌گیرد لذا در ادامه به بررسی این سیستم می‌پردازیم. قابلیت اطمینان هر مرحله از سیستم برابر است با احتمال اینکه تعداد اجزای فعال بزرگتر یا مساوی k است.

$$R(k, n) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \quad (5)$$

که در آن p احتمال کارکرد سیستم بدون خرابی (قابلیت اطمینان سیستم) و q احتمال خرابی آن است. مدل ریاضی این ساختار در حالت فازی به صورت زیر در می‌آید:

$$\text{Max } \bar{R}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) =$$

این بازه زمانی ثابت است. در ادامه ساختارهای سیستم سری-موازی، k-از-n و جانشینی مورد بررسی قرار گرفته و مدل ریاضی آنها در حالت فازی ارائه می‌شود.



شکل ۱. منحنی میرایی

۱-۲. حالت سری-موازی

در این سیستم همه قطعات در هر مرحله به صورت موازی و همزمان در حال انجام کار هستند و خرابی سیستم زمانی اتفاق می‌افتد که همه اجزا در حداقل یک مرحله، دچار شکست شوند. مدل ریاضی فازی این حالت به صورت زیر است:

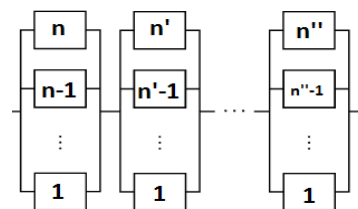
$$\text{Max } \bar{R}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N \{1 - (1 - \bar{R}_i)^{n_i}\} = \prod_{i=1}^N \{1 - (1 - e^{-\lambda_i t})^{n_i}\} \quad (1)$$

$$\bar{C}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N \bar{C}_i n_i \leq \bar{C} \quad (2)$$

$$\bar{W}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N \bar{W}_i n_i \leq \bar{W} \quad (3)$$

$$n_i \geq 0, \text{ integer for } i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

سیستم سری-موازی به عنوان یک ساختار رایج کاربرد زیادی در طراحی دارد. این سیستم به صورت شماتیک در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. شمای کلی یک سیستم سری-موازی

پارامترهای مدل به شرح زیر می‌باشند:

\bar{R}_s : تابع قابلیت اطمینان سیستم که تابعی از زمان و تعداد قطعات بدکی هر مرحله می‌باشد.

$$\text{Max } \bar{R}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{e^{-\lambda_i t} (\lambda_i t)^j}{j!} \right) \quad (10)$$

Subject to:

$$\bar{C}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N \bar{C}_i n_i \leq \bar{C} \quad (11)$$

$$\bar{W}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N \bar{W}_i n_i \leq \bar{W} \quad (12)$$

$$n_i \geq 0, \text{ integer for } i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

$$\prod_{i=1}^N \sum_{j=k}^{n_i} \binom{n_i}{j} R_i^j (1 - R_i)^{n_i-j} = \prod_{i=1}^N \sum_{j=k}^{n_i} \binom{n_i}{j} (e^{-\lambda_i t})^j (1 - e^{-\lambda_i t})^{n_i-j} \quad (6)$$

Subject to:

$$\bar{C}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N \bar{C}_i n_i \leq \bar{C} \quad (7)$$

$$\bar{W}_s(t, n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N \bar{W}_i n_i \leq \bar{W} \quad (8)$$

$$n_i \geq 0, \text{ integer for } i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

۳. مفاهیم فازی و روش‌های غیر فازی کردن

طبق تعریف زاده (۱۹۷۸) یک مجموعه فازی توسط یک تابع عضویت تعریف می‌شود که درجه تعلق هر عضو از مجموعه مرجع را به آن مجموعه نشان می‌دهد؛ یک عدد فازی تعمیم یافته به صورت $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4, w)$ تعریف می‌شود که در آن تابع عضویت به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ w & a_2 < x < a_3 \\ 0 & x > a_4 \end{cases} \quad (14)$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}$ تابع عضویت عددی فازی \tilde{A} و اعداد a_4, a_3, a_2, a_1 اعدادی حقیقی و w مقداری بین صفر و یک می‌باشد. از بین اعداد فازی تعمیم یافته دو دسته کاربردی‌تر آن یعنی اعداد تعمیم یافته مثلثی و دوزنقه‌ای که تابع عضویت آنها به صورت زیر است در این مقاله به عنوان داده‌های ورودی در نظر گرفته می‌شود.

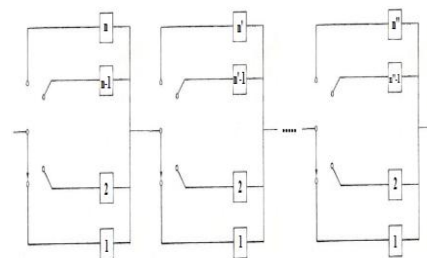
$$\mu_{\tilde{A}_{GTFN}}(x) = \begin{cases} w \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 < x < a_2 \\ w \frac{a_4-x}{a_4-a_2} & a_2 < x < a_4 \\ 0 & o.w. \end{cases} \quad (15)$$

$$\mu_{\tilde{A}_{GTFN}}(x) = \begin{cases} w \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 < x < a_2 \\ w & a_2 < x < a_3 \\ w \frac{a_4-x}{a_3-a_2} & a_3 < x < a_4 \end{cases} \quad (16)$$

معادله (۱۵) تابع عضویت عمومی اعداد فازی مثلثی و معادله (۱۶) تابع عضویت عمومی اعداد فازی دوزنقه‌ای را نشان می‌دهد. همچنین مقدار w درجه اطمینان تصمیم گیرنده را در مورد، نظر ارائه شده بیان می‌کند. از آنجا که کار کردن با اعداد فازی نامفهوم است پارامترهای فازی مدل ریاضی قابلیت اطمینان بیان شده در قسمت قبلی را با استفاده از روش‌های مختلف غیر فازی کردن تبدیل به اعداد دقیق می‌کنیم. دو روش از مجموعه روش‌های غیرفازی کردن که کاربرد بسیاری در مقالات دارند (یاگر (۱۹۸۱)

۳-۲. حالت جانشینی

در بسیاری از سیستم‌ها برای ارتقای سطح قابلیت اطمینان می‌توان قطعات یدکی را به صورت آماده به کار در هر مرحله نگه داشت تا به محض خراب شدن قطعه اصلی، بلافاصله قطعه یدکی وارد سیستم شود. شکل ۴ یک ساختار جانشینی را نشان می‌دهد. واضح است که در این نوع ساختار، دیگر نیازی به فرض استقلال قطعات اصلی و یدکی از یکدیگر نمی‌باشد. (اسمیت، ۱۹۰۰)



شکل ۴. شمای کلی از یک سیستم جانشینی چند مرحله‌ای

از آنجا که در این مدل، عملکرد سیستم در طول دوره عمر مفید اجزاء مدنظر می‌باشد، نرخ خرابی ثابت در نظر گرفته شده است و در نتیجه توزیع طول عمر هر قطعه از توزیع نمایی پیروی می‌کند. لذا توزیع طول عمر هر مرحله از سیستم از توزیع گاما پیروی می‌کند. در زیر مدل ریاضی این ساختار با فرض اینکه قابلیت اطمینان قطعات یدکی در زمان بیکاری خود و همچنین قابلیت اطمینان عمل سوئیچینگ ۱۰۰ درصد می‌باشد، ارائه شده است.

$$\hat{A}_{GFTN} = \frac{w}{4} (a_1 + 2a_2 + a_3) \quad (19)$$

$$\hat{A}_{GTTFN} = \frac{w}{4} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \quad (20)$$

۴. مثال عددی

۴-۱. داده‌های ورودی

در این قسمت یک مثال عددی برای مدل ارائه شده در هر سه حالت سری-موازی، k-از-n و جانشینی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مقادیر پارامترهای فازی در نظر گرفته شده برای این مثال در جداول ۱ و ۲ ارائه شده است. جدول ۱ مقادیر ورودی (وزن، هزینه و نرخ خرابی) برای مدل با استفاده از اعداد فازی مثلثی و جدول ۲ مقادیر ورودی مدل (وزن، هزینه و نرخ خرابی) با استفاده از اعداد فازی ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

و کافمن و گوپتا (۱۹۸۸) در زیر بطور مختصر توضیح داده شده است.

۱) روش مرکز ثقل: در این روش توسط روابط (۱۸) و (۱۷) مرکز ثقل عدد فازی (\tilde{A}) به عنوان عددی دقیق (\hat{A}) برای پارامتر در نظر گرفته می‌شود. در روش مرکز ثقل، غیر فازی کردن GTFN و به مقدار w بستگی ندارد.

$$\hat{A}_{GFTN} = \frac{1}{3} (a_1 + a_2 + a_3) \quad (17)$$

$$\hat{A}_{GTTFN} = \frac{1}{3} \frac{a_4 + a_3 - a_2 - a_1 + a_4 a_3 - a_2 a_1}{a_4 + a_3 - a_2 - a_1} \quad (18)$$

۲) روش میانگین برش α : در آن روش برای غیر فازی کردن اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای از روابط (۱۹-۲۰) استفاده می‌گردد.

جدول ۱. مقادیر فازی (اعداد مثلثی) نرخ خرابی، وزن و هزینه اجزا و سیستم

	هزینه	وزن	نرخ خرابی
۱	(۱، ۱، ۱، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۹۵، ۱، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۲، ۰، ۰۰۲۹؛ w)
۲	(۲، ۲، ۲، ۲، ۵؛ w)	(۰، ۹، ۰، ۹۵، ۱، ۵؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۲۹، ۰، ۰۰۵؛ w)
۳	(۳، ۳، ۳، ۳، ۶؛ w)	(۰، ۹، ۱، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۲، ۰، ۰۰۳۵؛ w)
۴	(۴، ۴، ۴، ۴، ۸؛ w)	(۰، ۹۵، ۱، ۲، ۱، ۵؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۲۲، ۰، ۰۰۲۹؛ w)
۵	(۱، ۱، ۴، ۱، ۸؛ w)	(۰، ۹، ۱، ۱، ۱۵، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۲۹، ۰، ۰۰۳۵؛ w)
۶	(۲، ۲، ۳، ۲، ۷؛ w)	(۰، ۹۵، ۱، ۱، ۴؛ w)	(۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۲، ۰، ۰۰۴۳؛ w)
۷	(۳، ۳، ۱، ۳، ۳؛ w)	(۱، ۱، ۲، ۱، ۵؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۹؛ w)
۸	(۴، ۴، ۲، ۴، ۴؛ w)	(۰، ۹، ۱، ۱، ۱، ۴؛ w)	(۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۲، ۰، ۰۰۴۳؛ w)
۹	(۵، ۵، ۲، ۵، ۴؛ w)	(۰، ۹۵، ۱، ۱، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۲۹، ۰، ۰۰۳۵؛ w)
۱۰	(۵، ۵، ۳، ۵، ۷؛ w)	(۰، ۹، ۱، ۱، ۲؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۴۳؛ w)
سیستم	(۱۲۵، ۱۳۷، ۵، ۱۵۰؛ w)	(۶۵، ۸۰، ۹۵؛ w)	

جدول ۲. مقادیر فازی (اعداد ذوزنقه‌ای) نرخ خرابی، وزن و هزینه اجزا و سیستم

	هزینه	وزن	نرخ خرابی
۱	(۱، ۱، ۱، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۹۲، ۰، ۹۸، ۱، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۲، ۰، ۰۰۲۹، ۰، ۰۰۳۵؛ w)
۲	(۲، ۲، ۲، ۲، ۴؛ w)	(۰، ۹۵، ۰، ۹۸، ۱، ۲، ۱، ۴؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۳۵، ۰، ۰۰۵؛ w)
۳	(۳، ۳، ۲، ۳، ۳، ۵؛ w)	(۰، ۹۴، ۱، ۱، ۲، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱۷، ۰، ۰۰۲۲، ۰، ۰۰۳۱، ۰، ۰۰۴۳؛ w)
۴	(۴، ۴، ۲، ۴، ۴، ۶؛ w)	(۰، ۹۵، ۰، ۹۸، ۱، ۱، ۲؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۵، ۰، ۰۰۳۳؛ w)
۵	(۱، ۱، ۲، ۱، ۳، ۱، ۶؛ w)	(۰، ۹، ۱، ۱، ۲، ۱، ۴؛ w)	(۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲، ۰، ۰۰۳۳، ۰، ۰۰۳۸؛ w)
۶	(۲، ۲، ۱، ۲، ۲، ۳، ۲، ۴؛ w)	(۰، ۹۵، ۱، ۱، ۱، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱۵، ۰، ۰۰۲، ۰، ۰۰۳، ۰، ۰۰۳۵؛ w)
۷	(۳، ۳، ۱، ۳، ۲، ۳، ۳؛ w)	(۰، ۹، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۲، ۰، ۰۰۳۴، ۰، ۰۰۴۶؛ w)
۸	(۴، ۴، ۲، ۴، ۳، ۴، ۴؛ w)	(۰، ۹۵، ۱، ۱، ۱، ۱۵، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۵، ۰، ۰۰۳۳؛ w)
۹	(۵، ۵، ۲، ۵، ۴، ۵، ۵؛ w)	(۰، ۹۵، ۱، ۱، ۱، ۱۵، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱۵، ۰، ۰۰۲۲، ۰، ۰۰۲۹، ۰، ۰۰۵؛ w)
۱۰	(۵، ۵، ۱، ۵، ۳، ۵، ۴؛ w)	(۰، ۹، ۰، ۹۸، ۱، ۱، ۳؛ w)	(۰، ۰۰۱، ۰، ۰۰۱۶، ۰، ۰۰۲۵، ۰، ۰۰۴۳؛ w)
سیستم	(۱۲۵، ۱۳۵، ۱۴۵، ۱۵۵؛ w)	(۶۵، ۷۵، ۸۰، ۹۵؛ w)	

جدول ۳. مقادیر k در هر یک از زیر سیستم‌ها

زیرسیستم	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
k	۲	۲	۱	۲	۲	۳	۲	۵	۳	۱

به دلیل NP-hard بودن مسائل تخصیص قطعات مزاد (چرن، ۱۹۹۲) و به خاطر مراحل محاسباتی و زمان حل طولانی جهت دستیابی به جواب دقیق، با استفاده از روش‌های فرا ابتکاری به حل مسئله می‌پردازیم.

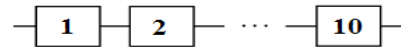
۲-۴. الگوریتم شبیه‌سازی تبرید پیشنهادی

تاکنون روش‌های فرا ابتکاری بسیاری با خصوصیات متفاوت به وجود آمده‌اند. گاهی اوقات رسیدن به جواب دقیق به دلیل محدودیت‌های زمانی و حافظه‌ای ممکن نیست. از این رو برای جبران نقطه ضعف روش‌های ابتکاری، روش‌های فرا ابتکاری با استفاده از جستجوی هدایت شده فضای جواب برای رسیدن به جواب‌های نزدیک به بهینه توسعه داده شده‌اند. در سال‌های اخیر از این روش‌ها برای حل مسائل طراحی قابلیت اطمینان استفاده زیادی شده است. شبیه‌سازی تبرید، توسط کرک پاتریک و همکاران، ۱۹۸۳ و سرنی، ۱۹۸۵ به عنوان جایگزینی برای جستجوی محلی، یک روش احتمالی کلی برای حل مسائل بهینه‌سازی است. تکنیک تبرید تدریجی، در عمل برای رسیدن به حالتی که در آن ماده جامد، به خوبی مرتب و انرژی آن کمینه شده باشد، استفاده می‌شود. این تکنیک شامل قرار دادن ماده در دمای بالا و سپس کم کردن تدریجی این دماست. در هر تکرار از این روش به منظور جلوگیری از افتادن در دام بهینه محلی، احتمال رفتن به جواب بدتر نیز وجود دارد. در این مقاله برای حل مسئله تخصیص قطعات مزاد، از یک الگوریتم شبیه‌سازی تبرید که جواب اولیه و پارامترهای دمایی آن (دمای اولیه، دمای نهایی، نرخ سرد کردن و معیار توقف) تنظیم شده‌اند، استفاده شده است. در این الگوریتم از یک بردار سطری ده تایی که هر ستون نشان دهنده تعداد قطعات مزاد تخصیص داده شده به هر زیرسیستم است، برای نشان دادن ساختار جواب استفاده می‌گردد. همچنین برای ایجاد جواب‌های همسایه از بردارهای سطری که هر ستون آن یکی از اعداد صفر، یک و منهای است استفاده می‌گردد، به گونه‌ای که با ایجاد تصادفی یک بردار سطری آن را با بردار جواب فعلی جمع نموده و به یک جواب جدید می‌رسیم که هر درایه آن حداکثر یک واحد با جواب قبلی تفاوت دارد. در این الگوریتم از مکانیزم سرد کردن هندسی استفاده شده است.

۳-۴. نتایج

برای حل مسئله در نظر گرفته شده در این مثال از دو روش گیرفازی کردن میانه و برش آلفا (با مقادیر ۰,۲، ۰,۵، ۰,۸ و ۱

در تمامی مدل‌ها فرض می‌شود قابلیت اطمینان برای یک دوره ۱۰۰ ساعته بررسی می‌شود. ابتدا حالت سری-موازی را بررسی و فرض می‌کنیم یک سیستم سری مانند شکل ۵ داریم.



شکل ۵. سیستم سری شامل ده جزء

برای تقویت قابلیت اطمینان هر یک از اجزای این سیستم، اجزایی را به صورت موازی با هر یک از اجزای موجود قرار می‌دهیم. بنابراین یک سیستم سری-موازی چند مرحله‌ای به وجود می‌آید که در هر مرحله تعداد اجزایی که به صورت موازی در کنار یکدیگر قرار داده شده‌اند نامشخص است. مدل حاصل به صورت زیر در می‌آید:

$$Max \bar{R}_s = (1 - (1 - e^{-\lambda_1 t})^{n_1}) (1 - (1 - e^{-\lambda_2 t})^{n_2}) \dots (1 - (1 - e^{-\lambda_{10} t})^{n_{10}})$$

Subject to:

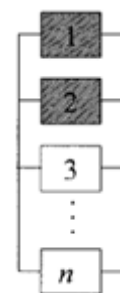
$$\sum_{i=1}^{10} C_i n_i \leq C$$

(۲۱)

$$\sum_{i=1}^{10} W_i n_i \leq W$$

$n_i \geq 0, integer$
for $i = 1, 2, \dots, 10$

ساختار k-از-n حالت کلی تری از سیستم سری-موازی است. سیستم در این حالت وقتی فعال است که حداقل k تا از n جزء عملکرد صحیح داشته باشند. بنابراین اگر k را برابر یک قرار دهیم، همان سیستم سری-موازی بدست خواهد آمد. هر یک از زیر سیستم‌ها در حالت k-از-n به صورت شکل ۶ می‌باشد:



شکل ۶. یک زیر سیستم از سیستم در حالت k-از-n

مقادیر k در نظر گرفته شده برای هر یک از زیر سیستم‌ها در جدول ۳ آمده است:

جدول ۵. تعداد اجزای تخصیصی به هر یک از زیرسیستم‌ها به

روش میانه برای سیستم k-از-n		
زیر سیستم	داده‌های مثلثی	داده‌های دوزنقه‌ای
۱	۷	۵
۲	۵	۷
۳	۲	۳
۴	۴	۴
۵	۴	۵
۶	۶	۵
۷	۴	۵
۸	۵	۵
۹	۶	۵
۱۰	۲	۲
R	۰,۷۱۷	۰,۶۹

جدول ۶. تعداد اجزای تخصیصی به هر یک از زیرسیستم‌ها به

روش میانه برای سیستم جانشینی		
زیر سیستم	داده‌های مثلثی	داده‌های دوزنقه‌ای
۱	۵	۵
۲	۴	۴
۳	۴	۴
۴	۴	۴
۵	۱۱	۴
۶	۴	۵
۷	۳	۴
۸	۵	۵
۹	۴	۴
۱۰	۳	۴
R	۰,۹۹۶۶	۰,۹۹۸۸

۰,۸ و ۱ برای W در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از حل مدل با استفاده از داده‌های ورودی فازی مثلثی و دوزنقه‌ای برای ر یک از سه ساختار سری-موازی، k-از-n و جانشینی در جداول ۷ و ۸ آورده شده است.

جدول ۷. تعداد اجزای تخصیصی به هر یک از زیرسیستم‌ها به روش برش آلفا برای سیستم سری-موازی

زیر سیستم	داده‌های مثلثی				داده‌های دوزنقه‌ای			
	W=۰,۲	W=۰,۵	W=۰,۸	W=۱	W=۰,۲	W=۰,۵	W=۰,۸	W=۱
۱	۷	۶	۴	۵	۶	۵	۶	۷
۲	۵	۵	۶	۵	۵	۵	۴	۵
۳	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴
۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۴	۶	۶	۶	۸	۵
۶	۴	۴	۴	۵	۵	۵	۵	۴
۷	۴	۳	۴	۴	۴	۴	۴	۵
۸	۴	۵	۴	۵	۴	۴	۴	۴
۹	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴
۱۰	۴	۴	۴	۳	۴	۴	۴	۴
R	۰,۹۸۴۱	۰,۹۸۲۷	۰,۹۹۲۱	۰,۹۸۳۸	۰,۹۸۶۸	۰,۹۸۶۵	۰,۹۸۲۶	۰,۹۸۴۷

برای W) استفاده می‌کنیم. بنابراین با توجه به اینکه داده‌های ورودی را نیز به دو صورت مثلثی و دوزنقه‌ای در نظر گرفته‌ایم، نتایج حاصل از حل مدل یعنی تعداد اجزای تخصیصی به هر زیرسیستم (N_i) با استفاده از دو روش میانه و برش آلفا برای هر یک از حالات سری-موازی، k-از-n و جانشینی در زیر بیان شده است:

۱- داده‌های ورودی به صورت اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای و روش غیر فازی کردن میانه. در این حالت مقادیر غیر فازی شده به W بستگی ندارد. نتایج حاصل از حل مدل با استفاده از این داده‌های ورودی برای هر یک از سه ساختار بیان شده (سری-موازی، k-از-n و جانشینی) در جداول ۴ و ۵ آورده شده است.
۲- داده‌های ورودی به صورت اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای و روش غیر فازی کردن برش آلفا. این روش برعکس روش میانه به مقدار W وابسته است. برای این منظور مقادیر ۰,۲، ۰,۵، ۰,۸

جدول ۴. تعداد اجزای تخصیصی به هر یک از زیرسیستم‌ها به

روش میانه برای سیستم سری-موازی		
زیر سیستم	داده‌های مثلثی	داده‌های دوزنقه‌ای
۱	۴	۴
۲	۵	۵
۳	۴	۵
۴	۴	۴
۵	۶	۵
۶	۵	۴
۷	۴	۵
۸	۴	۴
۹	۴	۴
۱۰	۴	۴
R	۰,۹۸۵۳	۰,۹۸۲۷

جدول ۸. تعداد اجزای تخصیصی به هر یک از زیرسیستم‌ها به روش برش آلفا برای سیستم $n-k$ -از

نوع داده ورودی زیر سیستم	داده‌های مثلثی				داده‌های دوزنقه‌ای			
	$0.2w=$	$0.5w=$	$0.8w=$	$1w=$	$0.2w=$	$0.5w=$	$0.8w=$	$1w=$
۱	۱۱	۴	۵	۵	۴	۶	۶	۴
۲	۶	۵	۵	۵	۷	۵	۵	۵
۳	۳	۴	۳	۲	۳	۳	۳	۳
۴	۳	۳	۴	۳	۴	۴	۴	۳
۵	۴	۶	۶	۶	۴	۸	۴	۷
۶	۶	۷	۷	۸	۸	۷	۶	۶
۷	۳	۳	۲	۴	۴	۳	۴	۵
۸	۵	۶	۶	۶	۴	۵	۵	۵
۹	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۶
۱۰	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳	۲
R	۰,۹۸۶۹	۰,۹۲۰۹	۰,۸۶۱۶	۰,۷۱۵	۰,۹۸۴۷	۰,۹۵۱۹	۰,۸۲۴۹	۰,۷۱۰۹

جدول ۹. تعداد اجزای تخصیصی به هر یک از زیرسیستم‌ها به روش برش آلفا برای سیستم جانشینی

نوع داده ورودی زیر سیستم	داده‌های مثلثی				داده‌های دوزنقه‌ای			
	$w=0.2$	$w=0.5$	$w=0.8$	$w=1$	$w=0.2$	$w=0.5$	$w=0.8$	$w=1$
۱	۴	۵	۴	۶	۵	۴	۵	۴
۲	۴	۵	۴	۴	۴	۶	۴	۴
۳	۴	۴	۵	۵	۴	۵	۴	۵
۴	۳	۴	۴	۴	۴	۳	۳	۴
۵	۵	۴	۶	۶	۹	۶	۷	۴
۶	۵	۷	۴	۵	۴	۴	۴	۴
۷	۵	۳	۳	۳	۴	۴	۵	۴
۸	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵
۹	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴
۱۰	۴	۳	۴	۳	۳	۴	۴	۴
R	۱	۰,۹۹۹۷	۰,۹۹۹۲	۰,۹۹۷۴	۱	۰,۹۹۹۸	۰,۹۹۸۹	۰,۹۹۸۷

۵. نتیجه گیری و مطالعات آتی

در مطالعات گذشته مسئله تخصیص قابلیت اطمینان برای قطعات با اطلاعات قطعی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. همچنین در سال‌های اخیر مسئله قابلیت اطمینان فازی بیشتر برای سیستم‌های سری-موازی مورد توجه بوده است. در این مقاله بررسی برای سه ساختار مختلف از سیستم‌های مورد استفاده در صنعت (سری-موازی، $n-k$ -از- n و جانشینی) انجام گرفت و پس از مدل‌سازی تابع قابلیت اطمینان کل سیستم، تعداد بهینه قطعات مازاد برای هر زیر سیستم تعیین گردید و پس از حل مسئله به کمک یک الگوریتم شبیه سازی تبرید پیشنهادی، نتایج ارایه شد. نتایج نشان دهنده بالاتر بودن قابلیت اطمینان برای سیستم‌های جانشینی نسبت به سیستم‌های سری-موازی بود و این نتیجه به دلیل عدم فرارگیری همزمان قطعات یدکی با قطعات اصلی در سیستم، امری قابل پیش بینی می‌بود. در این مقاله مسئله بهینه‌سازی قابلیت اطمینان از طریق غیر فازی کردن داده‌های فازی حل

گردید در حالیکه در مطالعات آتی می‌توان این تخصیص را با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی که توسط زیمرمن مطرح گردیده، بهینه سازی نمود.

مراجع

- [1] Smith, C.O., "Introduction to Reliability in Design", first edition, McGraw-Hill, New York. 1976.
- [2] Yun, W.Y., Kim, J.W., *Multi-Level Redundancy Optimization in Series Systems*. Computers & Industrial Engineering, Vol. 46, No. 2, 2004. pp. 337-346.
- [3] Utkin, L.V., "Redundancy Optimization by Fuzzy Reliability and Cost of System Components." Microelectronics and reliability, Vol. 34, No. 1, 1994. pp. 53-59.
- [4] Kim, J.H., Yum, B.J., "A Heuristic Method for Solving Redundancy Optimization Problems in

- [17] Gen, M., Yun, Y.S., "Soft Computing Approach for Reliability Optimization: State-of-the-art Survey". Reliability Engineering & System Safety, Vol. 91, No. 9, 2006. pp. 1008-1026.
- [18] Kuo, W., C.L. Hwang, Tillman, F.A., "A Note on Heuristic Methods in Optimal System Reliability". IEEE Transactions on Reliability, Vol. 27, No. 5, 1978. pp. 320-324.
- [19] Nakagawa, Y., Miyazaki, S., "An Experimental Comparison of the Heuristic Methods for Solving Reliability Optimization Problems". Reliability, IEEE Transactions on, Vol. 30, No. 2, 1981. pp. 181-184.
- [20] Ahmadizar, F., Soltanpanah, H., "Reliability Optimization of a Series System with Multiple-Choice and Budget Constraints using an Efficient ant Colony Approach". Expert Systems with Applications, Vol. 38, No. 4, 2011. pp. 3640-3646.
- [21] Ebrahimipur, V., "Reliability Optimization of Multi-State Weighted k-out-of-n Systems by Fuzzy Mathematical Programming and Genetic Algorithm", 2011.
- [22] Mahapatra, G., Roy, T., "Optimal Redundancy Allocation in Series-Parallel System using Generalized Fuzzy Number" Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, Vol. 27, No.1, 2011. pp. 1-20.
- [23] Shi, J., Zhou, S., "Quality Control and Improvement for Multistage Systems: A survey". IIE Transactions, Vol. 41, No. 9, 2009. pp. 744-753.
- [24] Yager, R.R., "A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval" Information Sciences, Vol. 24, No. 2, 1981. pp. 143-161.
- [25] Kaufmann, A., Gupta, M.M., "Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science." Elsevier Science Inc.1988.
- [26] Kirkpatrick, S., Gelatt Jr, C.D., Vecchi, M.P., "Optimization by Simulated Annealing. science," Vol. 220, No. 4598, 1983. pp. 671-680.
- [27] Černý, V., "Thermodynamical Approach to the Traveling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm." Journal of optimization theory and applications, Vol. 45, No.1, 1985. pp. 41-51.
- [5] Zhao, R., Liu, B., "Stochastic Programming Models for General Redundancy-Optimization Problems". IEEE Transactions on Reliability, Vol. 52, No.2, 2003. pp. 181-191.
- [6] Elegbede, A.O.C., et al., "Reliability Allocation Through Cost Minimization". IEEE Transactions on Reliability, Vol. 52, No. 1, 2003. pp. 106-111.
- [7] Tillman, F.A., C.L. Hwang, Kuo, W., "Optimization of Systems Reliability." Marcel Dekker, New York First Edition. Vol. 4, 1980.
- [8] Prasad, V.R., Kuo, W., Oh Kim, K., "Optimal Allocation of s-Identical, Multi-Functional Spares in a Series System" IEEE Transactions on Reliability, Vol. 48, No. 2, 1999. pp. 118-126.
- [9] Kuo, W., Prasad, V.R., "An Annotated Overview of System-Reliability Optimization." IEEE Transactions on Reliability, Vol. 49, No. 2, 2000. pp. 176-187.
- [10] El-Hawary, M.E., "Electric Power Applications of Fuzzy Systems." Wiley-IEEE Press. 1998.
- [11] Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility". Fuzzy Sets and Systems, Vol.1, No. 1, 1978. pp. 3-28.
- [12] Zimmermann, H.J., "Fuzzy Set Theory and its Applications". Forth Edition ed., Boston: Springer. 2001.
- [13] Kai-Yuan, C., Chuan-Yuan, W., Ming-Lian, Z., "Fuzzy Variables as a Basis for a Theory of Fuzzy Reliability in the Possibility Context". Fuzzy Sets and Systems, Vol. 42, No.2, 1991. pp. 145-172.
- [14] Tekiner-Mogulkoc, H., Coit, D.W., "System Reliability Optimization Considering Uncertainty: Minimization of the Coefficient of Variation for Series-Parallel Systems". IEEE Transactions on Reliability, Vol. 99, 2011; pp. 1-1.
- [15] Chern, M.S., "On the Computational Complexity of Reliability Redundancy Allocation in a Series System." Operations Research Letters, Vol. 11, No. 5, 1992. pp. 309-315.
- [16] Sup, S.C., Kwon, C.Y., "Branch-and-Bound Redundancy Optimization for a Series System with Multiple-Choice Constraints". IEEE Transactions on Reliability, Vol. 48, No. 2, 1999. pp. 108-117.