



## A New Mathematical Formulation for the Traveling Repairman Problem based on the Mixed Integer Programming Formulation

A. Salehipour & M.M. Sepehri\*

Amir Salehipour, Associate professor, Faculty of Industrial Engineering, Taribat Modarres University  
Mohammad Mehdi Sepehri, Ph.D. Student, Faculty of Industrial Engineering, Taribat Modarres University,

### Keywords

Traveling Repairman Problem,  
Mixed Integer Programming,  
Branch and Bound

### ABSTRACT

The Traveling Repairman Problem is a customer-oriented routing problem in which a repairman is visiting a set of geographically distributed customers. The objective function is to minimize the total waiting times of all customers. The importance of this problem can be found in its applications in the following areas: blood distributing, manufacturing systems, and transportation and logistics. Apart from its importance, research on this problem is very limited. In this paper a new mixed-integer programming formulation is developed, and several properties of model are studied. Additionally, by developing lower and upper bounds, a branch and bound algorithm is developed to solve the problems with up to 30 nodes. According to the computational experiments, the developed model is very competitive.

© 2012 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 23, No. 3, All Rights Reserved

\*  
Corresponding author: Mohammad Mehdi Sepehri  
Email: mehdi.sepehri@modares.ac.ir



## مدلی جدید برای حل مسئله تعمیرکار سیار بر پایه برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته

امیر صالحی‌پور و محمد‌مهدی سپهری\*

### چکیده:

مسئله تعمیرکار سیار یک مسئله مسیریابی با تمرکز بر مشتری است که در آن یک تعمیرکار سرویس مورد درخواست مجموعه‌ای از متقاضیانی که در نقاط مختلف جغرافیایی پراکنده هستند (گرهها) را ارائه می‌دهد. تابع هدف این مسئله کمینه کردن مجموع زمان انتظار تمامی متقاضیان است. اهمیت مسئله را می‌توان در کاربردهای بسیاری که مسئله در حوزه‌های سیستم‌های تولیدی، سلامت و درمان و حمل و نقل دارد بیان نمود. تا به امروز تحقیقات محدودی روی مسئله انجام شده‌است. در این مقاله بهدلیل توسعه یک مدل ریاضی عدد صحیح آمیخته، برخی ویژگی‌ها و خواص مسئله بررسی می‌شوند. سپس با توسعه حدود بالا و پایین یک الگوریتم شاخه و کران (انشعاب و تحدید) طراحی می‌شود که می‌تواند مسائل تا بعد از ۳۰ گره را به طور بهینه حل نماید. محاسبات انجام‌شده نشان می‌دهد مدل توسعه داده شده بسیار توانمندتر از مدل‌های موجود است.

### کلمات کلیدی

مسئله تعمیرکار سیار،

مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته،

الگوریتم شاخه و کران

زمان انتظار برای یک گره، مجموع زمان انتظار آن تا رسیدن تعمیرکار می‌باشد. به طور مثال، اگر زمان رفت به گره اول  $t_1$  باشد، زمان انتظار برای این گره  $t_1$  است؛ و اگر زمان رفت از گره اول به گره دوم  $t_2$  باشد، زمان انتظار گره دوم برابر  $t_1 + t_2$  می‌شود؛ بنابراین مجموع کل زمان انتظار هر دو گره یا مجموع زمان انتظار انباشته<sup>۳</sup> آن‌ها برابر  $2t_1 + t_2$  است. در اینجا فرض می‌شود زمان سرویس به هر گره ناچیز است بهطوری که از آن صرف‌نظر می‌شود. خاطر نشان می‌شود مسئله تعمیرکار سیار با مسئله پیلهور<sup>۴</sup> تفاوت دارد بهطوری که هدف مسئله دوم حداقل کردن مجموع زمان‌های سفر است. پیشینه تحقیق در خصوص مسئله پیلهور بسیار غنی است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۱۰] و [۲۲] مراجعه نمود.

با توجه به تابع هدف مسئله تعمیرکار سیار و این مطلب که در هر گره یک متقاضی در انتظار دریافت سرویس است، می‌توان بیان داشت که این مسئله - به خاطر کمینه کردن مجموع زمان انتظار تمام متقاضیان - به نوعی مسیریابی مشتری‌گرا است.

### ۱. مقدمه

مسئله تعمیرکار سیار<sup>۲</sup> روی یک شبکه وزن دار  $N = (V, E, w)$  تعریف می‌شود که در آن مجموعه گره‌های  $V = \{v_0, \dots, v_n\}$  بیانگر مجموعه‌ای از مکان‌ها هستند. مقدار  $w(v_i, v_j)$  متنسب به هر سویه  $(v_i, v_j) \in E$  عضو  $E$  بیانگر هزینه (زمان / فاصله) مربوط به سفر از گره  $v_i$  به گره  $v_j$  است. هدف این مسئله یافتن یک توالی از بازدید این گره‌ها توسط تعمیرکار به گونه‌ای است که از  $v_0$  شروع شده و ضمن بازدید تمامی گره‌ها مجموع کل زمان انتظار تک تک گره‌ها برای بازدید حداقل شود.

تاریخ وصول: ۸۹/۸/۸

تاریخ تصویب: ۹۰/۳/۲

امیر صالحی‌پور دانشجوی دکتری، بخش مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، a.salehipour@modares.ac.ir

\*توبیضنده مسئول مقاله: دکتر محمد‌مهدی سپهری، دانشیار بخش مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، mehdi.sepehri@modares.ac.ir

<sup>2</sup> Traveling Repairman Problem

در بخش ۳ مدل ریاضی عدد صحیح توسعه داده شده به همراه نمادگذاری ریاضی آورده شده است. بخش ۴ به توسعه یک الگوریتم شاخه و کران و بخش ۵ به نتایج محاسباتی اختصاص داده شده است. نتیجه‌گیری و جهت‌گیری تحقیقات آتی پایان‌دهنده مقاله هستند.

## ۲. تعریف و بیان مسئله

تابع هدف مسئله تعمیرکار سیار که عبارت است از حداقل‌سازی مجموع زمان‌های انتظار (مجموع ابانته زمان سفر) کاملاً متفاوت از تابع هدف مسئله پیلهور - حداقل‌سازی مجموع زمان سفر - است. این تابع هدف می‌تواند به عنوان معیاری برای کارایی و اثربخشی یک سیستم خدمترسانی مورد استفاده قرار گیرد. به منظور درک بهتر تابع هدف مسئله تعمیرکار سیار و تفاوت آن با مسئله پیلهور در ادامه مثالی آورده شده است.

### ۲-۱. مثال

فرض کنید ۵ گره موجود است که میان شهرهایی هستند که تعمیرکار سیار باید آنها را بازدید کند. جدول ۱ هزینه‌های سفر (به طور مشابه زمان سفر) بین این گره‌ها و گره مبدأ را در قالب یک ماتریس هزینه سفر متقارن نشان می‌دهد. گره صفر (نقطه آغازین) به عنوان مبدأ حرکت تعمیرکار در نظر گرفته می‌شود. به منظور سهولت در درک مسئله فرض می‌کنیم هزینه به زمان تبدیل شده است و بنابراین زمان انتظار هر گره عبارت است از کل مدت زمانی که تعمیرکار باید سپری کند تا از گره صفر به گره موردنظر برسد. در این راستا با توجه به شکل الف- ۱ و ماتریس سفر جدول ۱، زمان انتظار گره ۱ عبارت است از ۷.

جدول ۱. ماتریس هزینه (به طور مشابه زمان) سفر

#### برای مثال

	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	•	۷	۶	۹	۱۲	۳
۱	-	•	۵	۱۴	۹	۲
۲	-	-	•	۷	۶	۱۰
۳	-	-	-	•	۹	۸
۴	-	-	-	-	•	۴
۵	-	-	-	-	-	•

به طور مشابه زمان انتظار گره ۲ عبارت است از زمان انتظار گره ۱ (زیرا این گره نمی‌تواند قبل از گره ۱ بازدید شود) به علاوه زمان سفر از گره ۱ تا گره ۲ لذا:

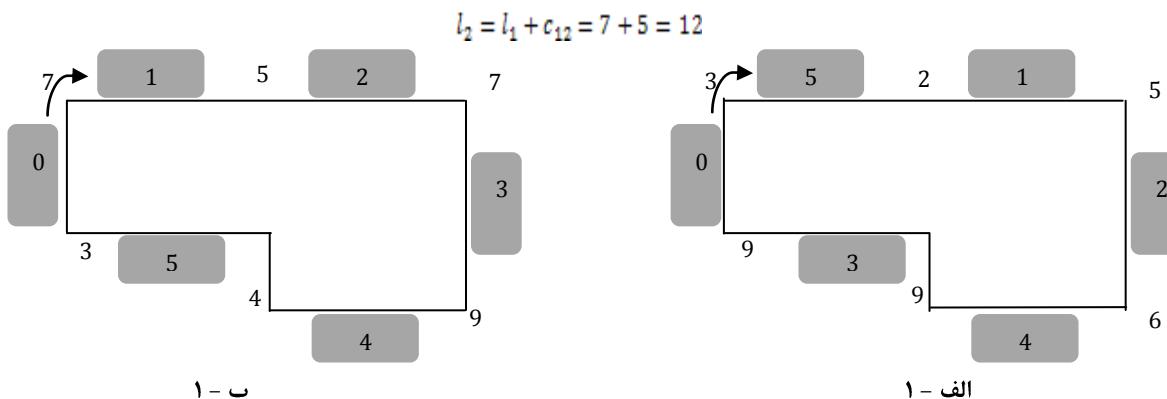
توزیع فرآوردهای خونی [۱۷]، مکان‌یابی بهینه ایستگاه‌های کاری در سیستم تولید زوجی [۱۶]، سرویس ایاب و ذهب مدارس [۴]، [۵] و [۹] و زمان‌بندی ماشین در سیستم‌های تولیدی [۱۲] از کاربردهای مهم مسئله هستند که در منابع علمی آورده شده‌اند.

همانند مسئله پیلهور این مسئله نیز در دسته مسائل NP-hard قرار می‌گیرد، ولی بسیار دشوارتر از مسئله پیلهور است [۱۳]. برای برخی حالات خاص مسئله، الگوریتم‌هایی که در زمانی منطقی جواب بهینه به دست می‌دهند ارائه شده‌اند؛ که از جمله می‌توان به مواردی که آورده می‌شوند اشاره نمود: وجود تمامی گره‌ها در امتداد یک خط راست [۱] و [۸] یا درخت با شعاع ۳ [۶]. هیلپورن و همکاران به مسئله در حالت وجود محدودیت پنج‌جره زمانی پرداخته‌اند [۱۱]. علاوه بر حالات اشاره شده چند الگوریتم بهینه برای حل مسئله طراحی شده‌اند [۷] و [۲۱].

قابل ذکر است که مدل‌های ریاضی ارائه شده برای این مسئله حتی در ابعاد متعارف (حدود ۱۵ گره و بیشتر) به سختی می‌توانند توسط حل کننده‌های عمومی و رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح همانند LINGO و Cplex حل شوند و نیازمند الگوریتم‌های دیگری چون شاخه و کران (انشعاب و تحدید) و برنامه‌ریزی پویا برای مسئله می‌باشدند.

در رابطه با الگوریتم‌های ابتکاری و فراتکاری برای حل مسئله می‌توان به مقاله صالحی‌پور و همکاران اشاره کرد [۱۴]. در این مقاله آن‌ها از GRASP+VNS برای حل مسئله در حالت متقارن بهره جسته و جواب‌های با کیفیت بسیار بالا برای مسائل تا اندازه ۱۰۰۰ گره تولید نمودند.

در این مقاله به دنبال آن هستیم تا با تکیه بر مدل‌سازی ریاضی و بهره‌گیری از حل کننده‌های عمومی و موجود بتوانیم رویکردی برای حل مسئله ارائه دهیم. در این راستا یک مدل ریاضی عدد صحیح آمیخته برای مسئله توسعه داده می‌شود که قالب برنامه‌ریزی خطی آن، که از رهاسازی محدودیت‌های متغیر عدد صحیح حاصل می‌شود، دارای جواب بهینه‌ای است که می‌تواند به عنوان حد پایین با کیفیت بسیار خوبی قلمداد شود. با استفاده از این راهبرد توانسته‌ایم مسائل تا اندازه ۲۵ گره را بدون نیاز به الگوریتم‌های خاص و تنها با بهره‌گیری از حل کننده‌های موجود همانند LINGO و Cplex و آن‌هم در زمان کوتاهی (۱۷ دقیقه به طور میانگین) به طور بهینه حل نماییم. این در حالی است که مدل‌های پیشین قادر به حل این مسائل حتی با گذشت چندین ساعت هم نبوده‌اند. در ادامه، مقاله به شرحی که می‌آید تدوین شده است. در بخش ۲ با شرح یک مثال مسئله به طور کامل تعریف می‌شود.



شکل ۱. دو مثال از تعمیرکار سیار با ۲ توالی متفاوت. توالی الف - ۱ دارای هدف بزرگتری نسبت به توالی ب - ۱ است

بازدید می‌کند، سپس گره ۲ و الی آخر، بنابراین توالی بازدید عبارت است از  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 0\}$ . همان‌طور که انتظار می‌رود تعمیرکار سیار می‌تواند توالی بازدید دیگری را انتخاب کند. برای مثال وی می‌تواند توالی نشان‌داده شده در شکل ب - ۱ را انتخاب کند  $\{0, 5, 1, 2, 4, 3, 0\}$ .

در مسئله تعمیرکار سیار به دنبال آن هستیم تا مجموع زمان‌های انتظار تمامی گره‌ها را حداقل نماییم. از آنجایی که مجموع زمان‌های انتظار گره‌ها وابسته به توالی بازدید آن‌ها توسط تعمیرکار هستند، بنابراین باید توالی گره‌ها با توجه به تابع هدف مذکور به دست آید.

در این مثال، شکل ۱ دو توالی بازدید را نشان می‌دهد. در توالی بازدید شکل الف - ۱ تعمیرکار (مستطیل سیاه‌رنگ) ابتدا گره ۱ را

$$F_{p_{1-\text{م}}} = \sum_{i=0}^n l_i = (7) + (7+5) + (7+5+7) + (7+5+7+9) + (7+5+7+9+4) + (7+5+7+9+4+3) = 133$$

$$F_{p_{2-\text{م}}} = \sum_{i=0}^n l_i = (3) + (3+2) + (3+2+5) + (3+2+5+6) + (3+2+5+6+9) + (3+2+5+6+9+9) = 93$$

$$F_p = \sum_{i=1}^n ((n+1)-i+1)c_{i-1,i} + c_{n,0} \quad (۳)$$

**۳. مدل‌سازی ریاضی مسئله در حالت یک تعمیرکار**  
در این بخش یک مدل ریاضی عدد صحیح آمیخته برای مسئله تعمیرکار سیار هنگامی که تنها یک تعمیرکار وجود دارد توسعه داده می‌شود. مدل توسعه داده شده نسبت به مدل‌های موجود دارای این برتری است که قالب برنامه‌ریزی خطی آن، که از رها سازی محدودیت‌های متغیر عدد صحیح حاصل می‌شود، دارای جواب بهینه‌ای است که می‌تواند به عنوان حد پایین با کیفیت بسیار خوبی قلمداد شود. این برتری سبب می‌شود بدون بهره‌گیری از الگوریتم شاخه و کران و تنها با بهره‌گیری از حل‌کننده‌های موجود و رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح بتوان مسائل تا اندازه ۲۵ گره را به طور بهینه و تا اندازه ۳۰ گره را حداقل اختلاف ۵٪ از حد پایین (بدیهی است که اختلاف از بهینگی به مرتب کمتر از این مقدار خواهد بود) حل نمود. مدل توسعه داده شده، تعمیم‌یافته مدل ارائه شده توسط فیسکتی و

با محاسبه تابع هدف دو توالی می‌توان نتیجه‌گیری نمود که توالی ب - ۱ دارای تابع هدف کمتری (بهتری) نسبت به توالی ب - ۲ است و بنابراین توالی ب - ۱ بر توالی ب - ۲ چیره است. با نشان‌دادن توالی بازدید گره‌ها در مسئله تعمیرکار سیار به صورت  $p = \{0, \dots, i, j, \dots, n, 0\}$  (شروع و پایان از گره صفر)، می‌توان رابطه‌ای ساده‌تر برای محاسبه تابع هدف مسئله تعمیرکار سیار توسعه داد (معادله ۳). بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید توالی بازدید به صورت  $p = \{0, 1, 2, \dots, n, 0\}$  است. در این صورت مجموع زمان‌های انتظار گره‌ها توسط معادله ۱ محاسبه خواهد شد:

$$F_p = \sum_{i=1}^n l_i \quad (۱)$$

$$l_i = \sum_{j=1}^{j \leq i} c_{j-1,j} \quad (۲)$$

که  $l_i = \sum_{j=1}^{j \leq i} c_{j-1,j}$  (معادله ۲)، با جایگزینی معادله ۲ در معادله ۱ و ساده‌سازی، معادله ۳ به وجود خواهد آمد که به مرتب دارای حجم محاسبات بسیار کمتری نسبت به معادله ۱ است.

$$\sum_{j=0}^n y_{j0} = 1 \quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^n y_{i0} - \sum_{j=0}^n y_{0j} = 1 - (n+1) \quad (11)$$

$$\sum_{i=0}^n y_{ik} - \sum_{j=0}^n y_{kj} = 1 \quad k = 1, \dots, n \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n y_{ij} = \sum_{t=1}^{n+1} t \quad (13)$$

$$y_{ij} \leq (n+1) \cdot x_{ij} \quad i, j = 0, \dots, n \quad (14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 0, \dots, n \quad (15)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad i, j = 0, \dots, n \quad (16)$$

$$\sum_{u=0}^n p_{ui} = 1 \quad i = 0, \dots, n \quad (17)$$

$$\sum_{i=0}^n p_{ui} = 1 \quad u = 0, \dots, n \quad (18)$$

$$p_{00} = 1 \quad (19)$$

$$\sum_{i=0}^n p_{ni} = 1 \quad (20)$$

$$\sum_{k=0}^n y_{jk} - (n+1 - (i+1)) \cdot p_{ij} \geq 0 \quad i, j = 0, \dots, n \quad (21)$$

$$p_{ui} \in \{0, 1\} \quad u, i = 0, \dots, n \quad (22)$$

محدودیتهای ۵ و ۶ برگرفته از مسئله تخصیص هستند و اطمینان حاصل می‌کنند که هر گره (جزء گره صفر) دقیقاً یکبار بازدید می‌شود. محدودیتهای ۷ و ۸ اطمینان حاصل می‌کنند که تعمیرکار بازدید را از گره صفر شروع کرده و آنرا با گره صفر خاتمه می‌دهد. محدودیتهای ۹ تا ۱۳ برگرفته از مسئله جریان در شبکه هستند.

وجود این محدودیتها در مدل ۱، مانع از شکل‌گیری زیرتورها در جواب می‌شوند و این به معنی تولید جواب امکان‌پذیر است (توالی بازدید). محدودیتهای ۱۴ متغیرهای  $y_{ij}$  را با متغیرهای  $x_{ij}$  مرتبط می‌کنند. محدودیتهای ۱۶ و ۱۷ الزام می‌کنند متغیرهای غیرمنفی هستند. بهطور کلی محدودیتهای ۱۷ تا ۲۲ دلالت بر چگونگی ترتیب بازدید گره‌ها در توالی دارند. در این بین، محدودیتهای ۱۷ و ۱۸ اطمینان حاصل می‌کنند که هر ترتیب بازدید در توالی تنها به یک گره می‌تواند تخصیص داده شود (به عبارت بهتر دو گره نمی‌توانند دارای یک ترتیب توالی باشند و هم‌زمان بازدید شوند) و بالعکس. الزام بازدید گره صفر به عنوان اولين و آخرین گره در توالی بازدید توسط محدودیتهای ۱۹ و

همکاران می‌باشد [۷] و با افزودن دسته‌ای از متغیرهای تصمیم صفر و یک و چندین محدودیت حاصل شده است. براساس تقسیم‌بندی بیکر و کلر از مدل‌های ریاضی عدد صحیح آمیخته برای مسائل زمان‌بندی [۲۰]، مدل توسعه شده در دسته مدل‌های ترکیبی قرار می‌گیرد (در ادامه در این خصوص بیشتر توضیح داده می‌شود). متغیرهای تصمیم و پارامترهای مدل به شرح زیر می‌باشند.

### ۱-۳. متغیرهای تصمیم

مقدار ۱ می‌گیرد اگر تعمیرکار از گره  $i$  به گره  $j$  سفر کند و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

مقدار  $1 - u + n$  می‌گیرد اگر گره  $j$  بعد از گره  $i$  در موقعیت  $u$  توالی توسط تعمیرکار بازدید شود و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد.

مقدار ۱ می‌گیرد اگر گره  $i$  در ترتیب  $u$  در توالی توسط تعمیرکار بازدید شود و در غیر این صورت مقدار صفر می‌گیرد. و گنر این متغیر را متغیر موقعیت توالی نامید [۲۰].

(۲۱)

### ۲-۳ پارامترها

گره  $i$  که  $i = 0, \dots, n$  با توجه به اینکه  $i$  به عنوان محل شروع تعمیرکار می‌باشد. پس تعداد کل گره‌ها  $n+1$  می‌باشد.

زمان انتظار گره  $i$ ، به طوری که  $t_0 = 0$ .

مقدار تابع هدف برای توالی  $F_p$

زمان سفر از گره  $i$  به گره  $j$ .

در این مدل (مدل ۱) فرض می‌شود گره صفر، مبدا یا نقطه شروع تعمیرکار سیار است.

### ۳-۳ مدل ۱

$$\text{Minimize } z = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n t_{ij} \cdot y_{ij} \quad (4)$$

Subject to

$$\sum_{i=0}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{0j} = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{0j} = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{j=0}^n y_{0j} = n+1 \quad (9)$$

آمیخته همانند Cplex و LINGO جواب بهینه را در مدت زمان بسیار کمی ارائه نماید.

**۴-۱. توسعه حدود پایین و بالا برای مسئله صالحی‌پور و همکاران** حدود پایین نسبتاً مناسبی را براساس حل بهینه مسئله کوتاهترین درخت گستردۀ ارائه نموده‌اند [۱۴]. علاوه بر کیفیت متوسط حد پایین آنها، افزایش اندازه مسئله باعث کاهش بیشتر کیفیت این حد پایین می‌شود. براساس بررسی‌های نویسنده‌گان مقاله حاضر، دلیل اصلی کیفیت متوسط حد پایین صالحی‌پور و همکاران در این است که برخلاف مسئله تعمیرکار سیار، لزوماً جواب بهینه مسئله کوتاهترین درخت گستردۀ یک تور نمی‌باشد و بنابراین گره‌ها می‌توانند بیشتر از یکبار نیز دیده شوند. بنابراین انتظار می‌رود اگر بتوان حد پایین را براساس شکل‌گیری یک تور توسعه داد، دارای کیفیت به مرتب بالاتری باشد. به دنبال این ایده، در این مقاله حد پایین براساس حل بهینه مسئله پیله‌ور توسعه داده‌می‌شود. براساس نتایج محاسباتی ارائه شده در بخش ۵ این حد پایین دارای کیفیت بسیار بالاتر و قابل قبولتری نسبت به حد پایین صالحی‌پور و همکاران [۱۴] است. به علاوه همان‌طور که نتایج محاسباتی نشان می‌دهد با افزایش اندازه مسئله افت محسوسی در کیفیت این حد پایین مشاهده نمی‌شود.

جهت محاسبه حد پایین مذکور، ابتدا مسئله پیله‌ور را بهطور بهینه حل می‌نماییم. سپس پس از مرتب‌کردن سویه‌های ظاهر شده در تور بهینه بهترتبیب صعودی، هر سویه را در وزنی متناظر با آنچه برای هر سویه در مسئله تعمیرکار سیار تعریف می‌شود (معادله ۳) ضرب می‌کنیم. در این صورت کوتاهترین سویه در بزرگترین وزن، دومین کوتاهترین سویه در دومین بزرگترین وزن و الی آخر ضرب می‌شوند. براساس اثبات ارائه شده در پیش قضیه ۲، حاصل جمع این حاصل ضرب یک حد پایین برای مسئله تعمیرکار سیار خواهد بود.

**پیش‌قضیه ۲.** فرض کنید  $t = t_1, t_2, \dots, t_n, t_i \in E$  سویه‌های ظاهر شده در تور بهینه مسئله پیله‌ور هستند که بهترتبیب صعودی مرتب شده‌اند، بنابراین  $t_i \leq t_j$  iff  $i < j$ . یک حد پایین برای مسئله توسط معادله ۲۴ به دست خواهد آمد.

$$LB = \sum_{i=1}^{n+1} ((n+1) - i + 1) w(t_i) \quad (24)$$

که در آن  $w(t_i)$  وزن سویه  $t_i$  می‌باشد. اثبات. فرض کنید که جواب بهینه مسئله تعمیرکار سیار توالی  $p^* = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, r_i \in E$  ارائه شده‌است. مقدار تابع هدف این توالی برای مسئله تعمیرکار سیار عبارت است از  $f(p^*) = \sum_{i=1}^{n+1} ((n+1) - i + 1) w(r_i)$  با توجه به اینکه

۲۰ تامین می‌شود. محدودیت‌های ۲۱ متغیرهای  $y_{ij}$  را با متغیرهای  $p_{ui}$  مرتبط می‌کنند. محدودیت‌های ۲۲ اطیمانان حاصل می‌کنند که متغیرهای  $p_{ui}$  از نوع متغیرهای صفر و یک هستند. در مدل ۱ متغیر تصمیم  $p_{ui}$  به منظور افزایش کارایی مدل به آن افزوده شده است. اگر چه این مدل می‌تواند برای مسائل تا اندازه ۲۰ گره در زمانی منطقی جواب بهینه بدست دهد، ولی در خاصیت ۱ نشان می‌دهیم که چگونه مدل ۱ می‌تواند بهبود یابد و ضمن حل بهینه مسائل تا اندازه ۲۵ گره، زمان حل را نیز به طور چشم‌گیری کاهش دهد.

**خاصیت ۱.** محدودیت‌های ۲۱ در مدل ۱ می‌توانند توسط محدودیت‌های بسیار کاراتری جایگزین شوند. این محدودیت‌های جدید عبارتند از  $\sum_{k=0}^n x_{ik} - \sum_{u=0}^n p_{ui} \geq 0, \forall i$ . افزودن این دسته محدودیت‌ها به همراه رهاسازی محدودیت‌های متغیر عدد صحیح منجر به یک قالب برنامه‌ریزی خطی می‌شود که جواب بهینه‌ی آن می‌تواند به عنوان حد پایین با کیفیت بالاتری نسبت به حد پایین قبلی قلمداد شود و بنابراین منجر به بهبود مدل ۱ شود.

اثبات. تامین محدودیت‌های ۲۱ که ارتباط‌دهنده بین متغیرهای  $p_{uj}$  و  $y_{ij}$  هستند بسیار دشوار است. از طرفی این محدودیت‌ها، از نوع محدودیت‌های الزاماً <sup>۱</sup> هستند. بنابراین با توجه به تابع هدف مسئله که از نوع حداقل‌سازی است، رهاسازی این محدودیت‌ها منجر به توسعه حدود پایین برای مسئله می‌شود. از طرفی برقراری ارتباط بین متغیرهای  $y_{ij}$  و  $p_{uj}$  را می‌توان از طریق برقراری ارتباط بین متغیرهای  $x_{ij}$  و  $y_{ij}$  (محدودیت‌های ۱۴) و برقراری ارتباط بین متغیرهای  $x_{ij}$  و  $p_{uj}$  (محدودیت‌های ۲۱) تامین نمود. بنابراین محدودیت‌های ۲۱ می‌توانند به راحتی توسط محدودیت‌های ۲۳ جایگزین شوند.

$$\sum_{k=0}^n x_{ik} - \sum_{u=0}^n p_{ui} \geq 0 \quad i = 0, \dots, n \quad (23)$$

#### ۴. رویه توسعه داده شده برای حل مسئله تعمیرکار سیار

در این بخش رویه توسعه داده شده برای حل مسئله تعمیرکار سیار در حالت وجود یک تعمیرکار، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این رویه شامل بهره‌گیری از حدود بالا و پایین و یک الگوریتم شاخه و کران می‌باشد. لازم به ذکر است که این رویه حل برای حل مسائل بزرگتر از ۲۵ گره مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای حل مسائل تا اندازه ۲۵ گره، مدل ۱ برای اولین بار توانسته است با بهره‌گیری از حل کننده‌های عمومی و رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح

<sup>۱</sup> Binding

براساس نتایج محاسباتی ارائه شده توسط صالحی‌پور و سپهری [۱۵]، این رویه که به عنوان یکی از توانمندترین الگوریتم‌های ابتکاری حل مسئله تعمیرکار سیار مطرح می‌باشد، بسیار کارا بوده به طوری که برای ۳۶ مسئله (از ۴۰ مسئله) که به طور بهینه قابل حل هستند، جواب بهینه ارائه نموده است. بنابراین، با توجه به مشاهدات گزارش شده انتظار می‌رود رویه مذکور بتواند برای مسائل بزرگ‌تر نیز حدود بالا را با کیفیت بسیار مطلوبی تولید نماید.

#### ۴-۲. الگوریتم شاخه و کران

به منظور حل مسائل بزرگ‌تر تا اندازه ۳۰ گره از یک الگوریتم شاخه و کران مبتنی بر عمق جستجو بهره‌گیری شده است. درخت الگوریتم براساس ترتیب بازدید گره‌ها توسط تعمیرکار سیار، تشکیل می‌شود.

به عنوان مثال اگر در سطح ۱ از درخت باشیم (شروع از گره صفر در سطح صفر) و گره ۲ تحت بررسی باشد، بدان معنی است که گره ۲ اولین گره‌ای است که بعد از گره صفر بازدید می‌شود. از حدود بالا و پایین توسعه داده شده در بخش قبل، به منظور تحدید و مسدود کردن گره‌های درخت استفاده شده است. علاوه بر این حدود، در هر گره از درخت استراتژی نگاه به جلو به کار گرفته می‌شود تا سرعت الگوریتم افزایش یابد. به کارگیری این استراتژی این امکان را فراهم می‌کند که قبل از پیمودن شاخه‌های درخت، بسیاری از آنها مسدود شوند. به طور خلاصه در هر گره از درخت دو مقدار محاسبه می‌شود: مقدار اول تابع هدف تا گره مذکور است (بنابراین بخشی از توالی بازدید تولید شده است) و مقدار دوم تخمینی از تابع هدف گره‌های باقی‌مانده است. بنابراین مقدار دوم تخمینی روی کم‌هزینه‌ترین توالی بازدید گره‌های باقی‌مانده است (حضور این گره‌ها در کنار گره‌های جستجو شده، جواب امکان‌پذیر برای مسئله را سبب می‌شوند). پرواضح است که محاسبه این مقدار بهمنزله به کارگیری استراتژی نگاه به جلو است. پس از محاسبه این دو مقدار در هر گره، حاصل جمع آن‌ها با حد بالا مقایسه می‌شود و در صورتی که از حد بالا بیشتر شود آن گره مسدود می‌شود و الگوریتم از گره باز دیگر کار را ادامه می‌دهد. این فرآیند آنقدر تکرار می‌شود که تمامی گره‌های هر شاخه مسدود شوند، و یا شاخه‌ای که هیچ‌یک از گره‌های آن مسدود نشده است، مشخص شود (جواب بهینه). قابل توجه است که در حین پیشرفت الگوریتم و جستجوی گره‌ها، حد بالا نیز به روز آوری می‌شود و در صورتی که شاخه‌ای که هیچ‌یک از گره‌های آن مسدود نشده است دارای مقدار تابع هدف کمتری نسبت به حد بالا باشد، حد بالا به این مقدار جدید کاهش می‌یابد.

*t* به عنوان توالی بهینه مسئله پیلور است، این بدان معنی است که مسیری که هر دو گره دلخواه در این تور را به یکدیگر متصل می‌کند و از گره‌های مابین نیز عبور می‌کند، کوتاهترین مسیر ممکن بین آن دو گره می‌باشد. از طرفی هنگامی که سویه‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم دیگر توالی حاصل شده لزوماً یک تور نخواهد بود. به علاوه همواره مجموع وزنی *i* کوتاهترین سویه که تشکیل تور نمی‌دهند از مجموع وزنی هر مجموعه *i* سویه دیگر که تور تشکیل می‌دهند کمتر خواهد بود. با توجه به اینکه *i* سویه در تعمیرکار سیار منجر به یک تور می‌شوند لذا:

$$\sum_{j=1}^i w(t_j) \leq \sum_{j=1}^i w(r_j) \quad (25)$$

که اگر حاصل جمع را نیز محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^i w(t_j) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^i w(r_j) \quad (26)$$

و پس از ساده‌سازی خواهد شد:

$$\sum_{i=1}^{n+1} ((n+1) - i + 1) w(t_i) \leq \sum_{i=1}^{n+1} ((n+1) - i + 1) w(r_i) \quad (27)$$

بنابراین می‌توان از جواب بهینه مسئله پیلور به منظور توسعه حد پایین با کیفیت بسیار خوب برای مسئله تعمیرکار سیار بهره جست. شایان ذکر است که بررسی‌های انجامشده توسط نویسنده‌گان نشان از کیفیت بالای این حد پایین دارد. علی‌رغم دشواری و پیچیدگی محاسباتی مسئله پیلور، پیشرفت‌های قابل توجهی در حل این مسئله به وجود آمده است.

در این راستا با بهره‌گیری از حل کننده‌های رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته همانند Cplex می‌توان به سهولت مسائل تا اندازه ۵۰ گره را در مدت زمان چند ثانیه با کمک رایانه شخصی حل نمود. برای حل مسائل بزرگ‌تر می‌توان از نرم‌افزار concorde که خاص حل بهینه مسئله پیلور تهیه شده است و به صورت رایگان در دسترس است بهره جست (این نرم‌افزار حتی قادر است مسائل تا اندازه ۲۰۰ گره را در کمتر از چند ثانیه به کمک رایانه شخصی به طور بهینه حل نماید).

در کنار حدود پایین، توسعه حدود بالا نیز می‌توانند به حل مسئله تعمیرکار سیار کمک کنند. در این راستا سیمجه‌لوی و بمن [۱۸] حدود بالا را با استفاده از الگوریتم ابتکاری نزدیکترین جستجوی همسایگی به دست آورده‌اند. در این مقاله حدود بالا را بهره‌گیری از رویه ابتکاری صالحی‌پور و سپهری [۱۵] که به مراتب پیچیده‌تر و کاراتر از الگوریتم ابتکاری نزدیکترین جستجوی همسایگی می‌باشد، به دست می‌آوریم.

محدودی تعريف شوند. حل‌کننده مورد استفاده در این مقاله جهت حل مدل ۱ Cplex نسخه ۱۱.۲ است. الگوریتم شاخه و کران توسعه داده شده نیز در محیط نرمافزار MATLAB کدنویسی شده است. رایانه‌ای که برای حل مسائل از آن بهره‌برداری شده است دارای پردازنده ۳ گیگاهرتز و حافظه ۵۱۲ مگابایت می‌باشد. کلیه نتایج محاسباتی در قالب دو جدول (جدول ۲ و ۳) آورده شده‌اند. جدول ۲ نتایج محاسباتی مربوط به مسائل دسته اول را نشان می‌دهد. بهمنظور نشان‌دادن برتری مدل ۱، نتایج آن را با نتایج حاصل از حل مدل ریاضی ارائه شده توسط فیسکتی و همکاران [۷] مقایسه نموده‌ایم. علاوه بر این دو مدل ریاضی، نتایج حاصل از بهکارگیری الگوریتم شاخه و کران نیز نشان داده شده است. بنابراین در مجموع ۳ رویکرد مختلف (یک الگوریتم شاخه و کران و ۲ مدل ریاضی) برای حل ۶۰ مسئله در ۶ اندازه مختلف بررسی شده‌اند. برای هر رویکرد ۶ مقدار شامل حداقل، میانگین و حداکثر زمان محاسباتی و حداقل، میانگین وحداکثر اختلاف، نشان داده شده است. حد بالای زمان مجاز محاسباتی برای تمامی رویکردها و مسائل ۱ ساعت در نظر گرفته شده است.

## ۵. نتایج محاسباتی

بهمنظور نشان‌دادن توانایی مدل ۱ در حل مسائلی که تاکنون توسط حل‌کننده‌های عمومی و رایج مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته قابل حل نبوده‌اند و همچنان نشان‌دادن توانایی الگوریتم شاخه و کران و حدود توسعه داده شده، در این بخش عملکرد آن‌ها روی دو دسته مسائل مطالعه قرار می‌گیرند. در هر دو دسته مسائل، هزینه‌های (زمان / فاصله) سفر بین هر دو گره بهصورت تصادفی با استفاده از توزیع یکنواخت تولید شده‌اند. دو پارامتر توزیع یکنواخت برای دسته اول به ترتیب ۱ و ۵۰ (بین [۱،۵۰]) و برای دسته دوم به ترتیب ۱ و ۸ (بین [۱،۸]) می‌باشند. همان‌طور که نتایج محاسباتی نشان می‌دهند برای مسائل دسته دوم که هزینه‌های سفر بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشند (در حقیقت پراکنده‌گی گره‌ها کم است) مدل ۱ می‌تواند مسائل تا اندازه ۱۰۰ گره را بهطور بهینه حل کند. این در حالی است که مدل‌های موجود نمی‌توانند حتی مسائل تا اندازه ۲۰ گره را نیز بهطور بهینه حل نمایند. قابل توجه است که در بسیاری از مسائل دنیای واقعی، شرایط حاکم بر مسئله سبب می‌شوند هزینه‌های سفر بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و در یک بازه

جدول ۲. نتایج محاسباتی مسائل دسته اول

مسئله	اندازه	الگوریتم شاخه و کران									
		حداقل	میانگین	حداکثر	حداقل	میانگین	حداکثر	حداقل	میانگین	حداکثر	حداقل
۳۱۹.۹۷	۱۰	۳۱۹.۹۷	۱۸۲.۹۱	۱۸۴.۳۶	۱۳.۶۶	۹۰.۳۴	۳.۹۸	۵.۹۳	۲.۵۶	۱.۹۳	زمان (ثانیه)
.	اختلاف (%)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
۳۶۰۰	۱۵	۲۹۹۰.۵۷	۵۱۱.۶۱	۱۷۵.۵۸	۶۷.۱۸	۳۲.۲۲	۲۴.۱۴	۱۴.۲۵	۹.۱۴	زمان (ثانیه)	زمان (ثانیه)
۲۷.۷۲	۱۸	۱۲.۲۸	.	.	.	.	.	.	.	.	اختلاف (%)
۳۶۰۰	۲۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۲۵۵.۶۳	۹۱۰.۱۸۷	۳۵.۵۲	۴۸.۶۲	۴۳.۰۹	۲۲.۰۹	زمان (ثانیه)	زمان (ثانیه)
۴۱.۲۲	۲۵	۳۱.۷۶	۱۳.۹۷	.	.	.	.	.	.	.	اختلاف (%)
۳۶۰۰	۳۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۸۲۹.۷۸	۳۰.۳۰	۸۵.۱۹	۱۹۹.۴۱	۱۱۳.۹۸	۶۵.۱۴	زمان (ثانیه)	زمان (ثانیه)
۵۱.۸۸	۳۵	۴۲.۲۹	۴۰.۹۷	.	.	.	.	.	.	.	اختلاف (%)
۳۶۰۰	۴۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۱۴۷۸.۲۳	۹۹۰.۰۵	۳۸۸.۲۲	۳۰.۱۱	۲۶۷.۰۱	۱۲۱.۱۵	زمان (ثانیه)	زمان (ثانیه)
۵۷.۱۸	۴۵	۵۰.۷۲	۴۴.۲۳	.	.	.	.	.	.	.	اختلاف (%)
۳۶۰۰	۵۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۲۶۳۴.۶۶	۲۱۱۳.۰۷	۶۱۲.۳۹	۴۳۸.۵۶	۲۳۴.۹	زمان (ثانیه)	زمان (ثانیه)
۸۶.۰۹	۵۵	۵۴.۶۴	۴۴.۸۸	۴.۵۶	۰.۸۶	.	.	.	.	.	اختلاف (%)

مسائل بزرگتر از ۳۰ گره، از این الگوریتم برای حل مسائل دسته دوم بهره گرفته نشده است. همانند مسائل دسته اول، در اینجا نیز حد بالای زمان محاسباتی برای هر یک از دو مدل ریاضی و تمامی مسائل ۱ ساعت در نظر گرفته شده است. همان‌طور که با دقیق در این جدول می‌توان دریافت مدل ۱ بسیار توانمند در حل بهینه این دسته مسائل است، در حالی که توانایی مدل فیسکتی و همکاران [۷] تغییری نکرده است و همچنان نمی‌تواند حتی مسائل با اندازه ۲۰ گره را نیز بهطور بهینه حل نماید.

جدول ۳ نتایج مربوط به مسائل دسته دوم را نشان می‌دهد. در اینجا نیز از نتایج حاصل از حل مسائل نمونه توسط مدل فیسکتی و همکاران [۷] بهره گرفته شده است. برای این دسته مسائل ۱۰۰ مسئله در ۱۰ اندازه مختلف حل شده‌اند و همانند جدول ۲، برای هر یک از دو مدل ریاضی بررسی شده ۶ مقدار شامل حداقل، میانگین وحداکثر زمان محاسباتی و حداقل، میانگین و حداکثر اختلاف، نشان داده شده است. لازم بهذکر است که با توجه به توانمندی مدل ۱ و عدم توانایی الگوریتم شاخه و کران در حل

جدول ۳. نتایج محاسباتی مسائل دسته دوم

مسئله	اندازه	مدل فیسکتی و همکاران (۱۹۹۳)				مدل ۱			
		حداکثر میانگین	حداقل میانگین	حداکثر حداقل	حداکثر میانگین	حداقل میانگین	حداقل حداقل	حداقل حداقل	حداقل حداقل
۱.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۴۳.۱۶	۱۹۰.۷۵	۱۳۴۴	۳.۲۷	۲.۳۲	۱.۵۹	۱.۵۹	۱.۵۹
۲.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۱۳۴۹.۱	۴۷۱.۲۲	۵۴.۱۶	۵۴.۱۶	۵۴.۱۶
۳.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰.۶	۲۶۲۲.۲	۳۰.۴۵	۳۰.۴۵	۳۰.۴۵
۴.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۱۹.۲	۱۶۴۱	۵۵.۱۱	۵۵.۱۱	۵۵.۱۱
۵.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۱.۱	۱۳۸۷.۶	۹۸.۰۵	۹۸.۰۵	۹۸.۰۵
۶.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۲	۹۸۰.۴۴	۱۹۳.۶۹	۱۹۳.۶۹	۱۹۳.۶۹
۷.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۱۲۰۰.۱	۶۵۴.۲۷	۲۸۰.۱۹	۲۸۰.۱۹	۲۸۰.۱۹
۸.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۱۱۹۴.۶	۳۲۱.۴۷	۳۲۱.۴۷	۳۲۱.۴۷
۹.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۲۹۲۵.۱	۲۱۰۷.۱	۲۱۰۷.۱	۲۱۰۷.۱
۱۰.	زمان (ثانیه) اختلاف (%)	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۳۶۰۰	۲۹۶۱	۱۲۴۵	۱۲۴۵	۱۲۴۵
		۰.۹۶	۰.۸۹	۰.۸۴	۰.۰۴	۰.۰۰۷	۰.	۰.	۰.

## مراجع

- [1] Afrati, F., Cosmadakis, S., Papadimitriou, C.H., Papageorgiou, G. and Papakostantinou, N., “The Complexity of the Traveling Repairman Problem”, Theoretical Informatics and Applications, Vol 20, 1986, pp. 79–87.
- [2] Baker, K., R., Keller, B., “Solving the Single-Machine Sequencing Problem using Integer Programming”, Computers & Industrial Engineering, Vol. 59, 2010, pp. 730–735.
- [3] Bianco, L., Mingozzi, A., Ricciardelli, S., “The Travelling Salesman Problem with Cumulative Costs”, Networks, Vol. 23, No. 2, 1993, pp. 81–91.
- [4] Braysy, O., Gendreau, M., “Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part I Route Construction and Local Search Algorithms”, Transportation Science, Vol. 39, No. 1, 2005a, pp. 104–118.
- [5] Braysy, O., Gendreau, M., “Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part II: Meta-Heuristics”,

## ۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله تعمیرکار سیار که یک مسئله مسیریابی مشتری‌گرا است مطالعه شده است. اهمیت مطالعه مسئله را می‌توان در بهینه‌سازی معیار کاهش زمان‌های انتظار خصوصاً در سیستم‌های خدماتی عنوان نمود. بهمنظور حل مسئله ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته توسعه داده شد که می‌تواند مسائل تا اندازه ۲۵ گره را در زمان کوتاهی و آن‌هم تنها با بهره‌گیری از حل‌کننده‌های عمومی و رایج، بهطور بهینه حل نماید.

بهمنظور حل مسائل بزرگ‌تر تا اندازه ۳۰ گره از یک الگوریتم شاخه و کران و بهکارگیری حدود پایین و بالا در آن بهره‌گیری شد.

نتایج محاسباتی و مقایسه آن با نتایج حاصل از مدل‌های موجود نشان از توانایی بسیار بالای مدل ارائه شده و حدود ارائه شده در حل بهینه مسائل دارد، بهطوری‌که مدل توسعه داده شده می‌تواند مسائل تا اندازه ۱۰۰ گره را هنگامی که هزینه‌های سفر نزدیک به یکدیگر باشند بهطور بهینه حل نماید.

- [19] Toth, P., Vigo, D., “*The Vehicle Routing Problem*”, Philadelphia: SIAM, 2001.
- [20] Wagner, H.M., “*An Integer Programming Model for Machine Scheduling*”, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 6, 1959, pp. 131–140.
- [21] Wu, B.Y., Huang, Z.N., Zhan, F.J., “*Exact Algorithms for the Minimum Latency Problem*”, Information Processing Letters, Vol. 92, 2004, pp. 303–309.
- [22] Zambito, L., “*The Traveling Salesman Problem: A Comprehensive Survey*”, Private communication, 2006.
- [6] Blum, A., Chalasani, P., Coppersmith, D., Pulleyblank, B., Raghavan, P., Sudan, M., “*The Minimum Latency Problem*”, In: Proceedings of the 26th annual symposium on Theory of Computing (STOC), 1994, pp. 163–171.
- [7] Fischetti, M., Laporte, G., Martello, S., “*The Delivery Man Problem and Cumulative Matroids*”, Operations Research, Vol. 41, No. 6, 1993, pp. 1065–1064.
- [8] Garcia, A., Jodra, P., Tejel, J., “*A Note on the Traveling Repairman Problem*”, Networks, Vol. 40, No. 1, 2002, pp. 27–31.
- [9] Golden, B., Raghavan, S., Wasil, E., (Eds.), “*The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*”, Springer, 2008.
- [10] Gutin, G., Punnen, A.P., (Eds.), “*The Traveling Salesman Problem and Its Variations*”, Kluwer, 2002.
- [11] Heilporn, G., Cordeau, J. F., Laporte, G., “*The Delivery Man Problem with time windows*”, Discrete Optimization, Vol. 7, 2010, PP. 269–282.
- [12] Picard, J.C., Queyranne, M., “*The Time-Dependent Traveling Salesman Problem and its Application to the Tardiness Problem in One-Machine Scheduling*”, Operations Research, Vol. 21, 1978, pp. 86–110.
- [13] Sahni, S., Gonzales, T., “*P-Complete Approximation Problems*”, Journal of the ACM, Vol. 23, No. 3, 1976, pp. 555–565.
- [14] Salehipour, A., Goos, P., Sorensen, K., Braysy, O.. “*The Traveling Repairman Problem*”, In: Proceedings of ORBEL 21, Luxembourg, 2007.
- [15] Salehipour, A., Sepehri, M.M., “*Solution for Large Scale Traveling Repairman Problem*”, Working Paper, 2010a.
- [16] Salehipour, A., Sepehri, M.M., “*A New Mixed-Integer Programming Formulation for Locating Workstations in Tandem Automated Guided Vehicle Systems*”, Journal of Manufacturing Systems, Under review, 2010b.
- [17] Salehipour, A., Sepehri, M.M., “*Minimizing Total Waiting Time in the Blood Products Distribution Problem*”, Working Paper, 2010c.
- [18] Simchi-Levi, D., Berman, O., “*Minimizing the Total Flow Time of n Jobs on a Network*”, IIE Transactions, Vol. 23, No. 3, 1991, PP. 236–244.