International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2013)

August 2013, Volume 24, Number 2
pp. 215-223

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

Calculate the Uncertainty Interval Based on Entropy and Dempster Shafer Theory of Evidence

E. Pasha*, H. Mostafaei , M. Khalaj , F. Khalaj

Eainollah Pasha, *Professor, Kharazmi University. Faculty of Mathematical and Computer Science*
Hamidreza Mostafaei, *Assistant Professor, The Islamic Azad University, North Tehran Branch, hrmostafaei@yahoo.com*
Mehran Khalaj, *Phd Condidate on Engineering at Azad University, mehran5_k@yahoo.com*
Fereshteh Khalaj. *student the MA statistics, fereshteh_khalaj61@yahoo.com*

Keywords

Epistemic uncertainty،
Aleatory uncertainty،
Dempster-Shafer theory،
Shannon entropy

ABSTRACT

Dempster Shafer theory and entropy are two methods for representation and quantitative measurement of the uncertainty in information systems. Dempster Shafer theory, as introduced by Dempster using the concept of upper and lower probabilities, extended later by Shafer. Entropy is a measure of uncertainty as a basic concept in the information theory. Entropy can be applied as an uncertainty measurement of the systems in specific situation. In this paper, a new method has been proposed for measurement of the uncertainty upper and lower bound with the combination of mathematical models of entropy and Dempster Shafer theory. According to this analysis maximum and minimum of the uncertainty are calculated.

* Corresponding author. Eainollah Pasha
Email: *Pasha@saba.tmu.ac.ir*

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــریت تولیـــد

شمـــاره ۲، جلـــد ۲۴، شهـــریور ۱۳۹۲
صفحـــــه ۲۲۳-۲۱۶

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

محاسبه فاصله عدم قطعیت بر پایه آنتروپی شانون و تئوری دمپستر-شافر از شواهد

عین اله پاشا*، حمیدرضا مصطفایی، مهران خلج و فرشته خلج

کلمات کلیدی

عدم قطعیت epistemic[۱]،
عدم قطعیت aleatory[۲]،
تئوری دمپستر شافر،
آنتروپی شانون

چکیده:

تئوری دمپستر شافر و آنتروپی دو روش مهم در اندازه گیری و به کمیت درآوردن عدم قطعیت سیستم های اطلاعاتی است. تئوری دمپستر شافر با استفاده از مفهوم احتمالات بالایی و پایینی توسط دمپستر پایه گذاری شد و سپس شافر آن را به عنوان یک نظریه ارائه داد. آنتروپی نیز مفهومی اساسی در تئوری اطلاعات به کار گرفته می شود. در این مقاله روشی جدید برای اندازه گیری کران های بالایی و پایینی عدم قطعیت با ترکیب دو معیار آنتروپی و تئوری دمپستر شافر ارائه شده است. بر اساس این روش، ماکزیمم و مینیمم عدم قطعیت محاسبه شده است.

۱. مقدمه

عدم قطعیت مفهومی است که تصمیم گیرنده همواره در فرایند تصمیم گیری با آن روبرو است. بـه علت وجـود عـدم قطعیت، جزئیاتی غیر قطعی در مسأله بیان می شود که به واسطه آن نمی-توان پارامترهای سیستم را بـه درسـتی تعیـین کـرد. مـدل هـای ریاضی متعددی برای بررسی عدم قطعیت سیستم هـا و فرآینـدها ارائه شده است و در آنها تلاش شده تا عدم قطعیت حتی الامکـان کاهش پیدا کند واز طریق آن اطلاعات کیفی و کمی در مورد یک موضوع خاص کنترل شده و خروجی هـای مـدل قابـل ارزیـابی و کنترل شوند.

تاریخ وصول: ۸۹/۷/۲۶
تاریخ تصویب: ۹۰/۱۲/۸

***نویسنده مسئول مقاله:** **دکتر عین اله پاشا**، استاد، دانشگاه تربیت معلم
Pasha@saba.tmu.ac.ir
دکتر حمیدرضا مصطفایی، استادیار دانشگاه تربیت معلم،
hrmostafaei@yahoo.com
مهران خلج، دانشجوی دکتری دانشگاه علوم تحقیقات
mehran5_k@yahoo.com
فرشته خلج، دانشجوی فوق لیسانس، *fereshteh_khalaj61@yahoo.com*

[۱] شناختیک
[۲] کتره ای

تئوری عدم قطعیت به عنوان گرایشـی در ریاضـیات، بـه مطالعـه عدم قطعیت در سیستم ها می پردازد [۱۰].

شکل‌های مختلفی ازعدم قطعیـت وجـود دارد و خیلـی ضـروری است که قبل از هر نوع تصمیمی نوع آن بر اساس مقدار و صحت اطلاعات در دسترس شناخته وگروه بندی شود، به طور کلی انواع مختلف عدم قطعیت برخاسته از دو منبع متفاوت است که عموما تحت عناوین عدم قطعیت epistemic و aleatory طبقـه بنـدی می شوند [۱].

عدم قطعیت aleatory یا عدم قطعیت مربوط به تنـوع طبیعـی[۲]، اشاره به تصادفی بودن مشاهدات در طبیعت دارد کـه مربـوط بـه ذات طبیعت می باشد و با عنـاوین عـدم قطعیـت بیرونـی، عـدم قطعیت ذاتی، عدم قطعیت هـدف، عـدم قطعیـت تصـادفی، عـدم قطعیت اتفاقی، عـدم قطعیـت غیـر قابـل تقلیـل، عـدم قطعیـت بینادی، عدم قطعیت دنیای واقعی، شناخته می شود. عدم قطعیت epistemic یا عدم قطعیت دانش[۳]، وضعیت دانـش یـک سیسـتم فیزیکی و توانایی در اندازه گیری و به مدل درآوردن عدم قطعیت را بررسی می کند. این نوع عـدم قطعیـت بـا عنـوان هـای عـدم قطعیـت تـابعی، عـدم قطعیـت داخلـی، عـدم قطعیـت ذهنـی،

[2] *Natural variability*
[3] *Knowledge uncertainty*

ناتمامیت، شناخته می شود [۴]. غالبا از تئوری احتمال برای نمایش عدم قطعیت aleatory و epistemic استفاده می شود [۵-۷] و برای نمایش عدم قطعیت epistemic از تئوری احتمال، تئوری دمپستر شافر، تجزیه و تحلیل بازه ها، تئوری امکان و مجموعه های فازی استفاده می شود[۱۴].

مزیت مهم تئوری دمپستر شافر این است که با استفاده از آن می‌توان عدم قطعیت epistemic را بررسی و کمی کرد. در این تئوری قوانینی برای ترکیب اطلاعات از منابع مختلف ارائه شده است که معروف ترین آنها قانون ترکیب دمپستر می باشد. با توجه به اینکه اطلاعات مورد استفاده در سیستم ها بر پایه تحلیل آماری است، می توان از مدل عدم قطعیت احتمالی برای مدیریت اطلاعات و نمایش ریاضی عدم قطعیت سیستم ها استفاده کرد. در این خصوص تئوری دمپستر شافر به عنوان ابزاری برای آنالیز عدم قطعیت در تئوری احتمالات نادقیق، استفاده می شود [۱۴]. همچنین تئوری مدل های آماری بازه ای [۸]، تئوری احتمالات بازه ای [۱۳] از جمله چارچوب هایی است که کران های احتمالات بالایی و پایینی را در احتمالات نادقیق مهیا می کنند. در بحث بررسی عدم قطعیت آنتروپی نیز کاربرد دارد، آنتروپی یک اندازه کمی از درجه عدم قطعیت ارائه می دهد. آنتروپی فازی با الهام گرفتن از آنتروپی شانون برای تعیین عدم قطعیت ناشی از کمبود اطلاعات و حل مشکلات تصمیم گیری پیشنهاد شده است [۲]. در این زمینه آنتروپی از سه دیدگاه آنتروپی ماکزیمم، آنتروپی مینیمم و مقدار کل آنتروپی در موارد متناهی و غیر متناهی مورد بررسی قرار می گیرد[۹].

این مقاله در پنج بخش ارائه می شود. در بخش اول مقدمه بیان شد ،در بخش دوم تئوری دمپستر شافر با استفاده از مثالی کاربردی توضیح داده می شود. در بخش سوم آنتروپی به عنوان معیار بررسی عدم قطعیت در احتمالات کلاسیک توضیح داده می شود. در بخش چهارم با استفاده از یک روش ابتکاری دو معیار آنتروپی و تئوری دمپستر شافر با هم ترکیب و روشی جدید جهت بررسی عدم قطعیت پیشنهاد شده است. بخش پنجم مربوط به نتیجه گیری می شود.

۲. تئوری دمپستر شافر

نظریه ریاضی شواهد، توسط دمپستر (۱۹۶۷) معرفی شد [۳] و به وسیله شافر (۱۹۷۶) بسط داده شده است [۱۱]. این تئوری با بحث درباره باورهای موجود از یک وضعیت و یا سیستمی از وضعیت ها، حائز اهمیت می باشد. باورها در مورد پیشامدها یکسان نیستند اما به کمک این نظریه می توان شواهد موجود از وضعیت ها را در یک روش مشابه بررسی و ترکیب کرد. تئوری دمپستر شافر بر اساس باوری است که از شواهد نتیجه می شود بطوریکه ساختار باور تئوری شاهد به مدل احتمال کلاسیک مربوط می شود[۱۱]. از مفاهیم مقدماتی موجود در رابطه با شواهد، می توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱-۲. چارچوب تشخیص

فرض کنید θ یک مجموعه متناهی از عناصر است، یک عنصر می تواند یک فرضیه، یک هدف، یا موردی از وضعیت یک سیستم باشد. θ را چارچوب تشخیص می نامیم. مجموعه توان θ، به وسیله $\Omega(\theta)$ معین می شود. به عنوان مثال فرض کنید $\theta=\{a,b,c\}$.

$$\Omega(\theta)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \quad (۱)$$

Φ مجموعه تهی که بر وضعیت سیستم بی نقص دلالت می‌کند. $A=\{a,b\}$ زیر مجموعه ای از θ است، یعنی $A\subset\theta$. A نقص سیستم در a یا b را بیان می کند و θ نقص سیستم در a، b یا c را بیان می کند.

۲-۲. تابع جرم، عناصر کانونی و عناصر هسته اصلی

تابع جرم را با m مشخص می کنند که به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$m: \Omega(\theta)\rightarrow[0,1] \quad (۲)$$

$$m(\Phi)=0 \quad (۳)$$

$$\sum_{A\subset\Omega(\theta)} m(A)=1 \quad (۴)$$

تابع جرم m را یک تابع تخصیص احتمال اولیه (bpa)[۱] می‌نامند. $m(A)$ بیانگر نسبت سهم مجموعه A از تمام شواهد مربوطه و در دسترس است و از ادعایی که در مورد عنصر خاصی از θ و متعلق به مجموعه A است، (متعلق به مجموعه A و نه به زیرمجموعه خاصی از A)، پشتیبانی می کند. در بررسی وضعیت دارای نقص سیستم، $m(A)$ می تواند به عنوان درجه باوری مطرح شود که توسط مشاهده مربوط به نقصی خاص، حاصل شده است. ممکن است اطلاعات و یا شواهد متفاوت، درجات متفاوتی از باور را نسبت به نقص داده شده، ایجاد کنند. هر زیر مجموعه A از θ یک عنصر کانونی نامیده می شود به

1 *Basic probability assignment*

طوریکه $m(A)>0$، همچنین $c=\bigcup_{m(A)\neq 0} A$ یک عنصر هسته ای از تابع جرم در θ نامیده می شود.

۳-۲. توابع باور[1] و موجه بودن [2]

تابع باور به صورت زیر تعریف می شود:

$$Bel:\Omega(\theta)\to[0,1] \qquad (۵)$$

$$Bel(A)=\sum_{B\subset A} m(B) \qquad (۶)$$

تابع موجه بودن به صورت زیر تعریف می شود:

$$Pl(A):\Omega(\theta)\to[0,1] \qquad (۷)$$

$$Pl(A)=1-Bel(\bar{A})=\sum_{B\cap A\neq\Phi} m(B) \qquad (۸)$$

تابع $Bel(A)$ مقدار کل احتمالی که باید در میان عناصری از A باشد را اندازه گیری می کند و به معنای حتمیت و معنی داری از باور A و به منزله حد پایینی روی احتمال A است.

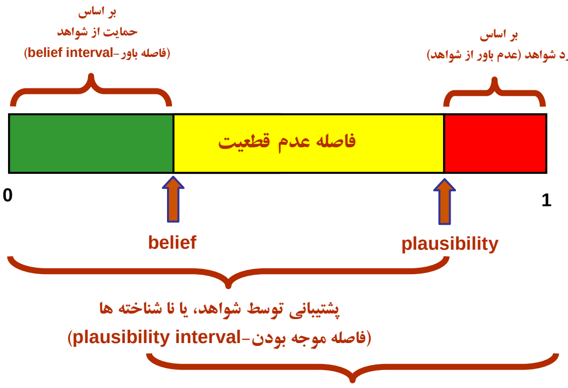
تابع $pl(A)$ حداکثر مقدار احتمالی را که می تواند در میان عناصر A توزیع شود را اندازه گیری می کند. $pl(A)$ درجه باور کلی مربوط به A را توصیف می کند و به منزله تابع حد بالایی روی احتمال A است.

۴-۲. بازه باور[3] $[Bel(A),Pl(A)]$

این فاصله، فاصله باور عدم قطعیت را منعکس می کند و اندازه فاصله $Pl(A)-Bel(A)$ نادانسته های مربوط به A را توصیف می کند. همانطور که در جدول (۱) به شرح ذیل ملاحظه می شود، بازه های باور متفاوت معنای متفاوتی را در بر خواهند داشت. تابع موجه بودن به واسطه تابعی به نام شک[4]، به تابع باور مرتبط شده و بر طبق رابطه زیر به صورت تعریفی از باور بیان می‌شود:

$$\begin{cases} Pl(A)=1-Bel(\bar{A}) \\ Pl(A)=1-Doubt(A) \end{cases} \qquad (۹)$$

1 beleif
2 plausibility
3 Belief interval
4 Doubt



نمودار ۱. فاصله باور عدم قطعیت

جدول ۱. بازه های باور و مفاهیم مرتبط به هر بازه

مطمئنا هیچ حمایتی از فرضیه نمی شود.	[0,0]
از فرضیه به طور مطلق پشتیبانی می کنیم.	[1,1]
اطلاعات مطلقا ناشناخته است و نمی توان استدلالی از شواهد داشت.	[0,1]
حمایت از فرضیه و تصمیم گیری	
متمایلیم از فرضیه حمایت کنیم.	[0,3,1]
حمایت از فرضیه، کاهش می یابد.	[0,0,6]

۵-۲. برخی از خواص توابع باور و موجه بودن:

$$\begin{cases} Bel(\Phi)=Pl(\Phi)=0 \\ Bel(A)+Bel(\bar{A})\le 1 \end{cases} \qquad (۱۰)$$

$$\begin{cases} Pl(A)\ge Bel(A) \\ Pl(A)+pl(\bar{A})\ge 1 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

اگر $A\subset B$ آنگاه:

$$\begin{cases} Pl(A)<Pl(B) \\ Bel(A)<Bel(B) \end{cases} \qquad (۱۲)$$

۶-۲. قوانین ترکیب شواهد

فرض کنید m_1 و m_2 دو تابع جرم به دست آمده از دو منبع اطلاعات متفاوت، بر اساس اطلاعات در دسترس باشد. چارچوب تشخیص θ برای هر دو منبع اطلاعاتی، یکسان است. مطابق با قانون متعامد دمپستر [۱۱] داریم؛

$m(\Phi)=0$

$$m(A)=\frac{1}{1-k}\sum_{B\cap C=A} m_1(B)\cdot m_2(C) \quad (۱۳)$$

بطوریکه:

$$k=\sum_{B\cap C=A} m_1(B)\cdot m_2(C)>0 \quad (۱۴)$$

k جرم احتمال پایه مربوط ناسازگاری میان منابع شواهد را ارائه می دهد. طبق رابطه (۱۴)، k از مجموع ضرب توابع جرم تمام زیر مجموعه هایی که اشتراک آنها تهی است، به دست می آید. عموما k را به عنوان اندازه ناسازگاری بین منابع اطلاعات تفسیر می کنند. مقدار بزرگتر k بیانگر ناسازگاری بیشتر منابع است. مخرج $1-k$ در تساوی (۱۲)، فاکتور نرمال کردن[1] است. m نیز، تابع جرم در چارچوب تشخیص یکسان θ می باشد.

توجه کنید که جمع متعامد $m=m_1\oplus m_2$، ترکیب m_1 و m_2 را نشان می دهد و اطلاعات مشترکی از دو منبع را در بردارد. در ترکیب شواهد روابط زیر برقرار است:

$$m_1\oplus m_2=m_2\oplus m_1 \quad (۱۵)$$

$$m_1\oplus(m_2\oplus m_3)=(m_1\oplus m_2)\oplus m_3 \quad (۱۶)$$

به طور کلی برای n تابع جرم $m_1,m_2,\ldots,m_n$ اندازه ناسازگاری k به صورت زیر داده می شود:

$$k=\sum_{\bigcap_{i=1}^{n}E_i=\Phi} m_1(E_1)\cdot m_2(E_2)\cdot\ldots\cdot m(E_n)>0 \quad (۱۷)$$

پس ترکیب تابع جرم به صورت زیر است:

$$m(A)=(m_1\oplus m_2\oplus\ldots m_n)(A)=$$
$$\frac{1}{1-k}\sum_{\bigcap_{i=1}^{n}E_i=A} m_1(E_1)\cdot m_2(E_2)\ldots m_n(E_n)$$

مثال ۱. نتایج به دست آمده از بررسی نقص فنی خودرو با توجه به سه قطعه اصلی به کار گرفته شد در خودرو به صورت زیر می‌باشد. با در نظر گرفتن سه قطعه تولید شده a,b,c توسط یک شرکت تولید قطعات خودرو، چارچوب تشخیص به صورت a,b,c در نظر گرفته می شود. چارچوب تشخیص θ شامل ۸ زیرمجموعه ϕ (مجموعه تهی)، $\{a\}$ و $\{b\}$ و $\{c\}$ و $\{a,b\}$ و $\{b,c\}$ و $\{a,c\}$ و $\{a,b,c\}$ می باشد. بنا به شواهد، احتمال نقص در کارکرد هر یک از این مجموعه ها، توسط کارشناسان به صورت گزارش شده است.

اطمینان از نقص قطعه a، ۷۰٪ و در نقص قطعه a یا b ۲۰٪ است، بنابراین نادانسته ما ۱۰٪ می باشد. عناصر کانونی فرضیه A به صورت، $m(A)_a=0.7$، $m(A)_{a,b}=0.2$ است.

بنابراین $m_\theta(A)=0.1$ زیرا $m(A)_a+m(A)_{a,b}+m(A)_\theta=1$، می‌باشد. تابع تخصیص اولیه برای زیرمجموعه های دیگر صفر خواهد بود. توابع باور به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$bel(A)_a=m(A)_a=0.7$$
$$bel(A)_b=m(A)_b=0.0$$
$$bel(A)_c=m(A)_c=0.0$$
$$bel(A)_{a,b}=m(A)_a+m(A)_b+m(A)_{a,b}=$$
$$0.7+0.0+0.2=0.9$$
$$bel(A)_{a,c}=m(A)_a+m(A)_c+m(A)_{a,c}=0.7$$
$$bel(A)_{a,b,c}=m(A)_a+\ldots+m(A)_{b,c}=1.0$$
$$bel(A)_{b,c}=m(A)_b+m(A)_c+m(A)_{b,c}=0.0$$

توابع موجه بودن به صورت زیر محاسبه می شود:

$$pl(A)_a=m(A)_a+m(A)_{a,b}+m(A)_{a,c}+m(A)_\theta=1.0$$
$$pl(A)_b=m(A)_b+m(A)_{a,b}+m(A)_{b,c}+m(A)_\theta=0.3$$
$$pl(A)_c=m(A)_c+m(A)_{a,c}+m(A)_{b,c}+m(A)_\theta=0.1$$
$$pl(A)_{a,b}=m(A)_a+m(A)_b+m(A)_{a,b}+$$
$$m(A)_{a,c}+m(A)_{b,c}+m(A)_\theta=1.0$$
$$pl(A)_{a,c}=m(A)_a+m(A)_c+m(A)_{a,b}+$$
$$m(A)_{a,c}+m(A)_{b,c}+m(A)_\theta=1.0$$
$$pl(A)_{b,c}=m(A)_b+m(A)_c+m(A)_{a,b}+$$
$$m(A)_{a,c}+m(A)_{b,c}+m(A)_\theta=0.3$$

نتایج حاصل از بررسی احتمال نقص قطعات توسط دو کارشناس B و C به صورت زیر خلاصه شده است:

$$m_1(B)_a=0.7 \qquad m_2(C)_b=0.4$$
$$m_1(B)_{a,b}=0.2 \qquad m_2(C)_{b,c}=0.2$$
$$m_1(B)_\theta=0.1 \qquad m_1(B)_\theta=0.4$$

1 Normalization factor

جدول۲. با استفاده از قانون ترکیب دمپستر شافر، از اطلاعات منابع B و C، مقادیر جدول زیر به دست می آید

	$m_1(B)_a$ 0.7	$m_1(B)_b$ 0.0	$m_1(B)_c$ 0.0	$m_1(B)_{a,b}$ 0.2	$m_1(B)_{a,c}$ 0.0	$m_1(B)_{b,c}$ 0.0	$m_1(B)_\theta$ 0.1
$m_2(C)_a$ 0.0	$\{a\}$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{a\}$ 0.0	$\{a\}$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{a\}$ 0.0
$m_2(C)_b$ 0.4	$\{\phi\}$ 0.28	$\{b\}$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{b\}$ 0.08	$\{\phi\}$ 0.0	$\{b\}$ 0.0	$\{b\}$ 0.04
$m_2(C)_c$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{c\}$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{c\}$ 0.0	$\{c\}$ 0.0	$\{c\}$ 0.0
$m_2(C)_{a,b}$ 0.0	$\{a\}$ 0.0	$\{b\}$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{a,b\}$ 0.0	$\{a\}$ 0.0	$\{b\}$ 0.0	$\{a,b\}$ 0.0
$m_2(C)_{a,c}$ 0.0	$\{a\}$ 0.0	$\{\phi\}$ 0.0	$\{c\}$ 0.0	$\{a\}$ 0.0	$\{a,c\}$ 0.0	$\{c\}$ 0.0	$\{a,c\}$ 0.0
$m_2(C)_{b,c}$ 0.2	$\{\phi\}$ 0.14	$\{b\}$ 0.0	$\{c\}$ 0.0	$\{b\}$ 0.04	$\{c\}$ 0.0	$\{b,c\}$ 0.0	$\{b,c\}$ 0.02
$m_2(C)_\theta$ 0.4	$\{a\}$ 0.28	$\{b\}$ 0.0	$\{c\}$ 0.0	$\{a,b\}$ 0.08	$\{a,c\}$ 0.0	$\{b,c\}$ 0.0	$\theta = 0.04$

درجه ناسازگاری $K=0.28+0.14=0.42$

عامل نرمال کردن $1-K=0.58$

$$m_{1-2}(A)_a = 0.28/0.58 = 0.48$$

$$m_{1-2}(A)_b = (0.08+0.04+0.04)/0.58 = 0.27$$

$$m_{1-2}(A)_c = 0.0;\quad m_{1-2}(A)_{a,b} = 0.08/0.58 = 0.13;\quad m_{1-2}(A)_{a,c} = 0.0$$

$$m_{1-2}(A)_{b,c} = 0.02/0.58 = 0.03;\quad m_{1-2}(A)_\theta = 0.04/0.58 = 0.06$$

به طور مشابه، توابع باور و موجه بودن و فاصله عدم قطعیت حاصل از این توابع، به صورت جدول ذیل محاسبه می گردد:

جدول ۳. بازه های عدم قطعیت عناصر چارجوب تشخیص بر اساس دو منبع اطلاعات B و C

$subsets$	$m_{1-2}(A)$	$bel_{1-2}(A)$	$pl_{1-2}(A)$	$U_{1-2}(A)$
ϕ	0.0	0.0	1.0	$[0.0, 1.0]$
$\{a\}$	0.48	0.48	0.67	$[0.48, 0.67]$
$\{b\}$	0.27	0.27	0.49	$[0.27, 0.49]$
$\{c\}$	0.0	0.0	0.09	$[0.0, 0.09]$
$\{a,b\}$	0.13	0.88	0.97	$[0.88, 0.97]$
$\{a,c\}$	0.0	0.48	0.7	$[0.48, 0.7]$
$\{b,c\}$	0.03	0.3	0.49	$[0.3, 0.49]$
θ	0.06	1.0	1.0	$[1.0, 1.0]$

بر پایه شواهد از دو نمونه، می توان گفت که نقص فنی خودرو از قطعه a یا b است.

۳. آنتروپی شانون

شانون در [۱۲] نشان داد، آنتروپی به عنوان یک اندازه از سطح عدم قطعیت اطلاعات و تابعی از توزیع احتمال است. فرض کنیم $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$، با تابع توزیع $p(x)$ است، آنتروپی شانون به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot \log_2 p(x_i) \qquad (۱۹)$$

از جمله خواص آنتروپی می توان به چند مورد زیر اشاره کرد:
(۱): طبق قرارداد $0\log 0=0$.
(۲): در آزمایشی با $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ اگر $p(x_i)=1$، در نتیجه $H(X)=0$، در این حالت عدم قطعیتی وجود ندارد. اگر احتمال ها مساوی و به صورت، $p(x_i)=\frac{1}{n}$ برای $i=1,\dots,n$، در نظر گرفته شود، $H(X)$ ماکزیمم مقدار را خواهد داشت و $H(X)^{\max}=\log_2(n)$ می باشد. در این حالت مجموعه، ماکزیمم اندازه عدم قطعیت را خواهد داشت.
(۳) یکی دیگر از خواص مهم آنتروپی، برقراری رابطه زیر در بررسی عدم قطعیت هم زمان دو مقدار است $H(X,Y)\le H(X)+H(Y)$ و تساوی زمانی برقرار است که X,Y مستقل اند.

۴. آنتروپی و مقادیر احتمال بازه ای و نادقیق

فرض کنید در سیستمی n وضعیت متفاوت $s_1,s_2,\dots,s_n$، وجود دارد. بطوریکه سیستم می تواند در یکی از این وضعیت ها قرار داشته باشد. احتمال سیستم S در وضعیت s_i را با p_i مشخص می کنیم.

$$P(S\sim s_i)=p_i\ ,\ i=1,\ \dots,\ n. \qquad (۲۰)$$

اگر تمام مقادیر p_i ها در رابطه فوق مشخص باشد، آنتروپی سیستم به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$H=-\sum_{i=1}^{n} p_i\ Log\ p_i \qquad (۲۱)$$

در صورت استقلال، محاسبه آنتروپی کلی توسط جمع تک تک آنتروپی های سیستم صورت می گیرد و برای تعریف آنتروپی کلی لازم است که خاصیت جمع پذیری حفظ گردد. فرض کنیم به جای دانستن احتمال دقیق یک سیستم با مقداری فاصله ای از مقادیر احتمال روبرو باشیم. در اینجا از روشی ابتکاری جهت محاسبه آنتروپی یک سیستم استفاده می کنیم. سپس به بررسی خاصیت جمع پذیری آن را برای دو سیستم مستقل می پردازیم. فرض کردیم یک سیستم می تواند در n وضعیت باشد اما احتمالی که سیستم در i امین وضعیت قرار دارد احتمالات تک مقداری نیستند و یک بازه به صورت $\left[p_i^{\min}\ ,\ p_i^{\max}\right]$ می‌باشد با شرط:

$$\sum_i p_i=1 \qquad (۲۲)$$

و در حالی که احتمالات مقدار فاصله ای هستند می توان رابطه (۱۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_i p_i^{\min}\le 1\le \sum_i p_i^{\max} \qquad (۲۳)$$

به آسانی می توان نشان داد که رابطه (۱۸) حالت خاصی از (۱۹) می باشد وقتی $p_i^{\min}=p_i^{\max}$. در اینصورت احتمالات با $\left[p_1^{\min}\ ,\ p_1^{\max}\right],\left[p_2^{\min}\ ,\ p_2^{\max}\right],\dots,\left[p_n^{\min}\ ,\ p_n^{\max}\right]$ مقادیر فاصله ای و کران های بالایی و پایینی برای احتمالات $p_1,p_2,\dots,p_n$ می باشند.
با فرض $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ به عنوان چارچوب تشخیص و در نظر گرفتن $m(x_i)$ به عنوان bpa نقص سیستم در وضعیت i ام، $bel(x_i)$ و $pl(x_i)$ را به ترتیب به صورت جایگزینی برای $p_i^{\min}$ و $p_i^{\max}$ و به عنوان کران های بالایی و پایینی احتمال نقص در وضعیت i ام در نظر می گیریم. در این صورت بازه عدم قطعیت تعیین نقص وضعیت i ام بر پایه تکنیک نظریه دمپستر شافر و آنتروپی به صورت زیر به دست می آید؛ صورت عمومی شکل محاسبه می تواند به صورت زیر باشد:
گیریم، $\left[bel_1\ ,\ pl_1\right],\left[bel_2\ ,\ pl_2\right],\dots,\left[bel_n\ ,\ pl_n\right]$ احتمالات با مقادیر فاصله ای باشند، در این صورت کران های بالایی و پایینی عدم قطعیت را با توجه به شرایط زیر به دست می آوریم:

$$bel(x_i)\le p(x_i)\le pl(x_i)\ \ i=1,\dots,n \qquad (۲۴)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i)=1$$

$$\forall\ i: bel(x_i)\le pl(x_i)\Rightarrow -bel(x_i)\log bel(x_i)\ge -pl(x_i)\log\ pl(x_i) \qquad (۲۵)$$

$$H^{\max}=-\sum_{i=1}^{n} bel(x_i)\ Log\,bel(x_i) \qquad (۲۶)$$

$$H^{\min}=-\sum_{i=1}^{n} pl(x_i)\ Log\ pl(x_i) \qquad (۲۷)$$

مثال ۲) فرض کنید مقدار توابع باور و موجه بودن قرار گیری سیستم در وضعیت a، براساس bpa های به دست آمده از سه منبع اطلاعات به صورت زیر باشد. بر این اساس کران های بالایی و پایینی عدم قطعیت را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} bel(A)_a = 0.7 \\ pl(A)_a = 1.0 \end{cases} \quad \begin{cases} bel(B)_a = 0.6 \\ pl(B)_a = 1.0 \end{cases} \quad \begin{cases} bel(C)_a = 0.0 \\ pl(C)_a = 0.6 \end{cases}$$

$$H^{\min} = -(1.0 \times Log\ 1.0 + 1.0 \times Log 1.0 + 0.6 \times Log\, 0.6) = 0.13$$
$$H^{\max} = -(0.7 \times Log\ 0.7 + 0.6 \times Log\, 0.6 + 0.0 \times Log\, 0.0) = 0.24$$

بنابراین بازه عدم قطعیت در تعیین نقص وضعیت a، در سیستم مورد بررسی $[0.13, 0.24]$ می باشد. در فرمول (۲۷) رابطه $H^{\min} \le H^{\max}$ برقرار می باشد و $H = [H^{\min}, H^{\max}]$ فاصله عدم قطعیت را نشان می دهد. رابطه به دست آمده فوق با استفاده از تعریف سنتی آنتروپی یک سیستم با احتمالات تک مقداری است که به صورت بازه عدم قطعیت مقادیر فاصله ای بیان شد، هم اکنون خاصیت جمع پذیری را در تفسیری کلی از آنتروپی بررسی می کنیم. حفظ خاصیت جمع پذیری به معنای این است که اگر دو سیستم مستقل X و Y داشته باشیم آنتروپی سیستمی که از تلفیق سیستم های X و Y به دست آمده باشد برابر است با مجموع آنتروپی های تک تک X و Y. به عبارت دیگر همانطور که بیان شد در صورت برقراری خاصیت جمع پذیری داریم:

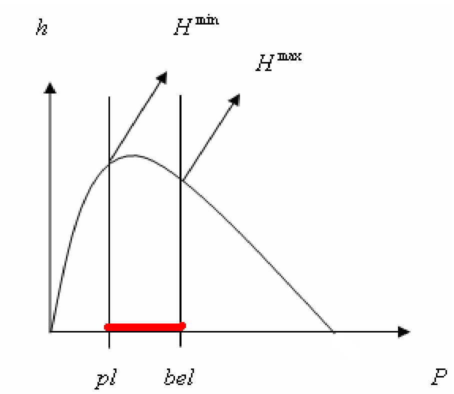
$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$. با در نظر گرفتن دو سیستم X و Y با وضعیت هایی مطابق با $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ و $P(Y \sim y_i) = r_j\ , i = 1, \ldots, m$ و $P(X \sim x_i) = p_i\ , i = 1, \ldots, n.$ و داریم:

$$\begin{aligned} H^{\min}(X,Y) &= -\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} pl(x_i, y_j)\ Log\ pl(x_i, y_j) \right) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} pl(x_i, y_j)\ Log\ pl(x_i)\ pl(y_j | x_i) \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} pl(x_i, y_j)\ Log\ pl(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} pl(x_i, y_j)\ Log\ pl(y_j | x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} pl(x_i)\ Log\ pl(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} pl(x_i, y_j)\ Log\ pl(y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} pl(x_i)\ Log\ pl(x_i) - \sum_{j=1}^{m} pl(y_j)\ Log\ pl(y_j) \\ &= H^{\min}(X) + H^{\min}(Y) \end{aligned} \tag{۲۸}$$

$$H^{\max}(X,Y) = -\left(\sum_{i=1}^{n} bel(x_i)\ Log\, bel(x_i) + \sum_{j=1}^{m} bel(y_j)\ Log\, bel(y_j) \right) = H^{\max}(X) + H^{\max}(Y) \tag{۲۹}$$

در نتیجه مقدار ماکزیمم و مینیمم عدم قطعیت براساس آنتروپی و دمپستر شافر، برای دو سیستم تلفیقی و مستقل تفاوت زیادی با میزان عدم قطعیت تک تک سیستم ها ندارد. در نتیجه حدود بالایی و پایینی ارزیابی شده برای عدم قطعیت برای دو سیستم مستقل محاسبه گردید.

می توان فاصله عدم قطعیت، با در نظر گرفتن کران های بالایی و پایینی احتمال در نمودار $h = -p \log p$، را به صورت زیر نمایش داد.



نمودار ۲. کران های بالایی و پایینی $h = -p \log p$

۵. نتیجه گیری

با توجه به ارتباط بین آنتروپی و تئوری دمپستر شافر شواهد در رابطه با موضوع بررسی عدم قطعیت، این مقاله با استفاده از ترکیب نظریه دمپستر شافر و آنتروپی، روشی جهت یافتن بازه عدم قطعیت برای وضعیت های متفاوت در سیستم ها پیشنهاد کرده است. از دلایل استفاده از روش دمپستر شافر می توان به توسعه نظری این روش در میان نظریه های غیر سنتی در بررسی عدم قطعیت اشاره کرد. همچنین وجود نمونه های کاربردی فراوان از آن در رویایی با عدم قطعیت epistemic در سیستم های مهندسی و قابلیت نمایش و ترکیب انواع متفاوت شواهد به دست آمده از منابع چندگانه، از دیگر مزایای استفاده از این روش می باشد.

از سویی دیگر آنتروپی یکی از راه های معنی دار اندازه گیری مقدار عدم قطعیت در مجموعه متناهی از شواهد به وسیله تابع توزیع احتمال آنها بوده و می توان ناسازگاری میان توزیع‌های احتمال منابع شواهد را به وسیله آن بیان کرد. از اینرو انتظار می رود تلفیق این دو روش و استفاده از آن در کاهش عدم قطعیت در تعیین نقص سیستم ها موثر واقع شود. به همین منظور در این مقاله ابتدا محاسبه آنتروپی برای مقادیر احتمالات فاصله‌ای (بازه‌ای) با استفاده از کران های بالایی و پایینی احتمال بررسی شده سپس با تفسیری متناظر برای جفت های دوتایی از توابع ($plausibility$ و $beleif$)، که ناشی از ساختارهای باور است، نمایشی جدید از اندازه گیری حدود عدم قطعیت بالایی و پایینی آنتروپی شانون بر اساس شواهد در بررسی سیستم ها به نمایش گذاشته شد.

۶. تشکر و سپاسگزاری

در پایان لازم است که از داوران محترم مقاله که با نظرات بسیار ارزشمند خود باعث غنای مقاله و اصلاحات اساسی آن شدند تقدیر و تشکر می نمائیم.

مراجع

[1] Croisarda, N., Vasilea. M., Kembleb, S., Radicea, G., *Preliminary Space Mission Design Under Uncertainty*, Acta Astronautica 66, 2010, pp. 654 - 664

[2] Dai, W., Chen, X., *Entropy of Function of Uncertain Variables*, Mathematical and Computer Modelling 55, 2012, pp. 754–760

[3] Dempster, A.P., *Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping*. Annals of Mathematical Statistics 38, 1967, pp. 325–339.

[4] Helton, J,C., *Uncertainty and Sensitivity Analysis in the Presence of Stochastic and Subjective Uncertainty*, J. Stat. Comput. Simul. 57, 1997.

[5] Helton, J.C., Johnson, J.D., *Quantification of Margins and Uncertainties: Alternative Representations of Epistemic Uncertainty*, Reliability Engineering and System Safety 96, 2011, pp. 1034–1052

[6] Helton, J.C., Johnson, J.D., Sallaberry, C.J., *Quantification of Margins and Uncertain-Ties: Example Analyses from Reactor Safety and Radioactive Waste Disposal Involving the Separation of Aleatory and Epistemic Uncertainty*. Reliability Engineering and System Safety; this issue. doi: 10.1016/ j.ress.2011.02.012.

[7] Helton, J.C., *Quantification of Margins and Uncertainties: Conceptual and Computational Basis*. Reliability Engineering and System Safety; this issue. doi:10.1016/j.ress.2011. 03.017.

[8] Kuznetsov, V.P., *Interval Statistical Models*. Moscow: Radio and Communication; 1991, in Russian

[9] Liu, B., *Asurvey of Entropy of Fuzzy Variables*, Journal of Uncertain Systems 1 (1), 2007, pp. 4–13.

[10] Liu, B., *Uncertainty Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[11] Shafer, G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, NJ, 1976.

[12] Shannon, C., Weaver, W., *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana: University of Illinois Press, 1949.

[13] Weichselberger, K., *The Theory of Interval-Probability as a Unifying Concept for Uncertainty*. Int J Approx Reason 2000; 24: 149–70.

[14] Zaman, K., Rangavajhala, S., McDonald, M.P., Mahadevan, S.A., *Probabilistic Approach for Representation of Interval Uncertainty*, Reliability Engineering and System Safety 96, 2011, pp. 117–130.