



Nonparametric Shewhart-Type Signed-Rank Control Chart with Variable Sampling Interval

Majid Nojavan* & Neda Niabati

Majid Nojavan, Assistance professor of Industrial Engineering-Industrial Engineering Faculty-Islamic Azad University-South Tehran Branch
Neda Niabati, M.Sc student of Industrial Engineering- Industrial Engineering Faculty -Islamic Azad University-South Tehran Branch

Keywords

Nonparametric Control Chart,
Signed-rank control chart,
Variable Sampling Interval,
Heavy-tailed distributions,
Light-tailed distribution

ABSTRACT

Nonparametric control chart based on signed-rank statistic is used for detecting changes in mean (median). Although the Sign-Rank (SR) chart is more efficient under heavy-tailed distributions (double exponential and Cauchy) but the performance of this chart is very inappropriate in light-tailed distributions (uniform and normal). In this paper, signed-rank chart is developed with variable sampling interval. The performance of signed-rank chart with variable sampling interval (VSI-SR) is compared to signed-rank chart with fixed sampling interval (FSI-SR) and \bar{X} chart. The numerical results demonstrated the VSI-SR chart is better from the FSI-SR chart. Also the VSI-SR chart is more efficient from \bar{X} chart in heavy-tailed distributions and some of changes under normal light-tailed distribution.

© 2013 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 24, No. 2, All Rights Reserved

*
Corresponding author. Majid Nojavan
Email: mnojavan@azad.ac.ir

نمودار ناپارامتری شوهارتی رتبه علامت‌دار با فاصله نمونه‌گیری متغیر

مجید نوجوان* و ندا نیابتی

کلمات کلیدی

نمودار ناپارامتری،
نمودار رتبه علامت‌دار،
فاصله نمونه‌گیری متغیر،
توزیع دنباله سنگین،
توزیع دنباله سبک

چکیده:

یکی از نمودارهای ناپارامتری که برای کنترل میانه (میانگین) فرآیندهای غیر نرمال استفاده می‌شود، نمودار رتبه علامت‌دار است. اگر چه عملکرد این نمودار برای توزیع‌های دنباله سنگین همچون کوشی و نمایی دوپل نسبت به همتای پارامتری‌اش (نمودار \bar{X}) بهتر است اما در کنترل میانگین توزیع‌های دنباله سبک مانند توزیع‌های نرمال و یکنواخت عملکرد مناسبی ندارد. در این مقاله اثر فاصله نمونه‌گیری متغیر بر روی بهبود عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار بررسی شده و عملکرد این نمودار با نمودار رتبه علامت‌دار با فاصله نمونه‌گیری ثابت (FSI-SR) و نیز نمودار \bar{X} مقایسه شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار با فاصله نمونه‌گیری متغیر (VSI-SR) در همه توزیع‌ها از نمودار FSI-SR بهتر است. همچنین عملکرد نمودار VSI-SR در توزیع‌های دنباله سنگین و در تشخیص بعضی از تغییرات توزیع دنباله سبک نرمال از نمودار \bar{X} بهتر است.

۱. مقدمه

یکی از مهمترین ابزارهای کنترل آماری فرآیند (SPC)، نمودار کنترلی (control chart) است. در نمودارهای کنترلی برای کنترل پارامترهای فرآیند معمولاً در فواصل زمانی ثابت، نمونه‌های n تایی از فرآیند انتخاب و مقدار آماره آزمون مشخص و با مقایسه این مقدار و حدود نمودار کنترلی ثابت پارامتر بررسی می‌شود. برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترلی از شاخص $ARL(\Delta)$ استفاده می‌شود که تعداد متوسط نمونه‌های مورد نیاز برای تشخیص تغییر Δ در پارامتر را نشان می‌دهد. در یک نمودار کنترلی هر چقدر $ARL(0)$ بیشتر باشد نمودار اخطار اشتباه کمتری دارد و هر چقدر $ARL(\Delta)$ کمتر باشد نمودار تغییر Δ را سریعتر کشف می‌کند. همچنین از شاخص $ATS(\Delta)$ که متوسط زمان مورد نیاز برای تشخیص تغییر Δ در پارامتر (Average Time to Signal) را نشان می‌دهد نیز برای ارزیابی عملکرد

نمودارها استفاده می‌شود. در حالت فاصله نمونه‌گیری ثابت $ATS(\Delta)$ از رابطه $h.ARL(\Delta)$ محاسبه می‌شود که در آن h فاصله زمانی بین دو نمونه‌گیری متوالی می‌باشد. یکی از روشهای بهبود عملکرد نمودارهای کنترلی استفاده از فاصله نمونه‌گیری متغیر است. در این روش فاصله زمانی بین دو نمونه‌گیری با توجه به مقدار آماره آزمون تغییر می‌کند به گونه‌ای که اگر این مقدار نزدیک به حدود نمودار باشد فاصله زمانی بین دو نمونه‌گیری کمتر و در غیر این صورت فاصله زمانی بیشتر در نظر گرفته می‌شود.

یکی از ساده‌ترین نمودارهای کنترلی، نمودار \bar{X} است که توسط شوهارت (Shewhart) معرفی شده و برای کنترل پارامتر موقعیت (میانه یا میانگین) فرآیندهای نرمال استفاده می‌شود. رینولدز و همکاران (Reynolds and et al) [۱] نمودار \bar{X} را با فاصله نمونه‌گیری متغیر را پیشنهاد داده و برای بررسی عملکرد این نمودار از معیار متوسط زمان اخطاردهی تعدیل شده (AATS) (Adjusted Average Time to Signal) استفاده کرده‌اند. آنها نشان داده‌اند که نمودار \bar{X} با فاصله نمونه‌گیری متغیر عملکرد بهتری نسبت به حالت ثابت دارد. رانگر و پیگناتیلیو (Runger and Pignatiello) [۲] و رانگر و مونتگمری (Runger and

تاریخ وصول: ۹۰/۱/۲۲

تاریخ تصویب: ۹۰/۱۲/۱۵

*نویسنده مسئول مقاله: دکتر مجید نوجوان، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد واحد تهران جنوب، mnojavan@azad.ac.ir
ندا نیابتی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد واحد تهران جنوب، neda.niabati@gmail.com

استفاده کرده و نشان داده‌اند که این کار باعث بهبود عملکرد این نمودار می‌گردد.

در این مقاله برای بهبود عملکرد نمودار ناپارامتری رتبه علامت‌دار از روش فاصله نمونه‌گیری متغیر استفاده شده است. ساختار مقاله به این صورت است که در بخش دوم و سوم به ترتیب نمودار رتبه علامت‌دار و نمودار \bar{X} با فاصله نمونه‌گیری متغیر تشریح شده‌اند. در بخش چهارم نمودار رتبه علامت‌دار با فاصله نمونه‌گیری متغیر (VSI-SR) طراحی شده و عملکرد این نمودار در کنترل توزیعهایی چون نرمال، یکنواخت، کوشی و نمایی دوبل بررسی و با عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار با فاصله نمونه‌گیری ثابت (FSI-SR) و همچنین نمودار \bar{X} با فواصل نمونه‌گیری ثابت مقایسه شده است. نهایتاً در بخش آخر نتیجه‌گیری آمده است.

۲. نمودار رتبه علامت‌دار

نمودار رتبه علامت‌دار اولین بار توسط بکیر [۱۰] برای کنترل مرکزیت فرایند پیشنهاد شد. این نمودار در مواردی که توزیع فرایند متقارن و پیوسته و دارای یک میانگین (میانه) مشخص است کاربرد دارد. در این نمودار برای کنترل میانگین فرایند (θ_0) ، در هر نمونه گرفته شده t ام به اندازه $n > 1$ که شامل n مشاهده مستقل $(X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tn})$ می‌باشد، رتبه انحراف مشاهدات از میانگین (R_{tj}^+) و نیز آماره رتبه علامت‌دار هر نمونه (ψ_t) به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$I(u) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } u \text{ درست است} \\ 0 & \text{اگر } u \text{ غلط است} \end{cases} \quad (۲)$$

$$R_{tj}^+ = 1 + \sum_{i=1}^n I(|x_{ti} - \theta_0| < |x_{tj} - \theta_0|) \quad (۳)$$

$$\psi_t = \sum_{j=1}^n \text{sign}(x_{tj} - \theta_0) R_{tj}^+ \quad (۴)$$

چون آماره ψ_t رابطه‌ای خطی با آماره ویلکاکسون (w) دارد می‌توان مقدار این آماره را با استفاده از آماره ویلکاکسون به صورت زیر مشخص کرد:

$$\psi_t = 2w^+ - \frac{n(n-1)}{2} \quad (۵)$$

(Montgomery) [۳] نمودارهای شوهارتی با فاصله نمونه‌گیری متغیر را بررسی کرده‌اند. داس و همکاران (Das and et.al) [۴] طراحی آماری مشخصات نمودارهای شوهارتی با فاصله نمونه‌گیری متغیر را پیشنهاد داده‌اند.

در نمودارهای شوهارتی فقط از اطلاعات آخرین نمونه در بررسی فرایند استفاده شده و نمونه‌های قدیمی برای کنترل فرایند بکار نمی‌روند. این نمودارها حساسیت زیادی در تشخیص تغییرات کوچک یا متوسط فرایند ندارند. برای رفع این مشکل معمولاً از نمودارهایی چون جمع تجمعی (CUSUM) و میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) استفاده می‌شود که در آنها از اطلاعات نمونه‌های قبلی در کنترل فرایند استفاده می‌شود. رینولدز [۵]، رندتل (Rendtel) [۶] و ساکوسی و همکاران (Saccucci and et.al) [۷] اثر استفاده از روش فاصله نمونه‌گیری متغیر بر روی عملکرد نمودارهای CUSUM و EWMA را بررسی کرده‌اند.

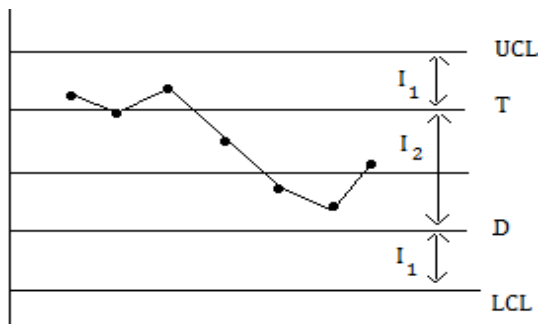
بیشتر مطالعاتی که در زمینه استفاده از روش فاصله نمونه‌گیری متغیر صورت گرفته است بر روی نمودارهایی چون نمودار \bar{X} و نمودارهای CUSUM و EWMA بوده است که به آنها نمودارهای پارامتری گفته می‌شود. در این نمودارها فرض بر این است که مشخصه فرایند از توزیع نرمال پیروی می‌کند و اگر این فرض صحیح نباشد عملکرد این نمودارها تغییر کرده و معمولاً عملکرد نمودار بدتر می‌شود.

با توجه به اینکه در بعضی از موارد این فرض صادق نبوده و توزیع مشخصه فرایند غیر نرمال و یا نامعلوم است، برای کنترل پارامترهای چنین توزیعهایی از نمودارهایی استفاده می‌شود که به فرض نرمال بودن توزیع و یا توزیع پارامتری خاص دیگری وابسته نیستند. این نمودارها، نمودارهای کنترل ناپارامتری (آزاد توزیع) نامیده می‌شوند.

آلووی و راجاواچاری (Alloway and Raghavachari) [۸] یک نمودار ناپارامتری شوهارتی برای کنترل میانه بر اساس تخمین زننده هوجز-لمان (Hodges-Lehmann) پیشنهاد کرده‌اند. امین و همکاران [۹] یک نمودار ناپارامتری با استفاده از آماره علامت (Sign) معرفی کرده‌اند. بکیر (Bakir) [۱۰] با استفاده از آماره رتبه علامت‌دار (Sign-Rank) یک نمودار ناپارامتری شوهارتی پیشنهاد کرده‌اند.

بیکر و رینولدز [۱۱] برای توسعه نموداری ناپارامتری از نوع CUSUM از آماره رتبه علامت‌دار ویلکاکسون (Wilcoxon Signed-Rank) استفاده کرده‌اند. چاکرابورتی و همکاران (Chakraborti and et.al) [۱۲] مرور کاملی بر روی انواع نمودارهای ناپارامتری و کاربردهای انجام داده‌اند. برای بهبود عملکرد نمودار ناپارامتری شوهارتی علامت نیز، امین و ویدمایر (Amin and Widmaier) [۱۳] از روش فاصله نمونه‌گیری متغیر

صورتیکه \bar{X} در ناحیه دوم (I_2) قرار گیرد فاصله زمانی تا نمونه‌گیری بعدی بلندتر و برابر مقدار مشخص d_2 می‌باشد. بنابراین اگر فرایند از کنترل خارج و میانگین فرایند تغییر کند، نمودار سریعتر اخطار خواهد داد. شکل ۱ حدود نمودار کنترلی \bar{X} با فاصله نمونه‌گیری متغیر را نشان می‌دهد.



شکل ۱. حدود کنترلی نمودار $VSI - \bar{X}$

حدود کنترلی نمودار $VSI - \bar{X}$ به صورت $\mu_0 \pm k \cdot \sigma / \sqrt{n}$ بوده که در آن مقدار $k=3$ می‌باشد، حدود T و D نیز مانند حدود بالا و پایین و با استفاده از $k=1$ محاسبه می‌شوند. رینولدز و همکاران [۱] برای محاسبه AATS نمودار $VSI - \bar{X}$ از رابطه زیر استفاده کرده‌اند:

$$AATS = \frac{\sum_{j=1}^n d_j^2 p_{0j}}{2 \sum_{j=1}^n d_j p_{0j}} + \frac{1}{q_1} \sum_{j=1}^n d_j p_{1j} \quad (10)$$

در رابطه ۱۰، مقادیر p_{01} و p_{02} به ترتیب احتمال قرار گرفتن نمونه در مناطق I_1 و I_2 در حالتی که فرایند تحت کنترل است و p_{11} و p_{12} به ترتیب احتمال قرار گرفتن نمونه در مناطق I_1 و I_2 در حالتی که فرایند خارج از کنترل است را نشان می‌دهند. q_1 نیز نشان‌دهنده احتمال قرار گرفتن نمونه خارج از حدود کنترل می‌باشد.

۴. نمودار رتبه علامت‌دار یکطرفه مثبت با فاصله

نمونه‌گیری متغیر

بگیر [۱۰] نشان داده است که نمودار رتبه علامت‌دار در کنترل میانگین توزیع‌های دنباله سنگین عملکرد بهتری از نمودار \bar{X} دارد اما این نمودار برای کنترل توزیع میانگین توزیع نرمال و توزیع‌هایی با دنباله سبکتر از نرمال مانند توزیع یکنواخت عملکرد مناسبی ندارد. در این مقاله برای بهبود عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار خصوصاً در کنترل توزیع‌های دنباله سبک از روش فاصله نمونه‌گیری متغیر استفاده می‌شود.

که در آن w^+ مجموع رتبه‌های تفاضل‌های مثبت می‌باشد. در تعیین حدود دو طرفه نمودار رتبه علامت‌دار باید توجه کرد که حد کنترلی پایین (LCL) این نمودار منفی و حد کنترلی بالای آن (UCL) مثبت بوده و در نمودار دو طرفه متقارن $LCL = -UCL$ می‌باشد. در نمودار یکطرفه مثبت (منفی) فقط حد کنترلی بالا (پایین) وجود دارد. در هر حالت اگر آماره آزمون از یکی از حدود کنترلی تجاوز کند فرایند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود.

در نمودار رتبه علامت‌دار طول دنباله برای نمودار دو طرفه (L^-) و یک‌طرفه مثبت (L^+) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L^+ = \min_t \{t; \psi_t \geq UCL\} \quad (6)$$

$$L^- = \min_t \{t; \psi_t \geq UCL \text{ یا } \psi_t \leq LCL\} \quad (7)$$

در نمودارهای رتبه علامت‌دار یک‌طرفه مثبت و دو طرفه، آماره ψ_t متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با پارامترهای p و p^+ بوده و بنابراین طول‌های دنباله در هر یک از این نمودارها (L^- و L^+) توزیع هندسی با پارامترهای p و p^+ دارند. با توجه به این موضوع متوسط طول دنباله (ARL) برای نمودار رتبه علامت‌دار یک‌طرفه مثبت و دو طرفه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$ARL^+ = E(L^+) = 1/p^+ \quad (8)$$

$$ARL^- = E(L^-) = 1/p = 1/(p^+ + p^-) \quad (9)$$

که در آن p^+ و p^- به ترتیب احتمال اخطاردهی نمودار به علت تجاوز نمونه از حدکنترلی بالا و پایین می‌باشند.

۳. نمودار \bar{X} با فاصله نمونه‌گیری متغیر

برای بررسی عملکرد نمودارهای کنترلی با فاصله نمونه‌گیری متغیر باید از معیار متوسط زمان اخطاردهی تعدیل شده (AATS) استفاده نمود. اگر فرض شود که انحرافات با دلیل دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است، مقدار AATS با استفاده از رابطه $AATS - \frac{1}{\lambda}$ محاسبه می‌شود.

رینولدز و همکاران [۱] برای بررسی عملکرد نمودار کنترلی \bar{X} با فاصله نمونه‌گیری متغیر ($VSI - \bar{X}$) از معیار AATS استفاده کرده‌اند. در نمودار $VSI - \bar{X}$ فاصله بین خط مرکزی (center line) و هر یک از حدود بالا و پایین به دو ناحیه تقسیم شده است. اگر میانگین نمونه (\bar{X}) در ناحیه اول (I_1) قرار گیرد فاصله زمانی برای نمونه‌گیری بعدی کوتاه و برابر مقدار مشخص d_1 و در

واریانس همه توزیع‌ها نیز برابر یک باشد. روابط ۱۱ تا ۱۴ به ترتیب توابع چگالی توزیعهای نرمال، یکنواخت، نمایی دوپل و کوشی را نشان می‌دهد.

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}} \quad -\infty < x < +\infty \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} \quad \theta - \lambda < x < \theta + \lambda, \lambda > 0 \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x-\theta|/\lambda} \quad -\infty < x < \infty, \lambda > 0 \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi[\lambda^2 + (x-\theta)^2]} \quad -\infty < x < \infty, \lambda > 0 \quad (14)$$

مقدار پارامتر λ در توزیعهای یکنواخت، نمایی دوپل و کوشی به ترتیب برابر $1/\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و $1/2605$ در نظر گرفته شده است. در نمودار VSI-SR مقدار حدی T در دو حالت محاسبه شده است. در حالت اول (حالت A) فرض شده است که در وضعیت تحت کنترل احتمال قرار گرفتن نمونه در هر دو منطقه تقریباً با هم برابر است ($p_{02} \approx p_{01}$) اما در حالت دوم (حالت B) فرض می‌شود احتمال قرار گرفتن نمونه در منطقه دوم بیشتر از منطقه اول است ($p_{02} \approx 1.5 * p_{01}$).

برای تعیین فواصل زمانی بین نمونه‌گیریها (d_1 و d_2) ابتدا مقدار d_1 به صورت دلخواه یکی از مقادیر $0/1$ ، $0/3$ و $0/5$ انتخاب شده و مقدار d_2 با استفاده از احتمالات p_{01} و p_{02} و روابط زیر مشخص می‌شود [۱].

$$d_1 * p_{01} + d_2 * p_{02} = 1 - q_0 \quad (15)$$

$$q_0 = \Pr(\psi_t \geq UCL | \theta = \theta_0) \quad (16)$$

با توجه به اینکه ممکن است مقدار d_2 در دو حالت A و B ازای d_1 یکسان متفاوت باشد، برای سهولت مقایسه در هر دو حالت از بیشترین مقدار d_2 استفاده می‌شود. همچنین مقیاس فاصله زمانی به جای مقدار زمان بر حسب واحد زمانی مشخص می‌شود که در این حالت فاصله زمانی بین دو نمونه‌گیری در حالت ثابت برابر یک واحد زمانی فرض می‌شود و بنابراین $0 < d_1 < 1 < d_2$ می‌باشد.

طراحی نمودار رتبه علامت‌دار با فاصله زمانی متغیر (VSI-SR) مانند طراحی نمودار \bar{X} با فاصله زمانی متغیر ($VSI - \bar{X}$) بوده و برای این کار ابتدا باید مناطق بالا و پایینی خط مرکزی مشخص شوند. از آن جا که در این مقاله نمودار رتبه علامت‌دار یک طرفه مثبت بررسی شده است، برای مشخص کردن مناطق فقط کافی است حدود UCL و T مشخص شوند.

برای بدست آوردن حدود UCL و T و نیز بررسی عملکرد نمودار VSI-SR یک برنامه کامپیوتری با استفاده از نرم‌افزار Minitab و MATLAB تهیه شده است که عملکرد نمودار را شبیه‌سازی می‌کند.

برای بررسی صحت و دقت نرم‌افزار طراحی شده و با توجه به وجود رابطه خطی بین آماره رتبه علامت‌دار (ψ_t^+) و آماره ویلکاکسون (w^+)، حد کنترلی بالای نمودار رتبه علامت‌دار (SR) یکبار با استفاده از جداول محاسبه احتمالات آماره ویلکاکسون و بار دیگر با استفاده از برنامه شبیه‌سازی محاسبه شده است. برای محاسبه حد بالای نمودار با یک $ARL(0)$ مشخص، در روش شبیه‌سازی ابتدا یک مقدار اولیه برای حد بالا انتخاب و مقدار $ARL(0)$ نمودار در این حالت تعیین شده است. سپس با تغییر مقدار حد بالای نمودار و به روش سعی و خطا حد بالایی که در آن نمودار دارای $ARL(0)$ مشخص شده است، تعیین شده است. در شبیه‌سازی، احتمال هر یک از نواحی در حالت تحت کنترل و نیز مقادیر AATS با 10000 بار تکرار محاسبه شده است. مقایسه حدود بدست آمده از دو روش جداول ویلکاکسون و شبیه‌سازی نشان می‌دهد که حدود بدست آمده از هر دو روش تقریباً یکسان بوده و روش شبیه‌سازی نسبت به روش خطایی کمتر از ۲٪ دارد، بنابراین می‌توان با اطمینان برای محاسبه حدود UCL و T و نیز بررسی عملکرد نمودار VSI-SR از برنامه شبیه‌سازی استفاده کرد.

در بررسی‌های انجام شده اندازه نمونه برابر $n=5$ ، طول متوسط دنباله در حالت تحت کنترل $ARL^+=32$ و حد بالای نمودار $UCL=15$ در نظر گرفته شده است. همچنین عملکرد نمودار VSI-SR با چهار توزیع مختلف نرمال، یکنواخت، نمایی دوپل و کوشی بررسی شده است.

مقیاس و پارامترهای هر توزیع به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که مقدار تحت کنترل (θ_0) برای همه توزیع‌ها برابر صفر و

جدول ۱. مقادیر حدی T در نمودار VSI-SR

	یکنواخت		نرمال		نمایی دوپل		کوشی	
	A	B	A	B	A	B	A	B
T	۱	۳	۱	۳	۱	۳	۱	۳
P_{01}	۰/۴۶۵۸	۰/۳۶۹۳	۰/۴۷۷۱	۰/۳۷۸۲	۰/۴۶۹۳	۰/۳۷۶۹	۰/۴۶۳۶	۰/۳۷۲۳
P_{02}	۰/۵۰۲۷	۰/۵۹۷۳	۰/۴۹۴۷	۰/۵۹۵۴	۰/۴۹۹۹	۰/۵۹۲۳	۰/۵۰۵۱	۰/۵۹۶۳

جدول ۲. مقادیر AATS نمودارهای یکطرفه مثبت \bar{X} و FSI-SR و VSI-SR (در دو حالت A و B) تحت توزیع یکنواخت

تغییرات $(\theta - \theta_0)$	نمودار \bar{X} UCL=0/833	نمودار FSI-SR	A			B		
			(0/5 و 1/5)	(0/3 و 1/7)	(0/1 و 1/9)	(0/5 و 1/5)	(0/3 و 1/7)	(0/1 و 1/9)
0	32	32	32	32	32	32	32	32
0/2	10/77	17/01	14/60	12/72	12/87	16/62	16/47	16/34
0/4	4/26	9/66	7/33	6/43	5/57	16/62	16/47	16/34
0/6	1/77	5/78	4/11	3/45	2/83	4/41	3/88	3/38

جدول ۳. مقادیر AATS نمودارهای یکطرفه مثبت \bar{X} و FSI-SR و VSI-SR (در دو حالت A و B) تحت توزیع نرمال

تغییرات $(\theta - \theta_0)$	نمودار \bar{X} UCL=0/833	نمودار FSI-SR	A			B		
			(0/5 و 1/5)	(0/3 و 1/7)	(0/1 و 1/9)	(0/5 و 1/5)	(0/3 و 1/7)	(0/1 و 1/9)
0	32	32	32	32	32	32	32	32
0/2	11/19	14/04	12/14	11/48	10/86	13/52	13/40	13/31
0/4	4/5	6/66	5/26	4/69	4/15	5/70	5/34	5
0/6	1/82	3/46	2/58	2/21	1/89	2/8	2/51	2/25

جدول ۴. مقادیر AATS نمودارهای یکطرفه مثبت \bar{X} و FSI-SR و VSI-SR (در دو حالت A و B) تحت توزیع نمایی دوپل

تغییرات $(\theta - \theta_0)$	نمودار \bar{X} UCL=0/84	نمودار FSI-SR	A			B		
			(0/5 و 1/5)	(0/3 و 1/7)	(0/1 و 1/9)	(0/5 و 1/5)	(0/3 و 1/7)	(0/1 و 1/9)
0	32	32	32	32	32	32	32	32
0/2	12/40	9	7/38	6/84	6/34	8/51	8/32	8/17
0/4	4/84	3/82	3/05	2/74	2/46	3/35	3/14	2/95
0/6	1/99	1/69	1/55	1/43	1/35	1/66	1/57	1/50

جدول ۵. مقادیر AATS نمودارهای یکطرفه مثبت \bar{X} و FSI-SR و VSI-SR (در دو حالت A و B) تحت توزیع کوشی

تغییرات $(\theta - \theta_0)$	نمودار \bar{X} UCL=2/6	نمودار FSI-SR	A			B		
			(0/5 و 1/5)	(0/3 و 1/7)	(0/1 و 1/9)	(0/5 و 1/5)	(0/3 و 1/7)	(0/1 و 1/9)
0	32	32	32	32	32	32	32	32
0/2	26/51	4/15	3/47	3/19	2/94	3/8	3/63	3/49
0/4	24/52	1/18	1/29	1/25	1/24	1/38	1/35	1/35
0/6	23/46	0/49	0/92	0/96	1/03	0/97	1/01	1/07

A بهتر است. حالت A مشابه روشی است که رینولدز و همکاران [۱] در تعیین حد T در نمودار \bar{X} -VSI بکار برده‌اند.

- در تعیین فواصل زمانی نمونه‌گیری در همه توزیعها هر چقدر d_1 کوچکتر و d_2 بزرگتر باشد، مقدار AATS نمودار VSI-SR کمتر و عملکرد نمودار بهتر می‌باشد.
- عملکرد نمودار VSI-SR به ازای همه توزیعهای دنباله سبک و سنگین از نمودار FSI-SR بهتر است.
- عملکرد نمودار VSI-SR در تشخیص تغییرات مرتبط با توزیعهای دنباله سنگین نسبت به نمودار \bar{X} بهتر بوده و بعضی از تغییرات توزیع دنباله سبک نرمال را نیز سریعتر از نمودار \bar{X} کشف می‌کند.

جدول ۱ مقادیر حدی T را در دو حالت A و B و تحت توزیع های مختلف دنباله سبک و سنگین نشان می‌دهد.

با توجه به مقاله امین و همکاران [۱۳] می‌توان برای محاسبه مقادیر AATS نمودار VSI-SR و نمودار FSI-SR از رابطه (۱۰) استفاده کرد. مقادیر AATS نمودار \bar{X} با فاصله نمونه‌گیری ثابت، نمودار FSI-SR و نمودار VSI-SR در دو حالت A و B به ازای مقادیر مختلف تغییر در میانگین و تحت توزیعهای مختلف محاسبه و در جداول ۲ تا ۵ نشان داده شده است. با بررسی این مقادیر نتایج زیر بدست آمده است:

- با مقایسه عملکرد نمودار VSI-SR در دو حالت A و B مشخص می‌شود که عملکرد نمودار در همه توزیعها در حالت

- [8] Alloway, J.A., Raghavachari, M., "Control Chart Based on Hodges-Lehman Estimator", *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, 1991, pp. 336-347.
- [9] Amin, R.W., Reynolds, M.R., Bakir, S.T., "A Nonparametric Procedure for Process Control Based on the Sign Statistic", *Communication in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 24, 1995, pp. 1597-1623.
- [10] Bakir, S.T., "A Distribution-Free Shewhart Quality Control Chart Based on Signed-Ranks", *Quality Engineering*, Vol. 18, No. 4, 2004, pp. 613-623.
- [11] Bakir, S.T., Reynolds, M.R., "A Nonparametric Procedure for Process Control Based on Within-Group Ranking", *Technometrics*, Vol. 21, No. 2, 1979, pp. 175-183.
- [12] Chakraborti, S.V., Bakir, S.T., "Nonparametric Control Chart: An Overview and Some Results", *Journal of Quality Technology*, Vol. 33, No. 3, 2001, pp. 304-315.
- [13] Amin, R.W., Widmaier, O., "Sign Control Charts with Variable Sampling Intervals", *Communication in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 28, No. 8, 1999, pp. 1961-1985.

با توجه به نتایج بالا و عملکرد مطلوب نمودار VSI-SR می‌توان از این نمودار در کنترل مرکزیت فرایند بدون توجه به توزیع آن استفاده کرد.

۵. نتیجه‌گیری

استفاده از نمودار رتبه علامت‌دار (SR) در کنترل پارامتر مرکزیت در مقایسه با نمودار \bar{X} که عملکردش به توزیع داده‌ها وابسته است، ساده‌تر بوده اما عملکرد آن در کنترل میانگین توزیع‌های دنباله سبک مناسب نیست. در این مقاله اثر فاصله نمونه‌گیری متغیر بر روی بهبود عملکرد نمودار رتبه علامت‌دار بررسی شده و برای این منظور از یک برنامه کامپیوتری که عملکرد نمودار را شبیه‌سازی می‌کند استفاده شده است. استفاده از نمودار رتبه علامت‌دار با فاصله نمونه‌گیری متغیر (VSI-SR) باعث می‌شود که تغییرات میانگین سریعتر شناسایی شده و در نتیجه عملکرد نمودار VSI-SR در همه توزیع‌ها از نمودار رتبه علامت‌دار با فاصله نمونه‌گیری ثابت (FSI-SR) بهتر باشد. همچنین عملکرد نمودار VSI-SR در کشف تغییرات میانگین توزیع‌های دنباله سنگین و بعضی تغییرات توزیع دنباله سبک نرمال از نمودار \bar{X} بهتر می‌باشد.

مراجع

- [1] Reynolds, M.R., Raid, Jr., Amin, R.W., Arnold, Jesse C., Nachlas, Joel A., " \bar{X} Charts with Variable Sampling Interval", *Technometrics*, Vol. 30, No. 2, 1988, pp. 181-192.
- [2] Runger, G.C. & Pignatiello, J.J., "Adaptive Sampling for Process Control", *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 2, 1991, pp. 135-155.
- [3] Runger, G.C., Montgomery, D.C., "Adaptive Sampling Enhancement for Shewhart Control Chart", *IIE Transaction*, Vol. 25, No. 3, 1993, pp. 41-51.
- [4] Das, T.K., Jain, V., Gosavi, A., "Economic Design of Dual-Sampling Interval Policies for \bar{X} Charts with and without Run Rules", *IIE Transaction*, Vol. 29, 1997, pp. 497-506.
- [5] Reynolds, M.R., Amin, R.W., Arnold, J.C., "CUSUM Charts with Variable Sampling Interval", *Technometrics*, Vol. 32, 1990, pp. 371-384.
- [6] Rendtel, U., "CUSUM Schemes with Variable Sampling Interval and Sample Size", *Statistical Papers*, Vol. 31, 1990, pp. 103-118.
- [7] Saccucci, M.S., Amin, R.W., Lucas, J.M., "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes with Variable Sampling Intervals", *Communication in Statistics: Simulation and Computation*, Vol. 21, 1992, pp. 627-657.

