

# NUMERICAL SIMULATION OF AXISYMMETRIC SUPERSONIC VISCOUS FLOW OVER BLUNT CONE BY USING DIAGONAL FOURTH ORDER FINITE DIFFERENCE METHOD

M.M. Rashidi

Associate professor, Bu-Ali Sina University,  
Faculty of Engineering, Department of  
Mechanical Engineering,  
mm\_rashidi@yahoo.com

M. Moradi Bastani

MSC, Bu-Ali Sina University  
Faculty of Engineering, Department of  
Mechanical Engineering,  
m2\_bastani@yahoo.com

**Abstract:** In this paper, by using diagonal fourth order central difference method and TLNS equations, the numerical solution of the steady viscous supersonic axisymmetric flow is implemented over blunt cone with shock-fitting method. Because of using high order terms of Taylor series in discretization of derivation, this method has high accuracy and low numerical error (dispersion error) with respect to low order method. Boundary-closure scheme has an important role in stability of this method. By Using coarse grid in this method, the results of numerical solution is very close to fine grid of implicit second order (Beam & Warming) method. High accuracy of this method is more visible than second order method when the grid is being fined. The convergence rate of this method is higher than second order method. This method can be converged to the machine accuracy.

## شبیه‌سازی عددی جریان تقارن محوری مافوق صوت لزج بر روی دماغه سرپخ با استفاده از روش اختلاف محدود مرتبه چهارم قطری شده

محمد مهدی رشیدی و مجید مرادی باستانی

**چکیده:** در این مقاله با استفاده از روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم قطری شده و معادلات ناویر-استوکس لایه-نازک (TLNS)، جریان تقارن محوری، دائم و لزج در رژیم مافوق صوت به صورت برآش شوک (Shock-Fitting) حول مخروط سرپخ شبیه‌سازی شده است. به علت استفاده از عبارت‌های مرتبه بالای بسط سری تیلور در انفال عددی مشتقه، این روش نسبت به روش‌های مرتبه پایین دارای دقیق‌تر و نیز خطاهای عددی (خطای پراکندگی) کمتر می‌باشد. چگونگی انفال عددی مشتقه در روی مرزها و نقاط مجاور آن در پایداری این روش نقش بسزایی دارد. با استفاده از این روش در یک شبکه نسبتاً درشت، می‌توان نتایجی بسیار نزدیک به نتایج شبکه ریز روش "بیم-وارمینگ" که دارای دقیق‌تر مرتبه دوم است، به دست آورد. با ریز شدن شبکه در این روش، دقیق‌تر بالای آن نسبت به روش "بیم-وارمینگ" محسوس‌تر خواهد شد. لازم به ذکر است که

تاریخ وصول: ۸۵/۱۰/۱۰

تاریخ تصویب: ۸۷/۱۲/۲۷

دکتر محمد مهدی رشیدی، دانشیار گروه مکانیک دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه بوعالی سینا همدان mm\_rashidi@yahoo.com

مجید مرادی باستانی، کارشناسی ارشد تبدیل انرژی دانشگاه بوعالی سینا همدان m2\_bastani@yahoo.com

سرعت همگرایی این روش نسبت به روش "بیم-وارمینگ" بیشتر می‌باشد. این روش قابلیت همگرایی تا دقت ماشین (Machine Accuracy) را نیز دارد.

### واژه‌های کلیدی: معادلات TLNS، روش مرتبه چهارم قطری، جریان مافوق صوت لزج، برآش شوک

روابط معادلات حاکم از قبیل عبارت‌های شار لزج، غیرلزج، متريکها، ماتریس‌های حل‌کننده و جملات اتفال مصنوعی و ... بایستی به صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم منفصل شوند. انفال عددی مشتقات در نقاط مرزی و نزدیک آنها نقش مهمی در پایداری حل عددی دارد، بطوريکه در برخی موارد بایستی به منظور پایداری حل، دقت روش در این نقاط پایین آورده شود.

با توجه به اينکه روش‌های تفاضل مرکزی ذاتاً دارای خطاهای پراکندگی (Dispersion Error) می‌باشند، بنابراین به منظور کم کردن دامنه نوسانات ناشی از حل عددی، بایستی عبارت‌های اتفال مصنوعی به معادلات انفصالي این روش‌ها اضافه شود [۱۰]. از آنجایی که در انفال عددی مشتقات به صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم، از عبارت‌های مرتبه بالای بسط سری تیلور استفاده می‌شود، بنابراین مقدار خطایی که به صورت پراکندگی وارد حل می‌گردد، کوچک‌تر است و از اين‌رو می‌توان نتایجی با دقت بالاتر ارائه کرد. یکی از متغیرهای جریان که نسبت به مرتبه دقت روش بسيار حساس است و کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد، دمای روی سطح (در حالت آدياباتيک) می‌باشد. علت استفاده از روش برآش شوک نيز در اين است که متغیرهای جریان به خصوص دمای روی سطح دارای دقت بالاتری نسبت به روش تسخیر شوک می‌باشند. در روش برآش شوک، محل شوک به عنوان مرز خارجي ميدان حل قرار می‌گيرد، بنابراین خطاهایی که در روش تسخیر شوک به واسطه نوسانات حل در محل شوک بوجود می‌آيد، وارد مسئله نمي‌شود و اين روش دارای دقت بالاتری می‌باشد.

يکی از مزیت‌های روش مرتبه چهارم نسبت به روش‌های متداول که عموماً مرتبه دو هستند، اين است که در ميدان حل عددی به تعداد نقاط کمتری نيازنده‌اند، بدین ترتيب که با استفاده از اين روش در يك شبکه نسبتاً درشت، می‌توان نتایجی بسيار نزدیک به نتایج شبکه ريز روش‌های متداول و با دقتی برابر با آنها به دست آورد. لازم به ذکر است که سرعت همگرایی اين روش در يك شبکه درشت، بسيار بيشتر از روش‌های متداول در يك شبکه ريز است. در اين روش با ريز شدن شبکه، دقت بالاي روش محسوس‌تر می‌شود؛ بدین ترتيب که شبکه کاهش خطأ نسبت به روش‌های معمولی بيشتر می‌باشد. نکته مهم ديگر در اين روش، قابلیت همگرایی آن تا دقت ماشين می‌باشد.

به منظور تأييد صحت محاسبات، روش مرتبه چهارم مورد مطالعه با روش "بیم-وارمینگ" که روشی با دقت مرتبه دوم است و به عنوان حل پایه مورد قبول واقع شده است [۱۱]، مقایسه می‌شود.

### ۱. مقدمه

مسلمانًا يكی از خصوصیات مهم روش‌های عددی که از سوی محققین پیشنهاد شده است، دقت آنها در تقریب عددی معادلات حاکم می‌باشد. دقت روش‌هایی که در شبیه‌سازی عددی جریان‌های مغشوش، جریان‌های تراکم‌پذیر، بررسی لایه‌های مرزی گذرا و دینامیک گردابه‌ها و ... بکار می‌رond، بسیار مهم می‌باشد. در سال ۱۹۹۲ گروهی از روش‌های تفاضل محدود مرتبه بالا با دقت بسیار خوبی توسط لی لی [۱] ارائه شد. اهمیت روش‌هایی با دقت مرتبه بالا باعث توسعه انواع روش‌های تقریبی مرتبه بالا و بررسی جامع آنها شد [۲]. در بين روش‌هایی با دقت مرتبه بالا، روش تفاضل محدود مرکزی فشرده (Compact) برای حل عددی جریان‌های تراکم‌پذیر با استفاده از لزجت مصنوعی و فیلترهای عددی در روش تسخیر شوک مورد توجه قرار گرفت [۳-۵]. در اين روش‌ها، از تعداد نقاط كمتر با دقت بالاتر نسبت به پهنانی بازه مشابه در حل ميدان جریان استفاده می‌شود؛ بدین ترتيب که از ترکيب خطی مقادير تابع در سه (يا چند) نقطه متوالی برای تقریب خطی مقادير مشتق تابع در همان سه (يا چند) نقطه با دقت مرتبه بالاتر استفاده می‌شود.

زونگ برای شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) لایه‌مرزی ماورای صوت گذرا بر روی يك دماغه با شوک کمانی قوى از يك روش تفاضل محدود برآش شوک با دقت مرتبه بالا استفاده کرد [۶ و ۷]. با توجه به حالت مغشوش جریان و نيز لایه‌مرزی گذرا، استفاده از روش با دقت مرتبه بالا بسیار لازم می‌باشد.

در سال‌های اخير محققان با ترکيب روش‌های تفاضل محدود مرتبه بالا با روش‌هایی نظير TVD، Roe ENO و ... به بررسی معادلات مدل پرداخته‌اند. در مرجع [۸] با استفاده از ترکيب روش ENO و روش تفاضل محدود فشرده بالادست مرتبه پنجم، نوسانات غيرفيزيکي به وجود آمده در حل معادله اويلر يك بعدی بررسی شده است. در سال ۲۰۰۷، كوستا و همكارش با استفاده از روش WENO و ترکيب آن با روش تفاضل مرکزی مرتبه بالا به حل مسایل بقائي غيرخطي پرداختند. آنها معادله غيردائم اويلر يك بعدی را با ترکيب روش تفاضل محدود WENO مرتبه پنچ و تفاضل محدود مرکزی مرتبه شش (روش هيبريد) مورد بررسی قرار دادند [۹].

در اين تحقيق با استفاده از روش تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم و نيز به كمک روش قطری (Diagonal)، به حل عددی معادلات TLNS در حالت تقارن‌محوری لزج به صورت برآش شوک پرداخته می‌شود. در اين روش تمامی مشتقات مورد استفاده در

$$\mathbf{T} = (yJ)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(u_\eta\eta_y + v_\eta\eta_x) \\ 2\mu v_\eta\eta_y - 2\mu v/y \\ \mu u(u_\eta\eta_y + v_\eta\eta_x) + (2/3)\mu \\ (2v_\eta\eta_y - u_\eta\eta_x) - \\ (2/3)\mu v^2/y + \gamma\mu \text{Pr}^{-1} e_\eta\eta_y \end{pmatrix} \quad (4)$$

مؤلفه‌های غیرفیزیکی جریان (پادوردا)  $U$  و  $V$  در دامنه محاسباتی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \quad (5)$$

با توجه به استفاده از روش برازش شوک و لزوم تشکیل مجدد شبکه بین جسم و شوک در هر بار تکرار برنامه، مشتقات  $\xi$  و  $\eta$  نسبت به زمان نیز وارد محاسبات خواهند شد.  
روابط مورد نیاز بین متغیرهای جریان با توجه به معادله حالت گاز ایده‌آل به صورت زیر می‌باشند:

$$T = (\gamma - 1)e, \quad E = \rho \left[ e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (6)$$

به منظور بی‌بعد کردن متغیرها، پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$x_i = \frac{x_i^*}{R_N}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{c_\infty} \sqrt{\gamma}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}$$

$$T = \frac{T^*}{T_\infty}, \quad e = \frac{e^*}{c_\infty^2} \gamma, \quad p = \frac{p^*}{p_\infty} \quad (7)$$

جملات متربیک عبارتنداز:

$$\xi_x = -Jy_\eta, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \eta_x = Jy_\xi, \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (8)$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با:

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \quad (9)$$

### ۳. روش حل عددی

روش اختلاف محدود بکار رفته، روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم است که شامل الگوریتم فاکتورگیری شده تقریبی، ضمنی، غیرتکراری و به‌شکل دلتای می‌باشد. در این مقاله از روش پیشنهادی پولیام و شویس [۱۲] برای قطعی کردن ماتریس‌های ژاکوبین (قسمت ضمنی) استفاده شده‌است. فرمول‌بندی این روش عددی به صورت زیر است:

$$T_\xi \left[ I + \Delta t \delta_\xi \Lambda_\xi^i \right] T_\xi^{-1} T_\eta \left[ I + \Delta t \delta_\eta \left( \Lambda_\eta^i - \frac{1}{\text{Re}} J^{-1} \Lambda_\eta^v \right) \right] T_\eta^{-1} \Delta \mathbf{U}^n = RHS$$

### ۲. معادلات حاکم

در این تحقیق، از معادلات "ناویر-استوکس لایه-نازک" (TLNS) که کارایی بسیار خوبی در شبیه‌سازی عددی جریان دارند، استفاده شده است. این معادلات که با حذف عبارتهای لزج در امتداد جریان به دست می‌آیند، در جریان‌هایی که دارای عدد رینولدز بالا هستند (لایه‌مرزی نازک)، تقریب بسیار مناسبی از معادلات کامل ناویر-استوکس می‌باشند. معادلات TLNS به‌فرم بقایی در مختصات کارتزین با توجه به تغییر متغیرهای زیر به مختصات منحنی‌الخط انتقال داده شده‌اند:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (1)$$

با درنظر گرفتن تغییر مستقل  $\eta$  در جهت عمود بر جسم و با صرف‌نظر کردن از مشتقهای عبارتهای لزج در جهت جریان ( $\xi$ )، معادلات TLNS در مختصات محاسباتی و بی‌بعد شده برای حالت تقارن محوری به‌فرم بقایی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \mathbf{H} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} + \mathbf{T} \right] \quad (2)$$

بردار متغیرهای وابسته  $\mathbf{U}$  و بردارهای غیرلزج  $\mathbf{F}$ ،  $\mathbf{G}$  و  $\mathbf{H}$ ، همچنین بردارهای لزج  $\mathbf{S}$  و  $\mathbf{T}$  به فرم زیر ارائه می‌شوند:

$$\mathbf{U} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho uU + \xi_x P \\ \rho vU + \xi_y P \\ (E + p)U \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho uV + \eta_x P \\ \rho vV + \eta_y P \\ (E + p)V \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = (yJ)^{-1} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (E + p)v \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{S} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2)u_\eta + (\mu/3)\eta_x \left( \frac{\eta_y u_\eta}{\eta_y v_\eta} + \right) \\ -(2/3)\mu\eta_x v/y \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2)v_\eta + (\mu/3)\eta_y \\ (\eta_y u_\eta + \eta_x v_\eta) - (2/3)\mu\eta_y v/y \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) \left[ \frac{(u^2 + v^2)}{\eta} / 2 + \gamma \text{Pr}^{-1} e_\eta \right] \\ -(2/3)\mu(\eta_x u + \eta_y v)v/y + \\ \left( \mu/6 \left[ \frac{\mu_x^2 (u^2)}{\eta} + \frac{\mu_y^2 (v^2)}{\eta} + \right] \right) \\ 2\eta_x \eta_y (uv)_\eta \end{pmatrix}$$

در نقاط نزدیک مرز، دقت روش را یک مرتبه پایین آورد و از روابط با دقت مرتبه سوم به صورت زیر استفاده نمود:

در  $i = 2$

$$\delta_\xi \Lambda_\xi^i = \frac{(-2\Lambda_{i-1,j} - 3\Lambda_{i,j} + 6\Lambda_{i+1,j} - \Lambda_{i+2,j})}{6\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^3 \quad (18)$$

در  $i = imax - 1$

$$\delta_\xi \Lambda_\xi^i = \frac{(2\Lambda_{i+1,j} + 3\Lambda_{i,j} - 6\Lambda_{i-1,j} + \Lambda_{i-2,j})}{6\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^3 \quad (19)$$

برای ماتریس قطری در جهت  $\eta$  نیز از روابط مشابه استفاده می‌شود. با انفال عددی سمت چپ رابطه (۱۰) با دقت مرتبه چهارم، باید سمت راست معادله را نیز با دقت مرتبه چهارم منفصل کرد. بنابراین انفال عددی مشتقات بردارهای شار لزج و غیرلزج به صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم، یکی از مهمترین قسمت‌هایی است که بدون آنها دقت بالای روش معنی پیدا نمی‌کند. در نقاط داخلی ( $2 < i < imax - 2$  و  $3 < j < jmax$ ) روابط (۱۶) و (۱۷) با بردارهای شار لزج و غیرلزج ( $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{S}$ ) مانند روابط (۱۶) و (۱۷) با دقت مرتبه چهارم گسترش‌سازی می‌شوند، اما انفال عددی آنها در نقاط نزدیک مرز متفاوت با یکدیگر و نیز متفاوت با انفال عددی ماتریس‌های قطری سمت چپ رابطه (۱۰) می‌باشد.

چنانچه در نقاط نزدیک مرز بردارهای شار غیرلزج ( $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ )، از روابط یکطرفه با دقت مرتبه چهارم استفاده شود، ناپایداری بوجود آمده در حل باعث واگرایی آن می‌شود. در این مورد حتی اگر دقت روش را یک مرتبه پایین آورد و از روابط با دقت مرتبه سوم استفاده کرد، حل واگرا خواهد شد. بنابراین بهمنظور پایداری روش در نقاط نزدیک مرز، باید دقت آن را پایین تر آورد و از دقت مرتبه دوم به صورت زیر استفاده کرد:

در  $i = imax - 1$  و  $i = 2$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} = \frac{(\mathbf{F}_{i+1,j} - \mathbf{F}_{i-1,j})}{2\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^2 \quad (20)$$

در  $j = 2$  و  $j = jmax - 1$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = \frac{(\mathbf{G}_{i,j+1} - \mathbf{G}_{i,j-1})}{2\Delta\eta} + O(\Delta\eta)^2 \quad (21)$$

در نقاط نزدیک مرز بردار شار لزج ( $\mathbf{S}$ )، می‌توان از روابط یکطرفه با همان دقت روش استفاده کرد، بدون اینکه ناپایداری در روش ایجاد شود. بنابراین روابط زیر بکار گرفته شده‌است:

در  $j = 2$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} = \frac{\begin{pmatrix} -3\mathbf{S}_{i,j-1} - 10\mathbf{S}_{i,j} + 18\mathbf{S}_{i,j+1} \\ -6\mathbf{S}_{i,j+2} + \mathbf{S}_{i,j+3} \end{pmatrix}}{12\Delta\eta} + O(\Delta\eta)^4 \quad (22)$$

در  $j = jmax - 1$

$$RHS = -\Delta t \left[ \delta_\xi \mathbf{F}^n + \delta_\eta \mathbf{G}^n + \mathbf{H}^n - \frac{1}{Re} (\delta_\eta \mathbf{S} + \mathbf{T})^n \right] + D_E \quad (10)$$

که در رابطه فوق  $\delta_\xi$  و  $\delta_\eta$ ، به ترتیب ماتریس قطری ژاکوبین  $A$  و ماتریس قطری ژاکوبین  $B$  می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Lambda_\xi^i = T_\xi^{-1} A T_\xi, \quad \Lambda_\eta^i = T_\eta^{-1} B T_\eta \quad (11)$$

عناصر موجود در روی قطر اصلی ماتریس‌های فوق، مقادیر ویژه ماتریس‌های ژاکوبین  $A$  و  $B$  می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

مقادیر ویژه ماتریس  $A$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = U, \quad \lambda_3 = U + cK_\xi, \quad \lambda_4 = U - cK_\xi \quad (12)$$

مقادیر ویژه ماتریس  $B$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = V, \quad \lambda_3 = V + cK_\eta, \quad \lambda_4 = V - cK_\eta \quad (13)$$

که در آنها داریم:

$$K_\xi = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \quad K_\eta = \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (14)$$

بهمنظور تسريع همگرایی حل معادلات در رابطه (۱۰)، در حالت لزج از مقدار ویژه تقریبی زیر به جای ماتریس‌های ژاکوبین لزج در قطر اصلی ماتریس قطری  $\Lambda_\eta^v$  استفاده شده است [۱۲]:

$$\lambda_\eta^v = \rho\mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (15)$$

برای رسیدن به دقت مرتبه چهارم، باید مشتقات موجود در سمت راست و سمت چپ رابطه (۱۰) را با دقت مرتبه چهارم منفصل کرد. با توجه به اینکه در این روش پهنه‌ای بازه انتقال عددی مشتقات به صورت تفاضل مرکزی در نقاط داخلی پنج نقطه است، بنابراین سمت چپ رابطه (۱۰) در نقاط داخلی ( $2 < i < imax - 2$  و  $3 < j < jmax - 2$ ) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\delta_\xi \Lambda_\xi^i = \frac{(-\Lambda_{i+2,j} + 8\Lambda_{i+1,j} - 8\Lambda_{i-1,j} + \Lambda_{i-2,j})}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^4 \quad (16)$$

$$\delta_\eta \Lambda_\eta^i = \frac{(-\Lambda_{i,j+2} + 8\Lambda_{i,j+1} - 8\Lambda_{i,j-1} + \Lambda_{i,j-2})}{12\Delta\eta} + O(\Delta\eta)^4 \quad (17)$$

همانطور که از روابط فوق مشاهده می‌شود، سمت چپ رابطه (۱۰) به صورت ماتریس‌های پنجقطري ظاهر می‌شوند که بایستی آنها را در جهت‌های  $\xi$  و  $\eta$  حل نمود. برای نقاط نزدیک مرز به دلیل عدم وجود نقاط کافی نمی‌توان از روابط فوق استفاده کرد. بنابراین به منظور پایداری روش و نیز حفظ پنجقطري بودن معادلات بایستی

$$(\Delta_\xi \nabla_\xi)^3 JU = \begin{pmatrix} (JU)_{i-3,j} - 6(JU)_{i-2,j} \\ +15(JU)_{i-1,j} - 20(JU)_{i,j} \\ +15(JU)_{i+1,j} - 6(JU)_{i+2,j} \\ +(JU)_{i+3,j} \end{pmatrix} / (\Delta\xi)^6 \quad (27)$$

در جهت  $\eta$  نیز به طریق مشابه عمل خواهد شد. به علت پهنای بازه هفت نقطه‌ای رابطه (۲۷)، نقاط نزدیک مرز در این حالت گستردگی و پیچیدگی بیشتری پیدا می‌کند. از آنجایی که در این مرتبه مشتق در نقاط نزدیک مرز پایین آورده می‌شود، بنابراین بر اساس پهنای بازه مورد استفاده در هر یک از مشتقات، حالت‌های مختلفی در ترکیب آنها بوجود می‌آید. در زیر به چند نوع ترکیب در نقاط نزدیک مرز اشاره شده است:

- مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق چهارم در نقاط نزدیک‌تر مرز
- مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق سوم در نقاط نزدیک‌تر مرز
- مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق دوم در نقاط نزدیک‌تر مرز
- ... و

تمامی حالت‌های اشاره شده در فوق موجب واگرایی حل خواهد شد. بنابراین بهترین حالتی که باعث همگرایی روش می‌شود، به کار بردن مشتق چهارم در نقاط دورتر مرزها و مشتق سوم در نقاط نزدیک‌تر مرز می‌باشد.

$\varepsilon_E$  در رابطه (۲۶)، ضریب میرایی است که در این مقاله به صورت  $\varepsilon_E = \Delta t$  می‌باشد. بهمنظور افزایش نرخ همگرایی، گام زمانی ( $\Delta t$ ) متغیر در نظر گرفته شده و بر اساس بیشینه مقادیر ویژه و عدد CFL به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Delta t = \frac{CFL}{\lambda_{max}} \quad (28)$$

پس از انفال عددی سمت راست و سمت چپ رابطه (۱۰)، در نهایت مقادیر بردار جواب  $U_{i,j}^{n+1}$  با حل دستگاه‌های پنجقطری معادلات برای هر نقطه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^n \quad (29)$$

لازم به ذکر است که تمامی روابط مربوط به انفال عددی مشتقات با دقت‌های متفاوت، بر اساس بکارگیری نقاط قبل و بعد آن، با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به دست آورده شده است.

یکی دیگر از عبارت‌های مهم در تأثیر دقت بالای روش، محاسبه فشار و دمای روی سطح است که در قسمت اعمال شرایط مرزی به آن پرداخته می‌شود. عبارت‌های L2-Norm Error و  $Error_{max}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Error_{max} = \text{گام زمانی} / (\text{حداکثر خطای در میدان حل})$$

$$\text{L2-Norm Error} = \sqrt{\frac{1}{m \times n} \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} (\Delta\Phi)^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\left( -S_{i,j-3} + 6S_{i,j-2} - 18S_{i,j-1} \right)}{12\Delta\eta} + O(\Delta\eta)^4 \quad (23)$$

در تعریف بردارهای شار لزج (S, T) در (۴)، مشتقاتی وجود دارند که آنها نیز بایستی منفصل شوند. به این منظور در نقاط داخلی از روابط مشابه (۱۶) و (۱۷) و در نقاط نزدیک مرز از روابط مشابه (۲۲) و (۲۳) استفاده می‌شود. پس در این قسمت نه تنها پایین نیاوردن دقت روش در نقاط نزدیک مرز باعث ایجاد ناپایداری عددی نمی‌شود، بلکه اگر در این نقاط از روابط مشابه (۱۸) و (۱۹) استفاده شود، باعث ایجاد نوسان در نتایج عددی خواهد شد. در انفال عددی متريک‌ها، در نقاط داخلی از روابط مشابه (۱۶) و (۱۷)، در نقاط نزدیک مرز از روابط مشابه (۲۲) و (۲۳) و در نقاط روی مرز از روابط زیر که همگی آنها با دقت مرتبه چهارم هستند استفاده شده است:

$$: i = imax$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\left( -25x_{i,j} + 48x_{i+1,j} - 36x_{i+2,j} \right)}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^4 \quad (24)$$

$$: i = imax$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\left( 25x_{i,j} - 48x_{i-1,j} + 36x_{i-2,j} \right)}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^4 \quad (25)$$

برای سایر روابط متريک‌ها نیز به طریق مشابه عمل می‌شود. در این مورد نیز چنانچه در نقاط مرزی و نزدیک مرز دقت روش پایین آورده شود، باعث ایجاد نوسان در نتایج حل عددی خواهد شد. همانطور که قبل اذکر شد، بهمنظور کاهش خطای پراکنده‌گی در روش‌های تفاضل مرکزی، بایستی جملات اتلاف مصنوعی به آنها اضافه شوند. در روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم مورد استفاده در این مقاله نیز جملات اتلافی خطی به صورت صریح به سمت راست معادله (۱۰) اضافه می‌شود. جملات اتلافی از طرفی باید نوسانات ذاتی ناشی از روش را بطرف کنند و از طرف دیگر دقت روش را تغییر ندهند. بنابراین با استخراج معادله اصلاحی (Modified equation) روش مورد مطالعه توسط نرم‌افزار Mathematica، و نیز با توجه به جمله خطای غالب در آن، رابطه زیر به عنوان اتلاف عددی صریح به دست آورده شده است:

$$D_E = -\varepsilon_E J^{-1} \left[ \left( \Delta_\xi \nabla_\xi \right)^3 + \left( \Delta_\eta \nabla_\eta \right)^3 \right] J U \quad (26)$$

در رابطه فوق که فقط برای نقاط داخلی ( $i = 3 < i < imax - 4$  و  $j = jmax - 3 < j < jmax - 4$ ) مورد استفاده قرار می‌گیرد، U طبق رابطه (۳) تعریف شده و  $JU = \left( \Delta_\xi \nabla_\xi \right)^3 J U$  به صورت زیر خواهد بود:

به دلیل آدیاباتیک بودن دیواره از روابط مشابهی برای دما استفاده شده است.

#### شرط مرزی جریان ورودی

در روش برآش شوک ابتدا شوک بر روی جسم انطباق داده می شود و سپس متغیرهای پشت شوک که در واقع مقادیر مرز خارجی را تشکیل می دهند، با استفاده از روابط رانکین-هوگونیت به دست می آیند. روابط شوک یک بعدی برای حالت گاز کامل  $\gamma = 1/4$  به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{2.4M_1^2}{0.4M_1^2 + 2}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{(1+0.2M_1^2)(7M_1^2 - 1)}{7.2M_1^2}, \\ \frac{P_2}{P_1} &= \frac{7}{6}M_1^2 - \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (35)$$

#### شرط مرزی جریان خروجی

به دلیل مافوق صوت بودن جریان، در مرز خروجی از برونویابی مرتبه سوم به صورت زیر استفاده شده است:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} \right|_{imax,j} = 0, \quad \mathbf{U}_{imax,j} = 312 \mathbf{U}_{imax-1,j} - 342 \mathbf{U}_{imax-2,j} + 168 \mathbf{U}_{imax-3,j} - 33 \mathbf{U}_{imax-4,j} \quad (36)$$

#### شرط مرزی صفحه تقارن

در این مرز از شرط تقارن (آینه‌ای) استفاده شده است. با استفاده از تحلیل آیزنتروپیک، توزیع اولیه‌ای برای کمیت‌های فشار، چگالی و سرعت به دست آمده است. به دلیل لزج بودن جریان یک توزیع اولیه خطی درون لایه‌مرزی درنظر گرفته شده است. هرچه شرایط اولیه حدسی به جواب‌های نهایی نزدیک‌تر باشند، تعداد تکرار برای همگرایی کاهش خواهد یافت.

### ۴. مطالعه شبکه

نتایج به دست آمده از حل عددی بایستی مستقل از نوع و سایز شبکه باشند، بنابراین ابتدا باید شبکه مورد استفاده مناسب برای هر روش به دست آید و سپس مقایسه انجام شود. به منظور انتخاب شبکه مناسب برای هر روش لازم است نتایج حاصل از چند نوع شبکه با یکدیگر مقایسه شوند و پس از اطمینان از عدم واستگی نتایج به نوع و سایز شبکه، شبکه مناسب انتخاب شود. البته از آنجایی که دقت روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم بالاتر از روش "بیم-وارمینگ" است، می‌توان از یک شبکه درشت‌تر برای آن استفاده کرد. بنابراین با مطالعه شبکه برای هر روش، شبکه مورد استفاده برای روش "بیم-وارمینگ" برابر  $80 \times 120$  و برای روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم برابر  $30 \times 40$  انتخاب شده است. به منظور مقایسه، شرایط مورد نیاز در هر دو روش یکسان درنظر

در رابطه (۳۰)  $\Phi$  معرف خصوصیات جریان از قبیل  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  و  $p$  می باشد که با استفاده آنها در این رابطه، مقدار بیشینه آن به عنوان خطای نرم در نظر گرفته می شود. در این مقاله برای تولید شبکه از روش جبری با ضریب کنش برابر  $1/0.5$  استفاده شده است. در جریان‌های لزج لازم است که از ضریب کنش کوچک استفاده شود تا حل در ناحیه لزج دارای دقت کافی باشد.

برای انجام محاسبات و مقایسه نتایج روش مرتبه چهارم با روش "بیم-وارمینگ" [۱۱]، عدد رینولدز ۳۱۲۵۰ و عدد ماخ ۶ حول مخروط سریع با نیمزاویه رأس ۷ درجه درنظر گرفته شده است.

#### ۱-۳. اعمال شرایط مرزی و شرایط اولیه

شرط مرزی دیواره برای جریان لزج با توجه به شرط عدم لغزش، مقادیر  $u$  و  $v$  روی جسم برابر صفر می باشند. برای شرط مرزی فشار از معادله زیر استفاده می شود:

$$\begin{aligned} p_n \left( \eta_x^2 + \eta_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi \\ + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

با استفاده از انفال عددي (۳۱) به صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم، روابطی به شکل ماتریس پنجقطري حاصل می شود که برای نقاط داخلی به صورت زیر می باشند:

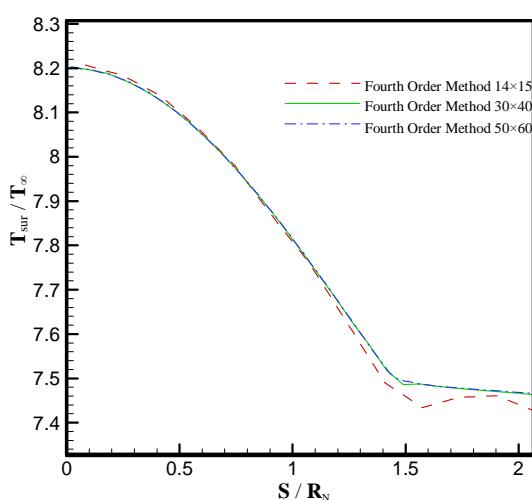
$$\begin{aligned} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \left( \begin{array}{c} p_{i-2,1} - 8p_{i-1,1} \\ + 8p_{i+1,1} - p_{i+2,1} \end{array} \right) + \\ (\eta_x^2 + \eta_y^2) \left( \begin{array}{c} -25p_{i,1} + 48p_{i,2} - 36p_{i,3} \\ + 16p_{i,4} - 3p_{i,5} \end{array} \right) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

در نقاط مجاور مرزها به منظور حفظ پنجقطري بودن روابط و نيز پايداري روش، از دقت مرتبه سوم استفاده می شود. بدین ترتيب در  $i = 1$  رابطه زير به دست خواهد آمد:

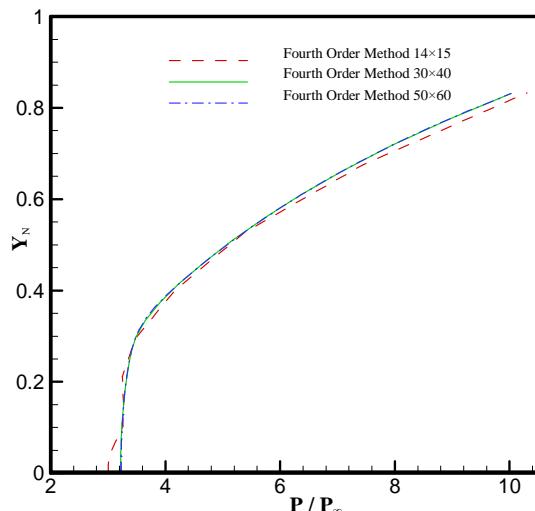
$$\begin{aligned} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \left( \begin{array}{c} -4p_{i-1,1} - 6p_{i,1} \\ + 12p_{i+1,1} - 2p_{i+2,1} \end{array} \right) + \\ (\eta_x^2 + \eta_y^2) \left( \begin{array}{c} -25p_{i,1} + 48p_{i,2} - 36p_{i,3} \\ + 16p_{i,4} - 3p_{i,5} \end{array} \right) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

و در  $i = imax - 1$  خواهيم داشت:

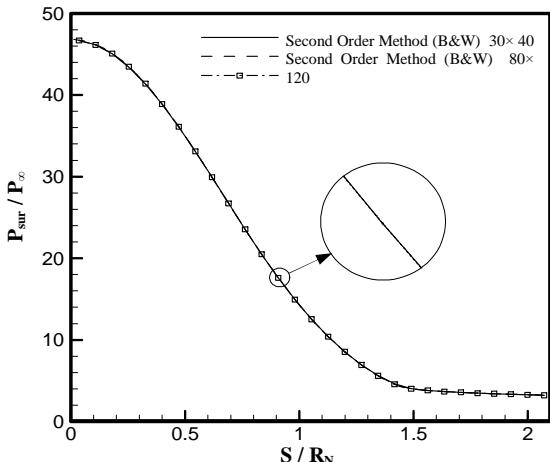
$$\begin{aligned} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \left( \begin{array}{c} 2p_{i-2,1} - 12p_{i-1,1} \\ + 6p_{i,1} + 4p_{i+1,1} \end{array} \right) + \\ (\eta_x^2 + \eta_y^2) \left( \begin{array}{c} -25p_{i,1} + 48p_{i,2} - 36p_{i,3} \\ + 16p_{i,4} - 3p_{i,5} \end{array} \right) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$



شکل ۳. مقایسه توزیع دمای روی سطح توسط روش مرتبه چهارم در سه شبکه  $14 \times 15$ ،  $30 \times 40$  و  $50 \times 60$



شکل ۴. مقایسه پروفیل‌های فشار روش مرتبه چهارم در سه شبکه  $14 \times 15$ ،  $30 \times 40$  و  $50 \times 60$  در  $S/R_N = 2.0708$

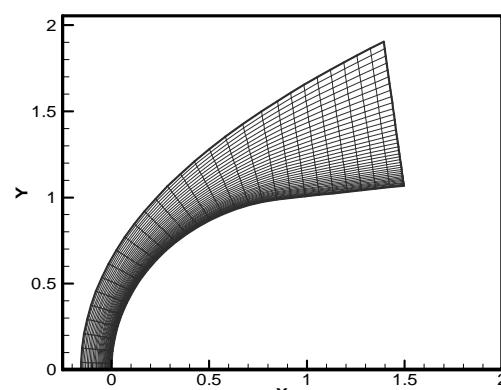


شکل ۵. مقایسه توزیع فشار روی سطح توسط روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

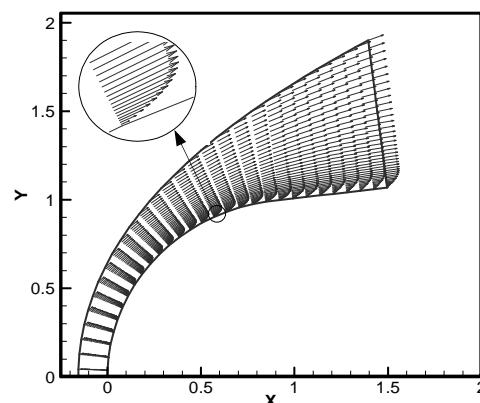
گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که در قسمت بعد نتایج عددی مربوط به مطالعه شبکه برای روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم آورده شده است.

## ۵. بررسی نتایج عددی

در شکل ۱ شبکه مورد استفاده برای تحلیل عددی نشان داده شده است. این شبکه در نزدیکی جسم فشرده بوده و با دور شدن از جسم، تراکم آن کاسته می‌شود. در شکل ۲ بردارهای سرعت مربوط به روش مرتبه چهارم و چگونگی تشکیل لایه مرزی روی جسم ارائه شده است.

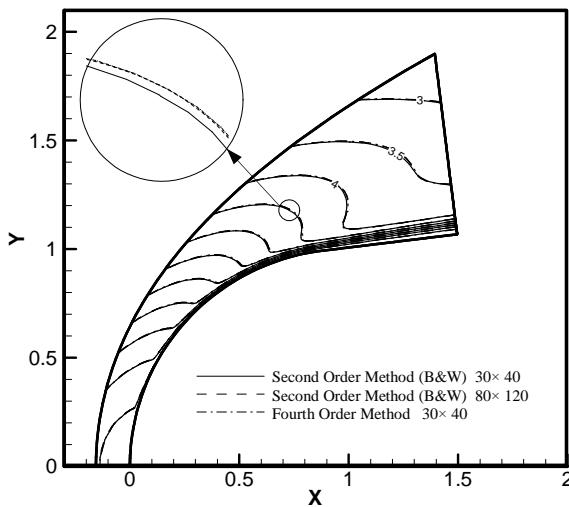


شکل ۱. شبکه‌بندی نقاط در دامنه فیزیکی

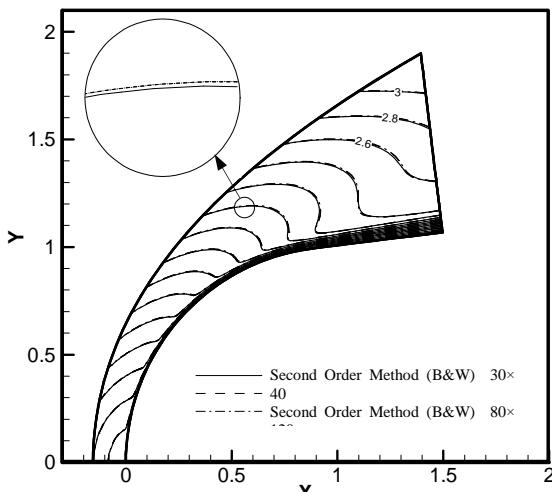


شکل ۲. بردارهای سرعت روش مرتبه چهارم

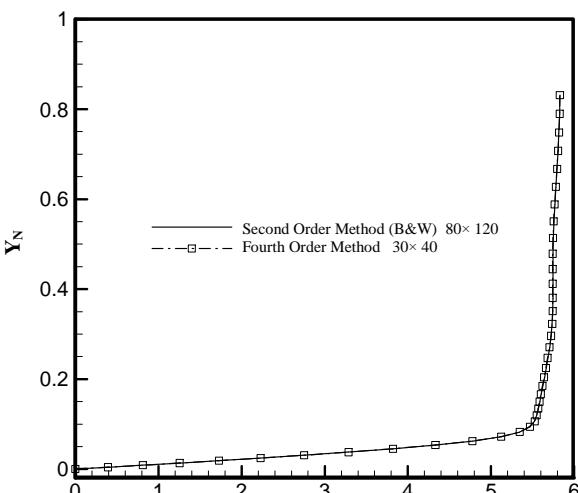
به منظور مطالعه شبکه، در شکل ۳ توزیع دمای روی سطح و در شکل ۴ پروفیل‌های فشار در مقطع انتهای بدنه توسط روش مرتبه چهارم برای سه شبکه  $14 \times 15$ ،  $30 \times 40$  و  $50 \times 60$  با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از شبکه  $30 \times 40$  با نتایج شبکه  $50 \times 60$  که شبکه ریزتری می‌باشد، تطابق بسیار خوبی دارد. بنابراین با اطمینان کامل از عدم واپستگی نتایج به نوع و سایز شبکه، می‌توان شبکه  $30 \times 40$  را شبکه‌ای مناسب برای روش مرتبه چهارم انتخاب کرد. لازم به ذکر است که برای روش "بیم-وارمینگ" نیز مطالعه شبکه در محدوده شبکه‌های ریزتر انجام شد و با توجه به عدم واپستگی نتایج به نوع و سایز شبکه، شبکه  $80 \times 120$  انتخاب گردید.



شکل ۸. مقایسه خطوط دما ثابت به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

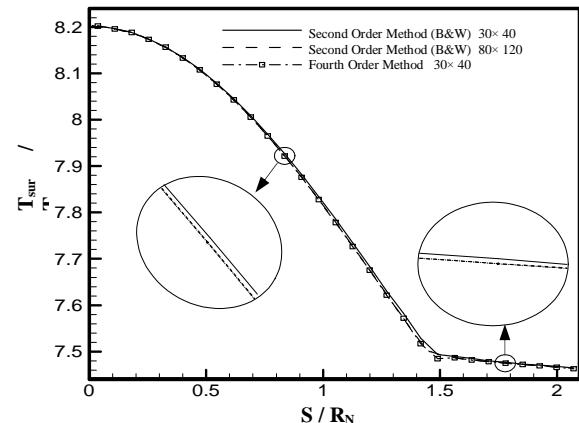


شکل ۹. مقایسه خطوط ماخ ثابت به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

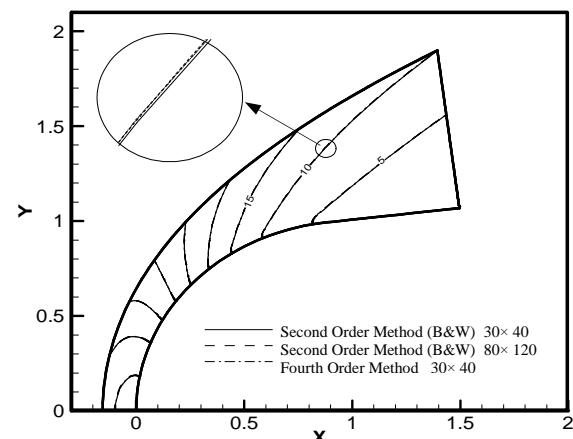


شکل ۱۰. مقایسه پروفیل سرعت با استفاده از روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" در  $S/R_N = 2.0708$

در شکل ۵ توزیع فشار روی سطح و در شکل ۶ توزیع دمای روی سطح به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" ارائه شده است. به منظور مقایسه و تمایز بهتر نمودارها از یکدیگر، از بزرگنمایی که مقیاس بزرگی برابری با هم دارند، استفاده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با توجه به تفاوت زیاد تعداد نقاط شبکه، مقادیر به دست آمده برای توزیع فشار روی سطح در هر دو روش تفاوت زیادی با یکدیگر ندارند و تقریباً بر هم منطبق می‌باشند. اما در شکل ۶ واضح است که دمای روی سطحی که توسط روش مرتبه چهارم با یک شبکه درشت ( $30 \times 40$ ) به دست می‌آید، بسیار نزدیک به دمای روی سطحی است که توسط روش "بیم-وارمینگ" با یک شبکه بسیار ریز ( $80 \times 120$ ) حاصل می‌شود. با توجه به مطالب فوق، می‌توان علاوه بر دقت بالای روش مرتبه چهارم در یک شبکه نسبتاً درشت، به حساسیت بیشتر دمای روی سطح نسبت به فشار روی سطح نیز اشاره کرد. در شکل‌های ۷ و ۸ به ترتیب خطوط فشار ثابت، دما ثابت و ماخ ثابت برای هر دو روش نشان داده شده است. این نمودارها نیز نتایج حاصل از روش مرتبه چهارم و دقت بالای آن را تأیید می‌کنند.

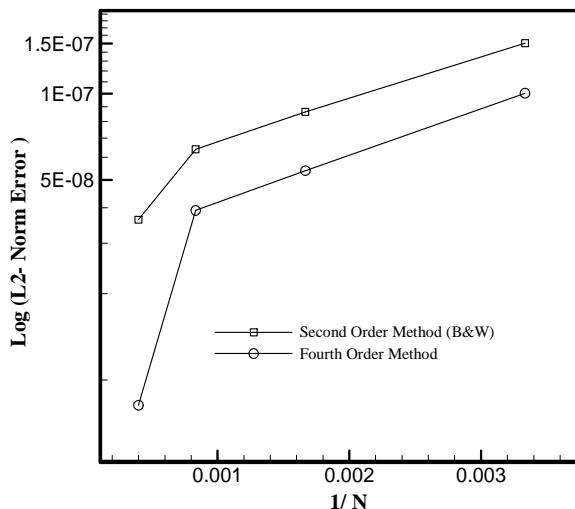


شکل ۶. مقایسه توزیع دمای روی سطح توسط روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

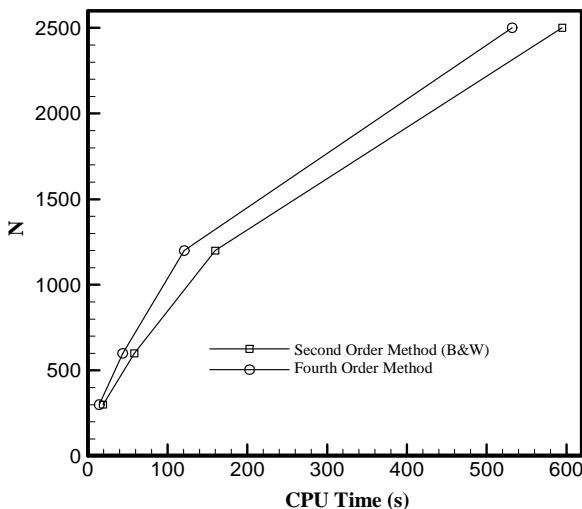


شکل ۷. مقایسه خطوط فشار ثابت به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

در شکل ۱۳ خطای نرم (L2-Norm Error) هر دو روش بر حسب عکس تعداد نقاط شبکه با یکدیگر مقایسه شده است. در این شکل به عنوان نمونه از چهار شبکه با تعداد نقاط ۳۰۰، ۶۰۰، ۱۲۰۰ و ۲۵۰۰ که در هر دو روش تا  $1.0e-3$  Error<sub>max</sub> داشتند، همگرا شده اند. استفاده شده است. در این شکل چند نکته قابل تأمل است: نخست آنکه با افزایش تعداد نقاط شبکه در هر دو روش، مقدار خطا کاهش می‌یابد. دیگر آنکه نرخ کاهش خطا در روش مرتبه چهارم بیشتر از روش "بیم-وارمینگ" است. بر این اساس اختلاف دقت دو روش در شبکه‌های با تعداد نقاط بالاتر بیشتر می‌باشد. نکته دیگر اینکه از طرفی در یک شبکه خاص، دقت روش مرتبه چهارم بالاتر است و از طرف دیگر برای یک دقت معلوم، می‌توان به جای استفاده از روش "بیم-وارمینگ" با یک شبکه ریز از روش مرتبه چهارم با تعداد نقاط کمتر و با همان دقت استفاده کرد.



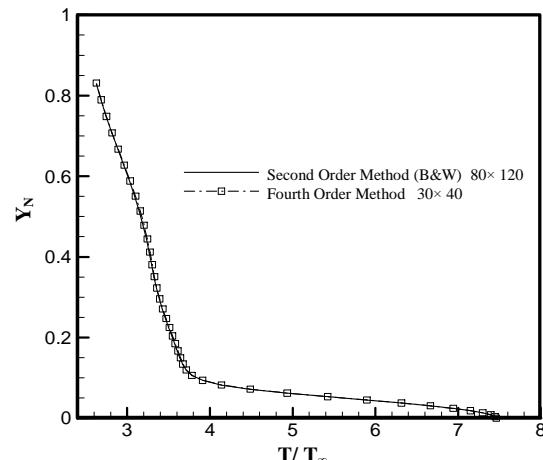
شکل ۱۳. مقایسه خطای نرم بر حسب عکس تعداد نقاط شبکه برای روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"



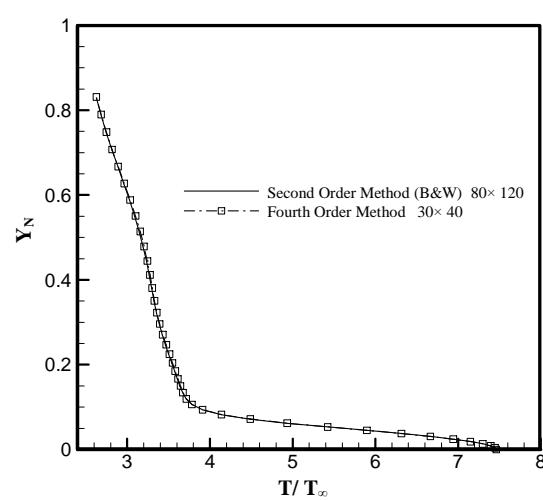
شکل ۱۴. مقایسه تعداد نقاط شبکه بر حسب مدت زمان حل برای روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

در شکل ۱۰ منحنی توزیع سرعت در امتداد محور افقی ( $u$ ) بر حسب فاصله عمودی از سطح ( $Y_N$ ) در انتهای بدنه ( $S/R_N = 2.0708$ ) ترسیم شده است. بیشترین تغییرات سرعت در داخل لایه مرزی  $Y_N \approx 0.082$  مشاهده می‌شود. در شکل ۱۱ توزیع دما بر حسب فاصله عمودی از دیواره ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در روی سطح بیشترین مقدار دما ایجاد شده و با نزدیکتر شدن به محل شوک مقدار آن به دلیل کاهش اثرات لزجت کاهش می‌یابد.

در شکل ۱۲ توزیع فشار بر حسب فاصله عمودی از سطح ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در سه شکل فوق نیز تطابق بالایی بین روش مرتبه چهارم با شبکه درشت و روش "بیم-وارمینگ" با شبکه ریز وجود دارد. به علت توضیحاتی که در شکل-های قبل داده شد، از آوردن شبکه درشت روش "بیم-وارمینگ" خودداری شده است.

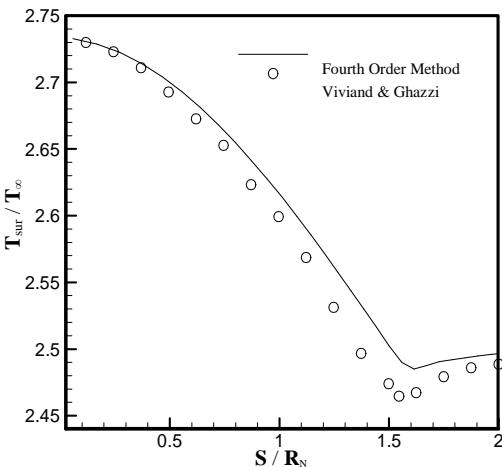


شکل ۱۱. مقایسه پروفیل دما با استفاده از روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" در  $S/R_N = 2.0708$



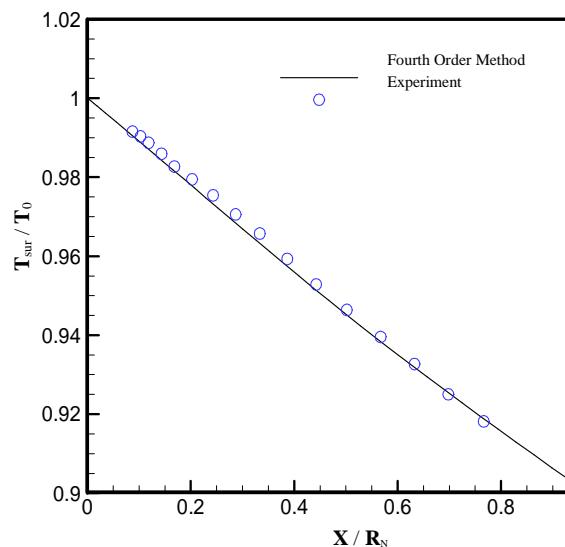
شکل ۱۲. مقایسه پروفیل فشار با استفاده از روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" در  $S/R_N = 2.0708$

در پایان به مقایسه نتایج روش مرتبه چهارم مورد بحث با نتایج عددی معتبر و نتایج تجربی پرداخته می‌شود. در شکل ۱۶ توزیع فشار روی سطح روش مرتبه چهارم با حل کاتلر [۱۳] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که مقادیر به دست آمده تفاوت زیادی با یکدیگر ندارند و تقریباً بر هم منطبق می‌باشند.



شکل ۱۷. مقایسه توزیع دمای روی سطح با استفاده از روش مرتبه چهارم با نتایج عددی ویویند و قاضی [۱۴] در حالت

$$T_{cone}=0^\circ \text{ و } Re=2.2e+5, M=2.94$$



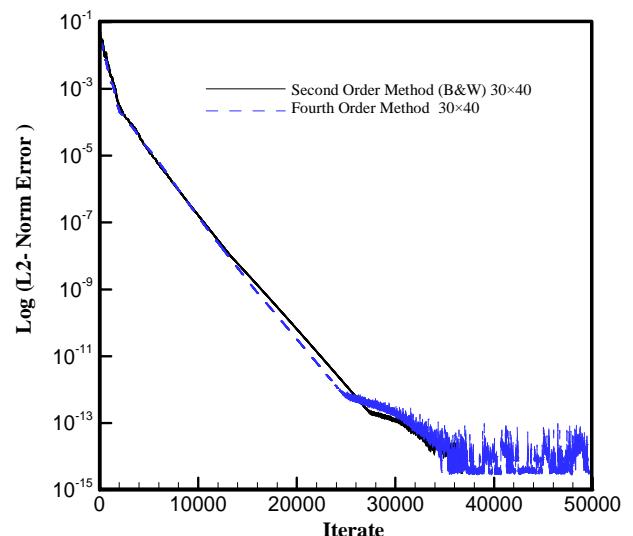
شکل ۱۸. مقایسه توزیع دمای روی سطح با استفاده از روش مرتبه چهارم با نتایج تجربی [۱۵] در حالت

$$T_{cone}=0^\circ \text{ و } Re=1.5e+6, M=4.15$$

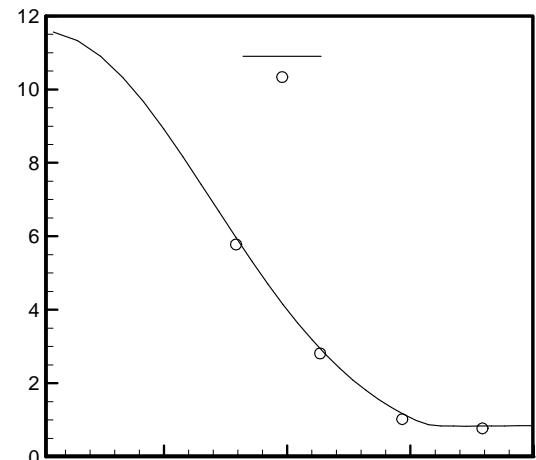
در شکل ۱۷ توزیع دمای روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج ویویند و قاضی [۱۴] که از حل معادلات کامل ناویر-استوکس به دست آمده‌اند، مقایسه شده است. لازم به ذکر است که نتایج ویویند و قاضی جزو معتبرترین نتایج عددی می‌باشند و عنوان مبنای برای مقایسه نتایج موردن پذیرش قرار گرفته‌اند. مشاهده می‌شود که تطابق قابل قبولی بین دمای روی سطح روش مرتبه چهارم و نتایج ویویند

شکل ۱۴ مدت زمان لازم برای همگرایی برنامه را بر حسب تعداد نقاط شبکه برای هر دو روش نشان می‌دهد. در این شکل از همان چهار شبکه موجود در شکل ۱۳ استفاده شده است. همانطور که از این شکل برمی‌آید سرعت همگرایی روش مرتبه چهارم بیشتر از روش "بیم-وارمینگ" است.

لازم به ذکر است که هر دو روش قابلیت همگرایی تا دقت‌های بسیار پایین را دارند. شکل ۱۵ خطای نرم را بر حسب تعداد تکرارهای برنامه برای همگرایی هر دو روش تا  $Error_{max} = 1.0e-10$  نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود میزان خطای نرم تا  $1.0e-15$  کاهش یافته است. لازم به ذکر است که بسیاری از نرم‌افزارهای متداول CFD نظیر نرم‌افزار Fluent قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را ندارند.



شکل ۱۵. مقایسه خطای نرم بر حسب تعداد تکرارهای برنامه برای روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"



شکل ۱۶. مقایسه توزیع فشار روی سطح با استفاده از روش مرتبه چهارم با نتایج عددی کاتلر [۱۳] در حالت

$$T_{cone}=0^\circ \text{ و } Re=2.2e+5, M=2.94$$

- [5] Visbal, M.R., Gaitonde, D.V., "High-Order-Accurate Methods for Complex Unsteady Subsonic Flows", AIAA Journal, Vol. 37, 1999, pp. 1210-1230.
- [6] Zhong, X., "High-Order Finite-Difference Schemes for Numerical Simulation of Hypersonic Boundary-Layer Transition", Journal of Computational Physics, Vol. 144, 1998, pp. 662-709.
- [7] Zhong, X., Tatineni, M., "High-order non-uniform grid schemes for numerical simulation of hypersonic boundary-layer stability and transition", Journal of Computational Physics, Vol. 190, 2003, pp. 419-458.
- [8] Wang, Z., Huang, G.P., "An Essentially Nonoscillatory High-Order Pade'-Type (ENO-Pade') Scheme", Journal of Computational Physics, Vol. 177, 2002, pp. 35-50.
- [9] Costa, B., Don, W.S., "High Order Hybrid Central WENO Finite Difference Scheme for Conservation Laws", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 204, 2007, pp. 209-218.
- [10] Anderson, D.A., Tannehill, J.C., pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw Hill Book Company, New York, 1984.
- [11] Esfahanian, V., "Computation and Stability Analysis of Laminar Flow over a Blunted Cone in Hypersonic Flow", Ph.D. Thesis, The Ohio University, Columbus, Ohio, March 1991.
- [12] Pulliam, T.V., Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of Implicit Approximate Factorization Algorithm", Journal of Computational Physics, Vol. 39, 2002, pp. 35-50.
- [13] Kutler, P., Chakravarthy, S.R., Lombard, C.P., "Supersonic Flow Over Ablated NoseTip Using an Unsteady Implicit Numerical Procedure", AIAA Journal, 1978, pp. 178-213.
- [14] Viviand, H., Ghazzi, W., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations at High Reynolds Numbers with Application to the Blunt Body Problem" In Lecture Notes in Physics, No. 59, Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, 1976, pp. 375-401.
- [15] Beckwith, I.E., Gallagher, J.J., "Heat Transfer and Recovery Temperatures on a Sphere with Laminar Transitional and Turbulent Boundary Layers at Mach Numbers of 2 and 4.15", NACA TN 4125, 1957.

## پیوست‌ها

### فهرست علایم

<b>F, G, H</b>	بردارهای شار غیرلزج در مختصات منحنی الخط
<b>S, T</b>	بردارهای شار لزج
<b>A, B</b>	ماتریس‌های ژاکوبین بردارهای <b>F</b> و <b>G</b>
<b>imax, jmax</b>	بیشینه تعداد نقاط شبکه در جهات $\xi, \eta$
$R_N$	طول کمان در راستای بدنه
$Y_N$	فاصله عمودی از سطح جسم
$c$	سرعت صوت

وجود دارد. دو شکل فوق می‌توانند همان نتیجه‌های را که قبلاً به آن اشاره شد، مورد تأیید قرار دهند که توزیع دمای روی سطح برخلاف توزیع فشار روی سطح دارای حساسیت بیشتری می‌باشد. لازم به ذکر است که فقط در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ حل عددی روش مرتبه چهارم با عدد رینولدز  $2.2e+5$  و عدد ماخ ۲.۹۴ حول مخروط سریخ با نیمزاویه رأس صفر درجه انجام شده است. سرانجام به منظور تأیید صحت محاسبات، نتایج دمای روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج تجربی [۱۵] مقایسه شده است. شکل ۱۸ تطابق بسیار خوب توزیع دمای روی سطح روش مرتبه چهارم را با نتایج تجربی نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که فقط در شکل ۱۸ حل عددی روش مرتبه چهارم با عدد رینولدز  $1.5e+6$  و عدد ماخ ۴.۱۵ حول مخروط سریخ با نیمزاویه رأس صفر درجه انجام شده است.

## ۶. نتیجه‌گیری

روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم بهدلیل ایجاد خطای پراکنده‌گی کمتر نسبت به روش‌های متداول که عموماً مرتبه دو هستند (بیم-وارمینگ)، دارای دقت بالاتری است. انفال عددي مشتقات به صورت تفاضل مرکزی مرتبه چهارم بهخصوص مشتقات بردارهای غیرلزج، جملات اتلاف مصنوعی صریح و محاسبه دما و فشار روی سطح از مهم‌ترین عواملی هستند که در کارآیی روش مرتبه چهارم مؤثرند. لازم به ذکر است که چگونگی انفال عددي مشتقات در نقاط مرزی و نقاط نزدیک به آنها در همگرایی روش نقش بسزایی دارند. با استفاده از این روش در یک شبکه درشت، می‌توان نتایجی بسیار نزدیک با نتایج شبکه ریز روش "بیم-وارمینگ" بهدست آورد. همچنین این روش دارای سرعت همگرایی بالاتر نسبت به روش "بیم-وارمینگ" است. با افزایش تعداد نقاط شبکه، دقت بالای این روش محسوس‌تر خواهد شد، بدین ترتیب که شبکه کاهش خطای نسبت به روش "بیم-وارمینگ" بیشتر می‌شود. این روش قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را نیز دارد.

## مراجع

- [1] Lele, S.K., "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution", Journal of Computational Physics, Vol. 103, 1992, pp. 16-42.
- [2] Mahesh, K., "A Family of High Order Finite Difference Schemes with Good Spectral Resolution", Journal of Computational Physics, Vol. 145, 1998, pp. 332-358.
- [3] Hirsh, R.S., "High Order Accurate Difference Solutions of Fluid Mechanics Problems by a Compact Differencing Technique", Journal of Computational Physics, Vol. 19, 1975, pp. 90-109.
- [4] Abarbanel, S., Kumar, A., "Compact High-Order Schemes for the Euler Equations", Journal of Scientific Computing, Vol. 3, 1988, pp. 275-288.

<b>I</b>	ماتریس واحد
<b>J</b>	زاکوبین تبدیل
$\Lambda_{\xi}^i, \Lambda_{\eta}^i, \Lambda_{\eta}^v$	ماتریس‌های قطری
$P$	فشار
$p_{\infty}$	فشار جریان آزاد
$Tcone$	نیمزاویه رأس مخروط
$T_0$	دمای نقطه سکون
Re	عدد رینولدز
M	عدد ماخ
$u, v$	مولفه‌های سرعت

**علائم یونانی**

$\xi, \eta$	مختصات منحنی الخط
$\mu$	ضریب لرجهت
$\rho$	چگالی

"