International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2012)

November 2012, Volume 23, Number 3
pp. 283-292

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

A New Mathematical Formulation for the Traveling Repairman Problem based on the Mixed Integer Programming Formulation

A. Salehipour & M.M. Sepehri*

Amir Salehipour, *Associat professor, Faculty of Industrial Engineering, Taribat Modarres University*
Mohammad Mehdi Sepehri, *Ph.D. Student,Faculty of Industrial Engineering, Taribat Modarres University,*

Keywords

Traveling Repairman Problem,
Mixed Integer Programming,
Branch and Bound

ABSTRACT

The Traveling Repairman Problem is a customer-oriented routing problem in which a repairman is visiting a set of geographically distributed customers. The objective function is to minimize the total waiting times of all customers. The importance of this problem can be found in its applications in the following areas: blood distributing, manufacturing systems, and transportation and logistics. Apart from its importance, research on this problem is very limited. In this paper a new mixed-integer programming formulation is developed, and several properties of model are studied. Additionally, by developing lower and upper bounds, a branch and bound algorithm is developed to solve the problems with up to 30 nodes. According to the computational experiments, the developed model is very competitive.

* **Corresponding author. Mohammad Mehdi Sepehri**
Email: *mehdi.sepehri@modares.ac.ir*

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــریت تولیـــد

شمـــاره ۳، جلـــد ۲۳، آذر ۱۳۹۱
صفحـــــه ۲۹۲-۲۸۴

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

مدلی جدید برای حل مسئله تعمیرکار سیار بر پایه برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته

امیر صالحی‌پور و محمدمهدی سپهری*

کلمات کلیدی

مسئله تعمیرکار سیار،
مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته،
الگوریتم شاخه و کران

چکیده:

مسئله تعمیرکار سیار یک مسئله مسیریابی با تمرکز بر مشتری است که در آن یک تعمیرکار سرویس مورد درخواست مجموعه‌ای از متقاضیانی که در نقاط مختلف جغرافیایی پراکنده هستند (گره‌ها) را ارائه می‌دهد. تابع هدف این مسئله کمینه کردن مجموع زمان انتظار تمامی متقاضیان است. اهمیت مسئله را می‌توان در کاربردهای بسیاری که مسئله در حوزه‌های سیستم‌های تولیدی، سلامت و درمان و حمل و نقل دارد بیان نمود. تا به امروز تحقیقات محدودی روی مسئله انجام شده‌است. در این مقاله به‌دنبال توسعه یک مدل ریاضی عدد صحیح آمیخته، برخی ویژگی‌ها و خواص مسئله بررسی می‌شوند. سپس با توسعه حدود بالا و پایین یک الگوریتم شاخه و کران (انشعاب و تحدید) طراحی می‌شود که می‌تواند مسائل تا ابعاد ۳۰ گره را به‌طور بهینه حل نماید. محاسبات انجام‌شده نشان می‌دهد مدل توسعه داده‌شده بسیار توانمندتر از مدل‌های موجود است.

۱. مقدمه

مسئله تعمیرکار سیار[2] روی یک شبکه وزن‌دار $N=(V,E,w)$ تعریف می‌شود که در آن مجموعه گره‌های $V=\{v_0,\dots,v_n\}$ بیانگر مجموعه‌ای از مکان‌ها هستند. مقدار $c(v_i, v_j)$ منتسب به هر سویه (v_i, v_j) عضو E، $(v_i,v_j)\in E$، بیانگر هزینه (زمان / فاصله) مربوط به سفر از گره v_i به گره v_j است. هدف این مسئله یافتن یک توالی از بازدید این گره‌ها توسط تعمیرکار به‌گونه‌ای است که از v_0 شروع شده و ضمن بازدید تمامی گره‌ها مجموع کل زمان انتظار تک تک گره‌ها برای بازدید حداقل شود.

زمان انتظار برای یک گره، مجموع زمان انتظار آن تا رسیدن تعمیرکار می‌باشد. به‌طور مثال، اگر زمان رفت به گره اول t_1 باشد، زمان انتظار برای این گره t_1 است؛ و اگر زمان رفت از گره اول به گره دوم t_2 باشد، زمان انتظار گره دوم برابر t_1+t_2 می‌شود؛ بنابراین مجموع کل زمان انتظار هر دو گره یا مجموع زمان انتظار انباشته[3] آن‌ها برابر $2t_1+t_2$ است. در اینجا فرض می‌شود زمان سرویس به هر گره ناچیز است به‌طوری که از آن صرف‌نظر می‌شود. خاطر نشان می‌شود مسئله تعمیرکار سیار با مسئله پیله‌ور[4] تفاوت دارد به‌طوری‌که هدف مسئله دوم حداقل‌کردن مجموع زمان‌های سفر است. پیشینه تحقیق در خصوص مسئله پیله‌ور بسیار غنی است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۱۰ و ۲۲] مراجعه نمود.

با توجه به تابع هدف مسئله تعمیرکار سیار و این مطلب که در هر گره یک متقاضی در انتظار دریافت سرویس است، می‌توان بیان داشت که این مسئله - به خاطر کمینه کردن مجموع زمان انتظار تمام متقاضیان - به نوعی مسیریابی مشتری‌گرا است.

تاریخ وصول: ۸۹/۸/۸
تاریخ تصویب: ۹۰/۳/۲

امیر صالحی‌پور دانشجوی دکتری، بخش مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، a.salehipour@modares.ac.ir

***نویسنده مسئول مقاله: دکتر محمدمهدی سپهری،** دانشیار بخش مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، mehdi.sepehri@modares.ac.ir

[2] *Traveling Repairman Problem*
[3] *Cumulative*
[4] *Traveling Salesman Problem*

توزیع فرآورده‌های خونی [۱۷]، مکان‌یابی بهینه ایستگاه‌های کاری در سیستم تولید زوجی [۱۶]، سرویس ایاب و ذهاب مدارس [۴، ۵ و ۹] و زمان‌بندی ماشین در سیستم‌های تولیدی [۱۲] از کاربردهای مهم مسئله هستند که در منابع علمی آورده شده‌اند.
همانند مسئله پیله‌ور این مسئله نیز در دسته مسائل NP-hard قرار می‌گیرد، ولی بسیار دشوارتر از مسئله پیله‌ور است [۱۳]. برای برخی حالات خاص مسئله، الگوریتم‌هایی که در زمانی منطقی جواب بهینه به‌دست می‌دهند ارائه شده‌اند؛ که از جمله می‌توان به مواردی که آورده می‌شوند اشاره نمود: وجود تمامی گره‌ها در امتداد یک خط راست [۱ و ۸] و یا درخت با شعاع ۳ [۶]. هیلپورن و همکاران به مسئله در حالت وجود محدودیت پنجره زمانی پرداخته‌اند [۱۱]. علاوه بر حالات اشاره شده چند الگوریتم بهینه برای حل مسئله طراحی شده‌اند [۷، ۳ و ۲۱].
قابل ذکر است که مدل‌های ریاضی ارائه‌شده برای این مسئله حتی در ابعاد متعارف (حدود ۱۵ گره و بیشتر) به سختی می‌توانند توسط حل‌کننده‌های عمومی و رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح همانند Cplex و LINGO حل شوند و نیازمند الگوریتم‌های دیگری چون شاخه و کران (انشعاب و تحدید) و برنامه‌ریزی پویا برای مسئله می‌باشند.
در رابطه با الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری برای حل مسئله می‌توان به مقاله صالحی‌پور و همکاران اشاره کرد [۱۴]. در این مقاله آن‌ها از GRASP+VNS برای حل مسئله در حالت متقارن بهره جسته و جواب‌های با کیفیت بسیار بالا برای مسائل تا اندازه ۱۰۰۰ گره تولید نمودند.
در این مقاله به دنبال آن هستیم تا با تکیه بر مدل‌سازی ریاضی و بهره‌گیری از حل‌کننده‌های عمومی و موجود بتوانیم رویکردی برای حل مسئله ارائه دهیم. در این راستا یک مدل ریاضی عدد صحیح آمیخته برای مسئله توسعه داده می‌شود که قالب برنامه‌ریزی خطی آن، که از رهاسازی محدویت‌های متغیر عدد صحیح حاصل می‌شود، دارای جواب بهینه‌ای است که می‌تواند به‌عنوان حد پایین با کیفیت بسیار خوبی قلمداد شود. با استفاده از این راهبرد توانسته‌ایم مسائل تا اندازه ۲۵ گره را بدون نیاز به الگوریتم‌های خاص و تنها با بهره‌گیری از حل‌کننده‌های موجود همانند Cplex و LINGO و آن‌هم در زمان کوتاهی (۱۷ دقیقه به‌طور میانگین) به‌طور بهینه حل نماییم. این در حالی است که مدل‌های پیشین قادر به حل این مسائل حتی با گذشت چندین ساعت هم نبوده‌اند. در ادامه، مقاله به شرحی که می‌آید تدوین شده‌است. در بخش ۲ با شرح یک مثال مسئله به‌طور کامل تعریف می‌شود.

در بخش ۳ مدل ریاضی عدد صحیح توسعه داده‌شده به همراه نمادگذاری ریاضی آورده شده‌است. بخش ۴ به توسعه یک الگوریتم شاخه و کران و بخش ۵ به نتایج محاسباتی اختصاص داده شده‌است. نتیجه‌گیری و جهت‌گیری تحقیقات آتی پایان‌دهنده مقاله هستند.

۲. تعریف و بیان مسئله

تابع هدف مسئله تعمیرکار سیار که عبارت‌است از حداقل‌سازی مجموع زمان‌های انتظار (مجموع انباشته زمان سفر) کاملا متفاوت از تابع هدف مسئله پیله‌ور- حداقل‌سازی مجموع زمان سفر - است. این تابع هدف می‌تواند به‌عنوان معیاری برای کارایی و اثربخشی یک سیستم خدمت‌رسانی مورد استفاده قرار گیرد. به‌منظور درک بهتر تابع هدف مسئله تعمیرکار سیار و تفاوت آن با مسئله پیله‌ور در ادامه مثالی آورده شده‌است.

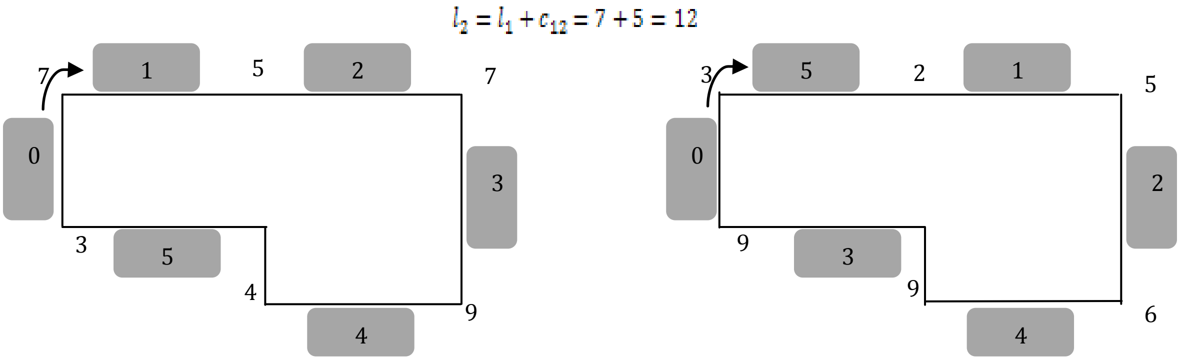
۲-۱. مثال

فرض کنید ۵ گره موجود است که مبین شهرهایی هستند که تعمیرکار سیار باید آنها را بازدید کند. جدول ۱ هزینه‌های سفر (به‌طور مشابه زمان سفر) بین این گره‌ها و گره مبدا را در قالب یک ماتریس هزینه سفر متقارن نشان می‌دهد. گره صفر (نقطه آغازین) به‌عنوان مبداء حرکت تعمیرکار در نظر گرفته می‌شود. به‌منظور سهولت در درک مسئله فرض می‌کنیم هزینه به زمان تبدیل شده‌است و بنابراین زمان انتظار هر گره عبارت است از کل مدت زمانی که تعمیرکار باید سپری کند تا از گره صفر به گره موردنظر برسد. در این راستا با توجه به شکل الف- ۱ و ماتریس سفر جدول ۱، زمان انتظار گره ۱ عبارت است از ۷.

جدول ۱. ماتریس هزینه (به‌طور مشابه زمان) سفر برای مثال

	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰	۷	۶	۹	۱۲	۳
۱	–	۰	۵	۱۴	۹	۲
۲	–	–	۰	۷	۶	۱۰
۳	–	–	–	۰	۹	۸
۴	–	–	–	–	۰	۴
۵	–	–	–	–	–	۰

به‌طور مشابه زمان انتظار گره ۲ عبارت است از زمان انتظار گره ۱ (زیرا این گره نمی‌تواند قبل از گره ۱ بازدید شود) به‌علاوه زمان سفر از گره ۱ تا گره ۲ لذا:



ب - ۱ الف - ۱

شکل ۱. دو مثال از تعمیرکار سیار با ۲ توالی متفاوت. توالی الف – ۱ دارای تابع هدف بزرگتری نسبت به توالی ب – ۱ است

در مسئله تعمیرکار سیار به دنبال آن هستیم تا مجموع زمان‌های انتظار تمامی گره‌ها را حداقل نماییم. از آنجایی که مجموع زمان‌های انتظار گره‌ها وابسته به توالی بازدید آن‌ها توسط تعمیرکار هستند، بنابراین باید توالی بازدید بهینه گره‌ها با توجه به تابع هدف مذکور به‌دست آید.

در این مثال، شکل ۱ دو توالی بازدید را نشان می‌دهد. در توالی بازدید شکل الف - ۱ تعمیرکار (مستطیل سیاه‌رنگ) ابتدا گره ۱ را بازدید می‌کند، سپس گره ۲ و الی آخر. بنابراین توالی بازدید عبارت‌است از $p_{1-\text{الف}} = \{0,1,2,3,4,5,0\}$. همان‌طور که انتظار می‌رود تعمیرکار سیار می‌تواند توالی بازدید دیگری را انتخاب کند. برای مثال وی می‌تواند توالی نشان‌داده شده در شکل ب- ۱ را انتخاب کند ($p_{1-\text{ب}} = \{0,5,1,2,4,3,0\}$).

$$F_{p_{1-\text{الف}}} = \sum_{i=0}^{n} l_i = (7) + (7+5) + (7+5+7) + (7+5+7+9) + (7+5+7+9+4) + (7+5+7+9+4+3) = 133$$

$$F_{p_{1-\text{ب}}} = \sum_{i=0}^{n} l_i = (3) + (3+2) + (3+2+5) + (3+2+5+6) + (3+2+5+6+9) + (3+2+5+6+9+9) = 93$$

با محاسبه تابع هدف دو توالی می‌توان نتیجه‌گیری نمود که توالی $p_{1-\text{ب}}$ دارای تابع هدف کمتری (بهتری) نسبت به توالی $p_{1-\text{الف}}$ است و بنابراین توالی $p_{1-\text{ب}}$ بر توالی $p_{1-\text{الف}}$ چیره است.

با نشان‌دادن توالی بازدید گره‌ها در مسئله تعمیرکار سیار به‌صورت $p = \{0, \dots, i, j, \dots n, 0\}$ (شروع و پایان از گره صفر)، می‌توان رابطه‌ای ساده‌تر برای محاسبه تابع هدف مسئله تعمیرکار سیار توسعه داد (معادله ۳). بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید توالی بازدید به‌صورت $p = \{0,1,2,\dots,n,0\}$ است. در این‌صورت مجموع زمان‌های انتظار گره‌ها توسط معادله ۱ محاسبه خواهد شد:

$$F_p = \sum_{i=1}^{n} l_i \quad (۱)$$

$$l_i = \sum_{j=1}^{j \le i} c_{j-1,j} \quad (۲)$$

که $l_i = \sum_{j=1}^{j \le i} c_{j-1,j}$ (معادله ۲). با جایگزینی معادله ۲ در معادله ۱ و ساده‌سازی، معادله ۳ به‌وجود خواهد آمد که به مراتب دارای حجم محاسبات بسیار کمتری نسبت به معادله ۱ است.

$$F_p = \sum_{i=1}^{n} ((n+1) - i + 1) c_{i-1,i} + c_{n,0} \quad (۳)$$

۳. مدل‌سازی ریاضی مسئله در حالت یک تعمیرکار

در این بخش یک مدل ریاضی عدد صحیح آمیخته برای مسئله تعمیرکار سیار هنگامی‌که تنها یک تعمیرکار وجود دارد توسعه داده می‌شود. مدل توسعه داده‌شده نسبت به مدل‌های موجود دارای این برتری است که قالب برنامه‌ریزی خطی آن، که از رها سازی محدودیت‌های متغیر عدد صحیح حاصل می‌شود، دارای جواب بهینه‌ای است که می‌تواند به‌عنوان حد پایین با کیفیت بسیار خوبی قلمداد شود. این برتری سبب می‌شود بدون بهره‌گیری از الگوریتم شاخه و کران و تنها با بهره‌گیری از حل‌کننده‌های موجود و رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح بتوان مسائل تا اندازه ۲۵ گره را به‌طور بهینه و تا اندازه ۳۰ گره را با حداکثر اختلاف ۵٪ از حد پایین (بدیهی است که اختلاف از بهینگی به مراتب کمتر از این مقدار خواهد بود) حل نمود. مدل توسعه داده‌شده، تعمیم‌یافته مدل ارائه شده توسط فیسکتی و

همکاران می‌باشد [۷] و با افزودن دسته‌ای از متغیرهای تصمیم صفر و یک و چندین محدودیت حاصل شده‌است. براساس تقسیم‌بندی بیکر و کلر از مدل‌های ریاضی عدد صحیح آمیخته برای مسائل زمان‌بندی [۲]، مدل توسعه‌شده در دسته مدل‌های ترکیبی قرار می‌گیرد (در ادامه در این خصوص بیشتر توضیح داده می‌شود). متغیرهای تصمیم و پارامترهای مدل به‌شرح زیر می‌باشند.

۳-۱. متغیرهای تصمیم

x_{ij}	مقدار ۱ می‌گیرد اگر تعمیرکار از گره i به گره j سفر کند و در غیر این‌صورت مقدار صفر می‌گیرد.
y_{ij}	مقدار $n-u+1$ می‌گیرد اگر گره j بعد از گره i در موقعیت u توالی توسط تعمیرکار بازدید شود و در غیر این‌صورت مقدار صفر می‌گیرد.
p_{ui}	مقدار ۱ می‌گیرد اگر گره i در ترتیب u در توالی توسط تعمیرکار بازدید شود و در غیر این‌صورت مقدار صفر می‌گیرد. وگنر این متغیر را متغیر موقعیت توالی نامید [۲۰].

(۲۱)

۳-۲ پارمترها

i	گره i که $i=0,\dots,n$ با توجه به اینکه $i=0$ به‌عنوان محل شروع تعمیرکار می‌باشد. پس تعداد کل گره‌ها $n+1$ می‌باشد.
l_i	زمان انتظار گره i، به‌طوری‌که $l_0=0$.
F_p	مقدار تابع هدف برای توالی p.
t_{ij}	زمان سفر از گره i به گره j.

در این مدل (مدل ۱) فرض می‌شود گره صفر، مبدا یا نقطه شروع تعمیرکار سیار است.

۳-۳ مدل ۱

$$\text{Minimize } z=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} t_{ij}\cdot y_{ij} \quad (۴)$$

Subject to

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij}=1 \qquad j=1,\dots,n \quad (۵)$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij}=1 \qquad i=1,\dots,n \quad (۶)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0}=1 \quad (۷)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{0j}=1 \quad (۸)$$

$$\sum_{j=0}^{n} y_{0j}=n+1 \quad (۹)$$

$$\sum_{j=0}^{n} y_{j0}=1 \quad (۱۰)$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_{i0}-\sum_{j=0}^{n} y_{0j}=1-(n+1) \quad (۱۱)$$

$$\sum_{i=0}^{n} y_{ik}-\sum_{j=0}^{n} y_{kj}=1 \qquad k=1,\dots,n \quad (۱۲)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} y_{ij}=\sum_{t=1}^{n+1} t \quad (۱۳)$$

$$y_{ij}\le (n+1).x_{ij} \qquad i,j=0,\dots,n \quad (۱۴)$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \qquad i,j=0,\dots,n \quad (۱۵)$$

$$y_{ij}\ge 0 \qquad i,j=0,\dots,n \quad (۱۶)$$

$$\sum_{u=0}^{n} p_{ui}=1 \qquad i=0,\dots,n \quad (۱۷)$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_{ui}=1 \qquad u=0,\dots,n \quad (۱۸)$$

$$p_{00}=1 \quad (۱۹)$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_{ni}=1 \quad (۲۰)$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_{jk}-(n+1-(i+1)).p_{ij}\ge 0 \qquad i,j=0,\dots,n \quad (۲۱)$$

$$p_{ui}\in\{0,1\} \qquad u,i=0,\dots,n \quad (۲۲)$$

محدودیت‌های ۵ و ۶ برگرفته از مسئله تخصیص هستند و اطمینان حاصل می‌کنند که هر گره (جزء گره صفر) دقیقا یک‌بار بازدید می‌شود. محدودیت‌های ۷ و ۸ اطمینان حاصل می‌کنند که تعمیرکار بازدید را از گره صفر شروع کرده و آن‌را با گره صفر خاتمه می‌دهد. محدودیت‌های ۹ تا ۱۳ برگرفته از مسئله جریان در شبکه هستند.

وجود این محدودیت‌ها در مدل ۱، مانع از شکل‌گیری زیرتورها در جواب می‌شوند و این به معنی تولید جواب امکان‌پذیر است (توالی بازدید). محدودیت‌های ۱۴ متغیرهای x_{ij} را با متغیرهای y_{ij} مرتبط می‌کنند. محدودیت‌های ۱۶ و ۱۷ الزام می‌کنند متغیرهای x_{ij} و y_{ij} به‌ترتیب از نوع متغیرهای صفر و یک و متغیرهای غیرمنفی هستند. به‌طور کلی محدودیت‌های ۱۷ تا ۲۲ دلالت بر چگونگی ترتیب بازدید گره‌ها در توالی دارند. در این بین، محدودیت‌های ۱۷ و ۱۸ اطمینان حاصل می‌کنند که هر ترتیب بازدید در توالی تنها به یک گره می‌تواند تخصیص داده شود (به‌عبارت بهتر دو گره نمی‌توانند دارای یک ترتیب توالی باشند و همزمان بازدید شوند) و بالعکس. الزام بازدید گره صفر به‌عنوان اولین و آخرین گره در توالی بازدید توسط محدودیت‌های ۱۹ و

۲۰ تامین می‌شود. محدودیت‌های ۲۱ متغیرهای y_{ij} را با متغیرهای p_{ui} مرتبط می‌کنند. محدودیت‌های ۲۲ اطمینان حاصل می‌کنند که متغیرهای p_{ui} از نوع متغیرهای صفر و یک هستند. در مدل ۱ متغیر تصمیم p_{ui} به‌منظور افزایش کارایی مدل به آن افزوده شده‌است. اگر چه این مدل می‌تواند برای مسائل تا اندازه ۲۰ گره در زمانی منطقی جواب بهینه به‌دست دهد، ولی در خاصیت ۱ نشان می‌دهیم که چگونه مدل ۱ می‌تواند بهبود یابد و ضمن حل بهینه مسائل تا اندازه ۲۵ گره، زمان حل را نیز به‌طور چشم‌گیری کاهش دهد.

خاصیت ۱. محدودیت‌های ۲۱ در مدل ۱ می‌توانند توسط محدودیت‌های بسیار کاراتری جایگزین شوند. این محدودیت‌های جدید عبارتند از $\sum_{k=0}^{n} x_{ik} - \sum_{u=0}^{n} p_{ui} \geq 0 \,, \forall i$ افزودن این دسته محدودیت‌ها به‌همراه رهاسازی محدودیت‌های متغییر عدد صحیح منجر به یک قالب برنامه‌ریزی خطی می‌شود که جواب بهینه‌ی آن می‌تواند به‌عنوان حد پایین با کیفیت بالاتری نسبت به حد پایین قبلی قلمداد شود و بنابراین منجر به بهبود مدل ۱ شود.

اثبات. تامین محدودیت‌های ۲۱ که ارتباط‌دهنده بین متغیرهای y_{ij} و p_{uj} هستند بسیار دشوار است. از طرفی این محدودیت‌ها، از نوع محدودیت‌های الزام‌آور[1] هستند. بنابراین با توجه به تابع هدف مسئله که از نوع حداقل‌سازی است، رهاسازی این محدودیت‌ها منجر به توسعه حدود پایین برای مسئله می‌شود. از طرفی برقراری ارتباط بین متغیرهای y_{ij} و p_{uj} را می‌توان از طریق برقراری ارتباط بین متغیرهای x_{ij} و y_{ij} (محدودیت‌های ۱۴) و برقراری ارتباط بین متغیرهای x_{ij} و p_{uj} (محدودیت‌های ۲۱) تامین نمود. بنابراین محدودیت‌های ۲۱ می‌توانند به‌راحتی توسط محدودیت‌های ۲۳ جایگزین شوند.

$$\sum_{k=0}^{n} x_{ik} - \sum_{u=0}^{n} p_{ui} \geq 0 \quad i = 0, \dots, n \tag{۲۳}$$

۴. رویه توسعه داده‌شده برای حل مسئله تعمیرکار سیار

در این بخش رویه توسعه داده‌شده برای حل مسئله تعمیرکار سیار در حالت وجود یک تعمیرکار، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این رویه شامل بهره‌گیری از حدود بالا و پایین و یک الگوریتم شاخه و کران می‌باشد. لازم به ذکر است که این رویه حل برای حل مسائل بزرگتر از ۲۵ گره مورداستفاده قرار می‌گیرد. برای حل مسائل تا اندازه ۲۵ گره، مدل ۱ برای اولین بار توانسته‌است با بهره‌گیری از حل‌کننده‌های عمومی و رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته همانند Cplex و LINGO، جواب بهینه را در مدت زمان بسیار کمی ارائه نماید.

۴-۱. توسعه حدود پایین و بالا برای مسئله

صالحی‌پور و همکاران حدود پایین نسبتا مناسبی را براساس حل بهینه مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترده ارائه نموده‌اند [۱۴]. علاوه بر کیفیت متوسط حد پایین آنها، افزایش اندازه مسئله باعث کاهش بیشتر کیفیت این حد پایین می‌شود. براساس بررسی‌های نویسندگان مقاله حاضر، دلیل اصلی کیفیت متوسط حد پایین صالحی‌پور و همکاران در این است که برخلاف مسئله تعمیرکار سیار، لزوما جواب بهینه مسئله کوتاه‌ترین درخت گسترده یک تور نمی‌باشد و بنابراین گره‌ها می‌توانند بیشتر از یک‌بار نیز دیده‌شوند. بنابراین انتظار می‌رود اگر بتوان حد پایین را براساس شکل‌گیری یک تور توسعه داد، دارای کیفیت به مراتب بالاتری باشد. به دنبال این ایده، در این مقاله حد پایین براساس حل بهینه مسئله پیله‌ور توسعه داده‌می‌شود. براساس نتایج محاسباتی ارائه‌شده در بخش ۵، این حد پایین دارای کیفیت بسیار بالاتر و قابل قبول‌تری نسبت به حد پایین صالحی‌پور و همکاران [۱۴] است. به‌علاوه همان‌طور که نتایج محاسباتی نشان می‌دهد با افزایش اندازه مسئله افت محسوسی در کیفیت این حد پایین مشاهده نمی‌شود.

جهت محاسبه حد پایین مذکور، ابتدا مسئله پیله‌ور را به‌طور بهینه حل می‌نماییم. سپس پس از مرتب‌کردن سویه‌های ظاهر شده در تور بهینه به‌ترتیب صعودی، هر سویه را در وزنی متناظر با آنچه برای هر سویه در مسئله تعمیرکار سیار تعریف می‌شود (معادله ۳) ضرب می‌کنیم. در این‌صورت کوتاه‌ترین سویه در بزرگترین وزن، دومین کوتاه‌ترین سویه در دومین بزرگترین وزن و الی آخر ضرب می‌شوند. براساس اثبات ارائه‌شده در پیش قضیه ۲، حاصل جمع این حاصل‌ضرب یک حد پایین برای مسئله تعمیرکار سیار خواهد بود.

پیش‌قضیه ۲. فرض کنید $t = t_1, t_2, \dots, t_n, t_i \in E$ سویه‌های ظاهرشده در تور بهینه مسئله پیله‌ور هستند که به‌ترتیب صعودی مرتب شده‌اند، بنابراین $t_i \leq t_j \; iff \; i < j$. یک حد پایین برای مسئله توسط معادله ۲۴ به‌دست خواهد آمد.

$$LB = \sum_{i=1}^{n+1} ((n+1) - i + 1) w(t_i) \tag{۲۴}$$

که در آن $w(t_i)$ وزن سویه t_i می‌باشد.

اثبات. فرض کنید که جواب بهینه مسئله پیله‌ور توسط توالی $p^* = \{r_1, r_2 \dots, r_n\}, r_i \in E$ ارائه شده‌است. مقدار تابع هدف این توالی برای مسئله تعمیرکار سیار عبارت است از $f(p^*) = \sum_{i=1}^{n+1} \big((n+1) - i + 1\big) w(r_i)$. با توجه به اینکه

[1] *Binding*

t به‌عنوان توالی بهینه مسئله پیله‌ور است، این بدان معنی است که مسیری که هر دو گره دلخواه در این تور را به یکدیگر متصل می‌کند و از گره‌های مابین نیز عبور می‌کند، کوتاه‌ترین مسیر ممکن بین آن دو گره می‌باشد. از طرفی هنگامی‌که سویه‌ها را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم دیگر توالی حاصل‌شده لزوما یک تور نخواهد بود. به‌علاوه همواره مجموع وزنی i کوتاه‌ترین سویه که تشکیل تور نمی‌دهند از مجموع وزنی هر مجموعه i سویه دیگر که تور تشکیل می‌دهند کمتر خواهد بود. با توجه به اینکه i سویه در تعمیرکار سیار منجر به یک تور می‌شوند لذا:

$$\sum_{j=1}^{i} w(t_j) \le \sum_{j=1}^{i} w(r_j) \quad (۲۵)$$

که اگر حاصل جمع را نیز محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{i} w(t_j) \le \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{i} w(r_j) \quad (۲۶)$$

و پس از ساده‌سازی خواهد شد:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\big((n+1)-i+1\big)w(t_i) \le \sum_{i=1}^{n+1}\big((n+1)-i+1\big)w(r_i) \quad (۲۷)$$

بنابراین می‌توان از جواب بهینه مسئله پیله‌ور به‌منظور توسعه حد پایین با کیفیت بسیار خوب برای مسئله تعمیرکار سیار بهره جست. شایان ذکر است که بررسی‌های انجام‌شده توسط نویسندگان نشان از کیفیت بالای این حد پایین دارد. علی‌رغم دشواری و پیچیدگی محاسباتی مسئله پیله‌ور، پیشرفت‌های قابل توجهی در حل این مسئله به‌وجود آمده‌است.

در این راستا با بهره‌گیری از حل‌کننده‌های رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته همانند Cplex می‌توان به سهولت مسائل تا اندازه ۵۰ گره را در مدت زمان چند ثانیه با کمک رایانه شخصی حل نمود. برای حل مسائل بزرگ‌تر می‌توان از نرم‌افزار concorde که خاص حل بهینه مسئله پیله‌ور تهیه شده‌است و به‌صورت رایگان در دسترس است بهره جست (این نرم‌افزار حتی قادر است مسائل تا اندازه ۲۰۰ گره را در کمتر از چند ثانیه به کمک رایانه شخصی به‌طور بهینه حل نماید).

در کنار حدود پایین، توسعه حدود بالا نیز می‌توانند به حل مسئله تعمیرکار سیار کمک کنند. در این راستا سیمچی‌لوی و برمن [۱۸] حدود بالا را با استفاده از الگوریتم ابتکاری نزدیکترین جستجوی همسایگی به‌دست آورده‌اند. در این مقاله حدود بالا را با بهره‌گیری از رویه ابتکاری صالحی‌پور و سپهری [۱۵] که به‌مراتب پیچیده‌تر و کاراتر از الگوریتم ابتکاری نزدیکترین جستجوی همسایگی می‌باشد، به‌دست می‌آوریم.

براساس نتایج محاسباتی ارائه شده توسط صالحی‌پور و سپهری [۱۵]، این رویه که به‌عنوان یکی از توانمندترین الگورتیم‌های ابتکاری حل مسئله تعمیرکار سیار مطرح می‌باشد، بسیار کارا بوده به‌طوری‌که برای ۳۶ مسئله (از ۴۰ مسئله) که به‌طور بهینه قابل حل هستند، جواب بهینه ارائه نموده‌است. بنابراین، با توجه به مشاهدات گزارش‌شده انتظار می‌رود رویه مذکور بتواند برای مسائل بزرگ‌تر نیز حدود بالا را با کیفیت بسیار مطلوبی تولید نماید.

۴-۲. الگوریتم شاخه و کران

به‌منظور حل مسائل بزرگ‌تر تا اندازه ۳۰ گره از یک الگوریتم شاخه و کران مبتنی بر عمق جستجو بهره‌گیری شده‌است. درخت الگوریتم براساس ترتیب بازدید گره‌ها توسط تعمیرکار سیار، تشکیل می‌شود.

به‌عنوان مثال اگر در سطح ۱ از درخت باشیم (شروع از گره صفر در سطح صفر) و گره ۲ تحت بررسی باشد، بدان معنی است که گره ۲ اولین گره‌ای است که بعد از گره صفر بازدید می‌شود. از حدود بالا و پایین توسعه داده‌شده در بخش قبل، به منظور تحدید و مسدود کردن گره‌های درخت استفاده شده‌است. علاوه بر این حدود، در هر گره از درخت استراتژی نگاه به جلو به‌کار گرفته می‌شود تا سرعت الگوریتم افزایش یابد. به‌کارگیری این استراتژی این امکان را فراهم می‌کند که قبل از پیمودن شاخه‌های درخت، بسیاری از آنها مسدود شوند. به‌طور خلاصه در هر گره از درخت دو مقدار محاسبه می‌شود: مقدار اول تابع هدف تا گره مذکور است (بنابراین بخشی از توالی بازدید تولید شده‌است) و مقدار دوم تخمینی از تابع هدف گره‌های باقی‌مانده است. بنابراین مقدار دوم تخمینی روی کم‌هزینه‌ترین توالی بازدید گره‌های باقی‌مانده است (حضور این گره‌ها در کنار گره‌های جستجوشده، جواب امکان‌پذیر برای مسئله را سبب می‌شوند). پرواضح است که محاسبه این مقدار به‌منزله به‌کارگیری استراتژی نگاه به جلو است. پس از محاسبه این دو مقدار در هر گره، حاصل جمع آن‌ها با حد بالا مقایسه می‌شود و در صورتی‌که از حد بالا بیشتر شود آن گره مسدود می‌شود و الگوریتم از گره باز دیگری کار را ادامه می‌دهد. این فرآیند آن‌قدر تکرار می‌شود که تمامی گره‌های هر شاخه مسدود شوند، و یا شاخه‌ای که هیچ‌یک از گره‌های آن مسدود نشده‌است، مشخص شود (جواب بهینه). قابل توجه است که در حین پیشرفت الگوریتم و جستجوی گره‌ها، حد بالا نیز به‌روز آوری می‌شود و در صورتی‌که شاخه‌ای که هیچ‌یک از گره‌های آن مسدود نشده‌است دارای مقدار تابع هدف کمتری نسبت به حد بالا باشد، حد بالا به این مقدار جدید کاهش می‌یابد.

۵. نتایج محاسباتی

به‌منظور نشان‌دادن توانایی مدل ۱ در حل مسائلی که تاکنون توسط حل‌کننده‌های عمومی و رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته قابل حل نبوده‌اند و همچنین نشان‌دادن توانایی الگوریتم شاخه و کران و حدود توسعه داده‌شده، در این بخش عملکرد آن‌ها روی دو دسته مسائل مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در هر دو دسته مسائل، هزینه‌های (زمان / فاصله) سفر بین هر دو گره به‌صورت تصادفی با استفاده از توزیع یکنواخت تولید شده‌اند. دو پارامتر توزیع یکنواخت برای دسته اول به‌ترتیب ۱ و ۵۰ (بین [۱،۵۰]) و برای دسته دوم به ترتیب ۱ و ۸ (بین [۸،۱]) می‌باشند. همان‌طور که نتایج محاسباتی نشان می‌دهند برای مسائل دسته دوم که هزینه‌های سفر بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشند (در حقیقت پراکندگی گره‌ها کم است) مدل ۱ می‌تواند مسائل تا اندازه ۱۰۰ گره را به‌طور بهینه حل کند. این در حالی است که مدل‌های موجود نمی‌توانند حتی مسائل تا اندازه ۲۰ گره را نیز به‌طور بهینه حل نمایند. قابل توجه است که در بسیاری از مسائل دنیای واقعی، شرایط حاکم بر مسئله سبب می‌شوند هزینه‌های سفر بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و در یک بازه محدودی تعریف شوند. حل‌کننده مورد استفاده در این مقاله جهت حل مدل ۱ Cplex نسخه ۱۱.۲ است. الگوریتم شاخه و کران توسعه داده‌شده نیز در محیط نرم‌افزار MATLAB کدنویسی شده‌است. رایانه‌ای که برای حل مسائل از آن بهره‌برداری شده‌است دارای پردازنده ۳ گیگاهرتز و حافظه ۵۱۲ مگابایت می‌باشد. کلیه نتایج محاسباتی در قالب دو جدول (جداول ۲ و ۳) آورده شده‌اند. جدول ۲ نتایج محاسباتی مربوط به مسائل دسته اول را نشان می‌دهد. به‌منظور نشان‌دادن برتری مدل ۱، نتایج آن‌را با نتایج حاصل از حل مدل ریاضی ارائه‌شده توسط فیسکتی و همکاران [۷] مقایسه نموده‌ایم. علاوه بر این دو مدل ریاضی، نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم شاخه و کران نیز نشان داده شده‌است. بنابراین در مجموع ۳ رویکرد مختلف (یک الگوریتم شاخه و کران و ۲ مدل ریاضی) برای حل ۶۰ مسئله در ۶ اندازه مختلف بررسی شده‌اند. برای هر رویکرد ۶ مقدار شامل حداقل، میانگین و حداکثر زمان محاسباتی و حداقل، میانگین و حداکثر اختلاف، نشان داده شده‌است. حد بالای زمان مجاز محاسباتی برای تمامی رویکردها و مسائل ۱ ساعت در نظر گرفته شده‌است.

جدول ۲. نتایج محاسباتی مسائل دسته اول

اندازه مسئله		الگوریتم شاخه و کران			مدل ۱			مدل فیسکتی و همکاران [۷]		
		حداقل	میانگین	حداکثر	حداقل	میانگین	حداکثر	حداقل	میانگین	حداکثر
۱۰	زمان (ثانیه)	۱.۹۳	۲.۵۶	۵.۹۳	۳.۹۸	۹.۳۴	۱۳.۶۶	۱۸.۳۶	۸۳.۹۱	۳۱۹.۹۷
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۵	زمان (ثانیه)	۹.۱۴	۱۴.۲۵	۲۴.۱۴	۳۲.۲۲	۶۷.۱۸	۱۷۵.۵۸	۵۱۱.۶۱	۲۹۹۰.۵۷	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۲.۲۸	۲۷.۷۲
۱۸	زمان (ثانیه)	۲۲.۰۹	۳۳.۰۹	۴۸.۶۲	۳۵.۵۲	۹۱۰۱.۸۷	۲۵۵.۶۳	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۳.۹۷	۳۱.۷۶	۴۱.۲۲
۲۰	زمان (ثانیه)	۶۵.۱۴	۱۱۳.۹۸	۱۹۹.۴۱	۸۵.۱۹	۳۰۳.۳۰	۸۲۹.۷۸	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۴۰.۹۷	۴۲.۲۹	۵۱.۸۸
۲۵	زمان (ثانیه)	۱۲۱.۱۵	۲۶۷.۰۱	۳۰۱.۱۱	۳۸۸.۲۲	۹۹۰.۰۵	۱۴۷۸.۲۳	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۴۴.۲۳	۵۰.۷۲	۵۷.۱۸
۳۰	زمان (ثانیه)	۲۳۴.۹	۴۳۸.۵۶	۶۱۲.۳۹	۲۱۱۳.۰۷	۲۶۳۴.۶۶	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰	۰.۸۶	۴.۵۶	۴۴.۸۸	۵۴.۶۴	۸۶.۰۹

جدول ۳ نتایج مربوط به مسائل دسته دوم را نشان می‌دهد. در اینجا نیز از نتایج حاصل از حل مسائل نمونه توسط مدل فیسکتی و همکاران [۷] بهره گرفته شده‌است. برای این دسته مسائل ۱۰۰ مسئله در ۱۰ اندازه مختلف حل شده‌اند و همانند جدول ۲، برای هر یک از دو مدل ریاضی بررسی شده ۶ مقدار شامل حداقل، میانگین و حداکثر زمان محاسباتی و حداقل، میانگین و حداکثر اختلاف، نشان داده شده‌است. لازم به‌ذکر است که با توجه به توانمندی مدل ۱ و عدم توانایی الگوریتم شاخه و کران در حل مسائل بزرگ‌تر از ۳۰ گره، از این الگوریتم برای حل مسائل دسته دوم بهره گرفته نشده‌است. همانند مسائل دسته اول، در اینجا نیز حد بالای زمان محاسباتی برای هر یک از دو مدل ریاضی و تمامی مسائل ۱ ساعت در نظر گرفته شده‌است. همان‌طور که با دقت در این جدول می‌توان دریافت مدل ۱ بسیار توانمند در حل بهینه این دسته مسائل است، در حالی که توانایی مدل فیسکتی و همکاران [۷] تغییری نکرده‌است و همچنان نمی‌تواند حتی مسائل با اندازه ۲۰ گره را نیز به‌طور بهینه حل نماید.

جدول ۳. نتایج محاسباتی مسائل دسته دوم

اندازه مسئله		مدل ۱			مدل فیسکتی و همکاران (۱۹۹۳)		
		حداقل	میانگین	حداکثر	حداقل	میانگین	حداکثر
۱۰	زمان (ثانیه)	۱.۵۹	۲.۳۲	۳.۲۷	۱۳.۴۴	۱۹۰.۷۵	۳۴۳.۱۶
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۲۰	زمان (ثانیه)	۵۴.۱۶	۴۷۱.۲۲	۱۳۴۹.۱	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰.۴۶	۰.۵۱۵	۰.۵۷
۳۰	زمان (ثانیه)	۳۰.۴۵	۲۶۲۲.۲	۳۶۰۰.۶	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰.۰۰۸	۰.۰۳	۰.۷	۰.۷۵۳	۰.۸
۴۰	زمان (ثانیه)	۵۵.۱۱	۱۶۴۱	۳۶۱۹.۲	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰.۸۳	۰.۸۵۱	۰.۸۷
۵۰	زمان (ثانیه)	۹۸.۰۵	۱۳۸۷.۶	۳۶۰۱.۱	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰.۰۰۱	۰.۰۱	۰.۷۹	۰.۸۲	۰.۸۸
۶۰	زمان (ثانیه)	۱۹۳.۶۹	۹۸۰.۴۴	۳۶۰۲	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰.۸۱	۰.۸۳	۰.۸۸
۷۰	زمان (ثانیه)	۲۸۰.۱۹	۶۵۴.۲۷	۱۲۰۰.۱	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰.۷۹	۰.۸۵	۰.۹۱
۸۰	زمان (ثانیه)	۳۲۱.۴۷	۱۱۹۴.۶	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰	۰	۰.۸۱	۰.۸۵	۰.۹۲
۹۰	زمان (ثانیه)	۲۱۰۷.۱	۲۹۲۵.۱	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰.۰۰۱	۰.۰۱	۰.۸	۰.۸۶	۰.۹۴
۱۰۰	زمان (ثانیه)	۱۲۴۵	۲۹۶۱	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰
	اختلاف (٪)	۰	۰.۰۰۷	۰.۰۴	۰.۸۴	۰.۸۹	۰.۹۶

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله تعمیرکار سیار که یک مسئله مسیریابی مشتری‌گرا است مطالعه شده‌است. اهمیت مطالعه مسئله را می‌توان در بهینه‌سازی معیار کاهش زمان‌های انتظار خصوصا در سیستم‌های خدماتی عنوان نمود. به‌منظور حل مسئله ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته توسعه داده‌شد که می‌تواند مسائل تا اندازه ۲۵ گره را در زمان کوتاهی و آن‌هم تنها با بهره‌گیری از حل‌کننده‌های عمومی و رایج، به‌طور بهینه حل نماید.

به‌منظور حل مسائل بزرگ‌تر تا اندازه ۳۰ گره از یک الگوریتم شاخه و کران و به‌کارگیری حدود پایین و بالا در آن بهره‌گیری شد.

نتایج محاسباتی و مقایسه آن با نتایج حاصل از مدل‌های موجود نشان از توانایی بسیار بالای مدل ارائه‌شده و حدود ارائه‌شده در حل بهینه مسائل دارد، به‌طوری‌که مدل توسعه داده‌شده می‌تواند مسائل تا اندازه ۱۰۰ گره را هنگامی‌که هزینه‌های سفر نزدیک به یکدیگر باشند به‌طور بهینه حل نماید.

مراجع

[1] Afrati, F., Cosmadakis, S., Papadimitriou, C.H., Papageorgiou, G. and Papakostantinou, N., "*The Complexity of the Traveling Repairman Problem"*, Theoretical Informatics and Applications, Vol 20, 1986, pp. 79–87.

[2] Baker, K., R., Keller, B., "*Solving the Single-Machine Sequencing Problem using Integer Programming"*, Computers & Industrial Engineering, Vol. 59, 2010, pp. 730–735.

[3] Bianco, L., Mingozzi, A., Ricciardelli, S., "*The Travelling Salesman Problem with Cumulative Costs"*, Networks, Vol. 23, No. 2, 1993, pp. 81–91.

[4] Braysy, O., Gendreau, M., "*Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part I Route Construction and Local Search Algorithms"*, Transportation Science, Vol. 39, No. 1, 2005a, pp. 104–118.

[5] Braysy, O., Gendreau, M., "*Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part II: Meta-Heuristics"*,

Transportation Science, Vol. 39, No. 1, 2005b, pp. 119–139.

[6] Blum, A., Chalasani, P., Coppersmith, D., Pulleyblank, B., Raghavan, P., Sudan, M., "*The Minimum Latency Problem",* In: Proceedings of the 26th annual symposium on Theory of Computing (STOC), 1994, pp. 163–171.

[7] Fischetti, M., Laporte, G., Martello, S., "*The Delivery Man Problem and Cumulative Matroids"*, Operations Research, Vol. 41, No. 6, 1993, pp. 1065-1064.

[8] Garcıa, A., Jodra, P., Tejel, J., "*A Note on the Traveling Repairman Problem",* Networks, Vol. 40, No. 1, 2002, pp. 27–31.

[9] Golden, B., Raghavan, S., Wasil, E., (Eds.), "*The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges"*, Springer, 2008.

[10] Gutin, G., Punnen, A.P., (Eds.), "*The Traveling Salesman Problem and Its Variations",* Kluwer, 2002.

[11] Heilporn, G., Cordeau, J. F., Laporte, G., "*The Delivery Man Problem with time windows"*, Discrete Optimization, Vol. 7, 2010, PP. 269-282.

[12] Picard, J.C., Queyranne, M., *"The Time-Dependent Traveling Salesman Problem and its Application to the Tardiness Poblem in One-Machine Scheduling"*, Operations Research, Vol. 21, 1978, pp. 86-110.

[13] Sahni, S., Gonzales, T., "*P-Complete Approximation Problems"*, Journal of the ACM, Vol. 23, No. 3, 1976, pp. 555-565.

[14] Salehipour, A., Goos, P., Sorensen, K., Braysy, O.. "*The Traveling Repairman Problem"*, In: Proceedings of ORBEL 21, Luxembourg, 2007.

[15] Salehipour, A., Sepehri, M.M., "*Solution for Large Scale Traveling Repairman Problem"*, Working Paper, 2010a.

[16] Salehipour, A., Sepehri, M.M., "*A New Mixed-Integer Programming Formulation for Locating Workstations in Tandem Automated Guided Vehicle Systems"*, Journal of Manufacturing Systems, Under review, 2010b.

[17] Salehipour, A., Sepehri, M.M., "*Minimizing Total Waiting Time in the Blood Products Distribution Problem"*, Working Paper, 2010c.

[18] Simchi-Levi, D., Berman, O., "*Minimizing the Total Flow Time of n Jobs on a Network"*, IIE Transactions, Vol. 23, No. 3, 1991, PP. 236–244.

[19] Toth, P., Vigo, D., "*The Vehicle Routing Problem"*, Philadelphia: SIAM, 2001.

[20] Wagner, H.M., "*An Integer Programming Model for Machine Scheduling"*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 6, 1959, pp. 131–140.

[21] Wu, B.Y., Huang, Z.N., Zhan, F.J., "*Exact Algorithms for the Minimum Latency Problem"*, Information Processing Letters, Vol. 92, 2004, pp. 303–309.

[22] Zambito, L., "*The Traveling Salesman Problem: A Comprehensive Survey"*, Private communication, 2006.