نشریه بین‌المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۱، جلد۱۹، بهار ۱۳۸۷، صفحه ۴۲-۳۷
ویژه‌نامه مهندسی صنـــایع

تحلیل واریانس فرآیند برای C_{pk} با وجود خودهمبستگی داده‌ها

پریوش بهمنی، سید محمد تقی فاطمی قمی و مسعود نیکوکار زنجانی

چکیده: یک فرض اساسی در کنترل فرآیند آماری و در تحلیل کارایی فرآیند، این است که مشاهدات گرفته از فرآیند مستقل باشند. هر چند بسیاری از فرآیندها درجه معینی از خود همبستگی را نشان می‌دهند، در این مقاله اثراتی که خود همبستگی روی واریانس فرآیند و ضریب کارایی ایجاد می‌نماید، مورد بحث واقع می‌شود و نشان داده می‌شود که وقتی خود همبستگی وجود دارد، برآورد واریانس نا اریب نیست. همچنین در این مقاله دو روش ساده برای محاسبه ضریب کارایی فرآیند توسعه داده شده است. روش اول بر اساس فرض زیرگروههای منطقی میانگین و تحلیل واریانس مذکور، بنا شده‌است. روش دوم براساس محاسبه ضریب کارایی فرآیند از طریق مدل اتورگرسیو ایجاد شده‌است.

واژه های کلیدی: تحلیل کارایی، برآورد، کنترل فرآیند آماری، خودهمبستگی

۱. مقدمه

در اغلب مواقع ترجیح داده می‌شود که کارایی فرآیند بصورت یک کمیت ارائه گردد. یکی از روشهایی که می‌توان برای بیان عملکرد یا کارایی فرآیند استفاده کرد نسبت کارایی فرآیند (Process Capability Ratio) می‌باشد. این نسبت برای یک مشخصه کیفی که دارای حدود مشخصات فنی قابل قبول بالا و پایین بصورت: $LSL < X < USL$ باشد، به نحو زیر محاسبه می‌شود:

$$C_p = PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \qquad (۱)$$

σ: انحراف معیار فرآیند

در عمل برای محاسبه این نسبت، انحراف معیار فرآیند نامعلوم است و از برآورد آن استفاده می‌شود. البته اگر نمودارهای کنترل متغیر در مطالعات کارایی فرآیند استفاده شود، آنگاه می‌توان انحراف معیار فرآیند را توسط رابطه زیر برآورد نمود:

$$\hat{C}_p = P\hat{C}R = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} \qquad (۲)$$

تعریف فوق توسط مونتگومری، کاتز و جانسون ارائه شده‌است[۱و۲]. در این منابع ضرایب دیگری نیز برای محاسبه کارایی فرآیند ارائه گردیده است. دو فرض اساسی و مهم در این حالت مستقل بودن و نرمال بودن توزیع مشاهدات است. که در این مقاله فرض می‌کنیم توزیع مشاهدات از توزیع نرمال پیروی کنند ولی در آنها خود همبستگی وجود داشته باشد. که در صورت وجود خود همبستگی بین مشاهدات درطول زمان، حتی خیلی کم، نمودارهای کنترل کارایی خود را از دست می‌دهند. متأسفانه در بعضی از فرآیندهای تولیدی، فرض وجود داده‌های مستقل حتی بصورت تقریبی نیز برقرار نیست.

در زمینه وجود خودهمبستگی در داده‌ها توسط هریس و روس روشهایی برای طراحی نمودارهای کنترل نیز بیان شده است[۳]. بنابراین ابتدا لازم است روی داده‌ها آزمون فرض ساده‌ای با فرضیه‌های زیر انجام دهیم:

$$\begin{cases} H_0 : \rho_k = 0 \\ H_1 : \rho_k \neq 0 \end{cases} \qquad (۳)$$

ρ_k: تابع خودهمبستگی است. که توضیح بهمراه مثال عددی انجام این آزمون توسط ویلر و هانتر مطرح شده است[۴و۵]. به این ترتیب که اگر نامساوی زیر برقرار باشد فرض صفر رد می‌شود:

$$\left|\hat{\rho}_k\right| \rangle\ 2\left(\frac{1 + 2\sum_{\upsilon=1}^{q}\hat{\rho}_\upsilon^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴)$$

q: یک مقدار معین می‌باشد (در مثال توضیح داده خواهدشد). یعنی در این صورت برآورد نمونه‌ای تابع خود همبستگی در

این مقاله در تاریخ ۸۲/۸/۳ دریافت و در تاریخ ۸۳/۱۲/۱۵ به تصویب نهایی رسیده است.

پریوش بهمنی،کارشناس ارشد دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، pbahmani210@yahoo.com

دکتر سید محمد تقی فاطمی قمی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، استاد، fatemi@aut.ac.ir .

دکتر مسعود نیکوکار زنجانی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، استادیار، pbahmani210@yahoo.com

سطح α بطور معنی‌داری غیر صفر است. در این مقاله اثر خود همبستگی را روی این برآوردگر انحراف معیار بررسی نموده و ثابت می‌کنیم که این خود همبستگی اریبی در واریانس فرآیند ایجاد نموده و تعبیری برای محاسبه واریانس فرآیند با ملاحظه خود همبستگی می‌آوریم.

ساختار مقاله به این شرح است که: بخش دوم به اثبات اریبی فرآیند می پردازد. بخش سوم تحلیل واریانس فرآیند را تشریح می کند. بخش چهارم طی یک مثال عملی روش پیشنهادی را با مدل اتورگرسیو مقایسه می کند. بخش پنجم به نتیجه گیری و پیشنهادها برای مطالعات و پژوهشهای آتی اختصاص یافته است.

۲. اثبات اریبی واریانس فرآیند

می‌دانیم که اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی با میانگین و واریانس مشترک باشند، داریم:

$$E(\overline{X}) = \mu \quad , \quad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{۵}$$

اما درحالتی که مشاهدات خود همبسته باشند و X_i متشکل از یک دنباله تصادفی ایستا باشد، آنگاه $\overline{X}$ یک برآوردگر نا اریب برای μ می‌باشد. هر چند که واریانس آن بستگی به ساختار خود همبسته $\{X_t\}$ دارد. یعنی:

$$\begin{aligned} Var(\overline{X}) &= Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \\ &= \frac{1}{n^2}\left\{ n\sigma^2 + \sum_{i \neq j}\sum Cov(X_i, X_j)\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\left\{ n\sigma^2 + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)\right\} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(n-k)\sigma^2\rho(k) \\ &= \frac{\sigma^2}{n}\left\{1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-k)\rho(k)\right\} \end{aligned} \tag{۶}$$

بنابراین واریانس میانگین نمونه با وجود خود همبستگی نسبت به وقتی خود همبستگی وجود ندارد، مقدار بزرگتری خواهد داشت.

حال برای اثبات اریبی در واریانس فرآیند، برای مشاهدات مستقل داریم:

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad : \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} \tag{۷}$$

اما وقتی مشاهدات خودهمبسته‌اند، این نااریبی در برآورد واریانس وجود ندارد؛ و مقدار مورد انتظار واریانس، برای فرآیندهایی که امکان خودهمبستگی در داده‌های آن وجود دارد، کوچکتر از مقدار واقعی واریانس فرآیند است. در اینجا این اریبی را ثابت می‌کنیم:

با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} n-1 & : i = j \\ -1 & : i \neq j \end{cases}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} &= a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in} \\ &= (n-1) + (-1)(n-1) = 0 \end{aligned} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\sum\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j\right)^2 \end{aligned} \tag{۹}$$

و با تغییر متغیر $T_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$ داریم:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} T_i^2 \tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} T_i^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(T_i^2) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

$$E(T_i) = E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) = \mu\cdot\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned} E(T_i^2) &= Var(T_i) + (E(T_i))^2 \\ &= Var(T_i) + 0 = Var(T_i) \\ &= Var\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right) \\ &= Cov\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij} a_{ik} Cov(X_j, X_k) \end{aligned} \tag{۱۳}$$

با جایگذاری در رابطه امید ریاضی واریانس داریم:

$$\begin{aligned} &E(S^2) = \\ &\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(T_i^2) = \\ &\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij} a_{ik} Cov(X_j, X_k) \end{aligned} \tag{۱۴}$$

۳. تحلیل واریانس فرآیند

حال تعبیری برای برآورد واریانس فرآیند در حالت خود همبستگی ذکر می‌نمائیم. می‌دانیم که یک برآورد برای واریانس میانگین فرآیند بصورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\sigma}(\overline{X}) = \frac{\overline{R}}{d_2} \tag{۱۵}$$

$\overline{R}$: میانگین دامنه

d_2 : ضریب معلوم وابسته به اندازه نمونه

از طرفی ثابت شد که واریانس میانگین در حالت وجود خودهمبستگی در داده‌ها بصورت زیر می‌باشد:

$$Var\left(\overline{X}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left\{1+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-k)\rho(k)\right\} \qquad (۱۶)$$

واریانس فرآیند و داریم: σ^2

$$\sigma^2=\frac{n.Var\left(\overline{X}\right)}{1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\rho_k} \qquad (۱۷)$$

و برآورد این واریانس عبارتست از:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{n.V\hat{a}r\left(\overline{X}\right)}{1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\hat{\rho}_k} \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری واریانس میانگین داریم:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{n\left(\frac{\overline{R}}{d_2}\right)^2}{1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\hat{\rho}_k} \qquad (۱۹)$$

و نتیجتاً برای برآورد ضریب کارایی فرآیند تولید در حالت وجود خودهمبستگی در مشاهدات، از این برآورد استفاده می‌کنیم.

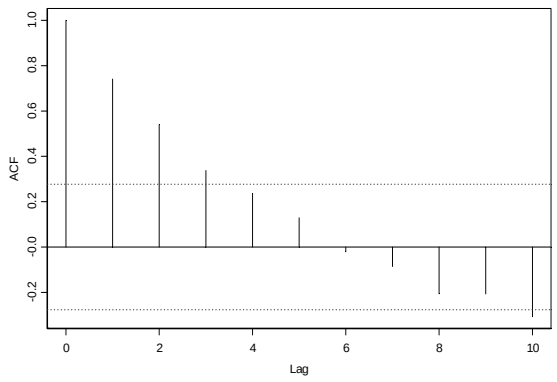
۴. مقایسه روش پیشنهادی با روش مدل اتورگرسیو

روش اول: در این روش ابتدا طبق بحث زیرگروههای منطقی داده‌ها را به زیرگروههایی تقسیم بندی نموده، پس از محاسبه واریانس در حالت خودهمبستگی با کمک روش ذکر شده، ضریب کارائی فرآیند را محاسبه می‌نمائیم.

در زیر ۵۰ داده مربوط به ضخامت قطر میله‌هایی که به چرخ دنده متصل می‌شوند، آورده شده است[۱و۷]. این داده‌ها در گروههای ۵ تایی دسته‌بندی شده‌اند.که میانگین هر گروه و ۱۰مقدارضریب خودهمبستگی را نیز در جدول زیر آورده‌ایم:

ضریب خود همبستگی	میانگین	داده ها				
-۰/۰۲۱	۵۰/۱	۵۰	۴۹	۵۰،۵	۵۱	۵۰
-۰/۰۸۶	۴۵،۲	۴۹	۴۷	۴۵	۴۲	۴۳
-۰/۲۱	۵۰،۳	۵۱	۵۲،۵	۵۲	۵۰	۴۶
-۰/۲۱	۵۱،۲	۵۱	۵۴	۴۹	۵۰	۵۲
-۰/۳۱	۴۵،۶	۴۵	۴۳	۴۲	۴۶	۵۲
۰/۷۴	۴۴،۲	۴۶	۴۳	۴۴	۴۲	۴۶
۰/۵۴	۴۴،۲	۴۹	۴۵	۴۲	۴۳	۴۲
۰/۳۴	۵۱،۶	۵۱	۵۴	۵۲	۵۱	۵۰
۰/۲۴	۴۹،۹	۵۰	۵۱	۴۹،۵	۵۰	۴۹
۰/۱۳	۴۹،۷	۴۹	۴۹،۵	۴۸	۵۰	۵۲

که با استفاده از برنامه کامپیوتری نمودار تابع خودهمبستگی نمونه‌ای به صورت زیر می‌باشد:



شکل۱. تابع خودهمبستگی نمونه‌ای داده‌های مثال

با توجه به شکل۱، درمی‌یابیم که تنها دو مقدار اول (q=۲) خودهمبستگی بطور معنی داری غیرصفر هستند. بقیه مقادیر که تقریباً داخل نوار اطمینان قرار دارند را صفر درنظرمی‌گیریم. گفتیم که با استفاده از رابطه زیر بررسی می‌کنیم که کدام مقدار ضریب خودهمبستگی معنی‌دار (مخالف صفر) است:

$$|\hat{\rho}_k| \rangle\ 2\left(\frac{1+2\sum_{\upsilon=1}^{q}\hat{\rho}_\upsilon^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

برای $k=1,2$:

$$|\hat{\rho}_1| \rangle\ 2\left(\frac{1+\sum_{u=1}^{2}\hat{\rho}_u^2}{50}\right)^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1+0.74+0.54}{50}\right)^{\frac{1}{2}}=0.427$$

$$\Rightarrow\ |0.74| \rangle\ 0.427$$

$$|\hat{\rho}_2| \rangle\ 2\left(\frac{1+\sum_{u=1}^{2}\hat{\rho}_u^2}{50}\right)^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1+0.74+0.54}{50}\right)^{\frac{1}{2}}=0.427$$

$$\Rightarrow\ |0.54| \rangle\ 0.427$$

یعنی در آزمون فرض

$$\begin{cases} H_0:\ \rho_k=0 \\ H_1:\ \rho_k\neq 0 \end{cases}$$

دو مقدار اول ضریب خودهمبستگی بطور معنی‌داری غیرصفر هستند. حال اگر برای سه مقدار اول (q=۳) ضریب همبستگی محاسبه نماییم، داریم:

برای $k=1$:

$$|\hat{\rho}_1| \rangle\ 2\left(\frac{1+\sum_{u=1}^{3}\hat{\rho}_u^2}{50}\right)^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1+0.74+0.54+0.34}{50}\right)^{\frac{1}{2}}=0.4578$$

$$\Rightarrow\ |0.74| \rangle\ 0.4578$$

برای $k=2$:

$$|\hat{\rho}_2| \rangle 2\left(\frac{1+\sum_{u=1}^{3}\hat{\rho}_u^2}{50}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1+0.74+0.54+0.34}{50}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.4578$$

$$\Rightarrow |0.54| \rangle 0.4578$$

برای $k=3$:

$$|\hat{\rho}_3| \rangle 2\left(\frac{1+\sum_{u=1}^{3}\hat{\rho}_u^2}{50}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1+0.74+0.54+0.34}{50}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.4578$$

$$\Rightarrow |0.34| \rangle 0.4578$$

که در این حالت نامساوی برقرار نیست.

بنابراین با مقایسه مقادیر فوق، می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر خودهمبستگی نزدیک نوار اطمینان[1] در شکل مرسوم را صفر درنظر می‌گیریم.

حال فرض کنید که می‌خواهیم مشاهدات را به گروههایی از هر یک از ۵ گروه تقسیم کنیم، بطوریکه شامل زیرگروههای منطقی باشد. با محاسبه میانگین هر گروه و کاربرد آنها در محاسبه خودهمبستگی درمی‌یابیم که:

$$\rho_1 = 0.094$$

$$\rho_2 = -0.34$$

$$\rho_3 = -0.35$$

{ **تذکر**: برای این ۱۰ میانگین داریم؛

$k \le \frac{10}{4} = 2.5 \approx 3$ (یک قرارداد، مونتگومری) }

واضح است که هر ۱۰ میانگین از داده‌های ناخودهمبسته تشکیل شده است. فرض کنید که ۱۰ میانگین می‌توانند به زیرگروههای منطقی تقسیم شوند، هر یک ۲ مشاهده (یعنی هر ۲ مقدار میانگین یک زیر گروه باشد).

با محاسبه دامنه و میانگین هر ۵ گروه ، برآورد خطای استاندارد میانگین بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{\sigma}(\bar{X}) = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$= \frac{(50.1-45.2)+(51.2-50.3)+\ldots+(49.9-49.7)}{5(1.128)} = 2.62$$

و برآورد واریانس فرآیند که در بخش قبل محاسبه نمودیم، عبارتست از:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n\left(\frac{\bar{R}}{d_2}\right)^2}{1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\hat{\rho}_k}$$

با جایگذاری مقادیر عددی، داریم:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n(2.62)^2}{1+\left(\frac{2}{5}\right)\sum_{k=1}^{4}(5-k)\hat{\rho}_k}$$

$$= \frac{5(2.62)^2}{1+\left(\frac{2}{5}\right)\left[(5-1)(0.74)+(5-2)(0.54)+(5-3)(0)+(5-4)(0)\right]}$$

$$= 12.1$$

توجه می‌شود که تنها خودهمبستگی‌های معنی‌دار در محاسبه برآورد واریانس شرکت داده‌شده‌اند.

حال برای محاسبه ضریب کارایی فرآیند و با درنظرگرفتن حدود مشخصات فنی: $[USL\ ,\ LSL\ ] = [58\ ,38\ ]$ و طبق تعریف (۱) داریم:

$$C_p = \frac{USL\ -\ LSL}{6\sigma} = \frac{58\ -\ 38}{6(3.478\ )} = \frac{20}{20.868} = 0.958$$

با توجه به مقادیر محاسبه شده برای ضرایب کارایی فرآیند در بالا درمی‌یابیم که چون مقدار ضریب کارایی فرآیند، نزدیک به مقدار ۱ می‌باشد، کارایی فرآیند نسبتاً مطلوب می‌باشد. یعنی فرآیند تقریباً کل فاصله مشخصات فنی را استفاده کرده است و اما اگر خودهمبستگی که در داده‌ها وجود دارد، نادیده گرفته شود، آنگاه میانگین دامنه‌های ۱۰ گروه اصلی را (بعنوان زیرگروههای منطقی) محاسبه نموده و برآورد واریانس را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{\bar{R}}{d_2}\right)^2 = \left[\frac{2\ +\ 7\ +\ \ldots\ +\ 4}{(10\ )(2.326\ )}\right]^2 = 4.90$$

و برآورد ضریب کارایی فرآیند عبارت است از:

$$\hat{C}_p = \frac{USL\ -\ LSL}{6\sigma} = \frac{20}{(6)(2.213\ )} = 1.506$$

و چون این مقدار بزرگتر از ۱ می‌باشد، یعنی در فرآیند، تعدادی محصول معیوب وجود دارد.

روش دوم: در این روش برخلاف روش اول فرض می‌کنیم که داده‌ها می‌توانند توسط یک مدل اتورگرسیو توصیف شوند. سپس با استفاده از این مدل واریانس فرآیند را در حالت مدل اتورگرسیو محاسبه و در فرمول ضریب کارایی فرآیند جایگذاری می‌نمائیم [۶-۹].

در اینجا تنها فرض می‌کنیم که دو مقدار اول ضریب خودهمبستگی معنی‌دار (غیرصفر) هستند و فرض می‌کنیم که داده ها می‌توانند توسط یک مدل اتورگرسیو توصیف شوند. برای راحتی کار مدل اتورگرسیو با رتبه ۱ را در نظر می‌گیریم:

[1] *Confidence Bound*

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + e_t$$

بنابراین: $\rho_0 = 1$

$$\rho_k = \phi_1^k \quad : k \geq 0$$

ملاحظه می‌شود که:

$$\rho_1 = \phi_1$$

و $Z_t = X_t - \mu$. حال با جایگذاری $\rho_1 = \phi_1 = 0.74$

$$Z_t = 0.74\, Z_{t-1} + e_t$$

$$X_t - \mu = 0.74(X_{t-1} - \mu) + e_t$$

و $\mu = 48$:

$$X_t = 0.74\, X_{t-1} + 48(1 - 0.74) + e_t$$

$$X_t = 0.74\, X_{t-1} + 12.48 + e_t$$

واریانس فرآیند در حالت مدل اتورگرسیو مرتبه اول عبارت است از:

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \rho_1 \phi_1}$$

داریم: $\sigma_e^2 = 5.75 \ , \ \phi_1 = 0.74$

$$\sigma_X^2 = \frac{5.75}{1 - (0.74)^2} = 12.7$$

برای محاسبه برآورد ضریب کارایی فرآیند داریم:

$$\hat{C}_p = \frac{58 - 38}{(6)\left(\sqrt{12.7}\right)} = 0.93$$

این مقدار نزدیک به یک می‌باشد، یعنی فرآیند تقریباً کاراست.

حال اگر مدل اُتورگرسیو مرتبه دوم را در نظر بگیریم. با استفاده از معادلات یول-واکر:

$$\rho_1 = 0.74 \quad , \quad \rho_2 = 0.54$$

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2} = 0.74$$

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = -0.0168$$

با جایگذاری در مدل اتورگرسیو مرتبه دوم داریم:

$$Z_t = 0.74\, Z_{t-1} - 0.0168\, Z_{t-2} + e_t$$

بنابراین: $Z_t = X_t - 48$

$$X_t = 0.74(X_{t-1} - 48) - 0.0168\,(X_{t-2} - 48) + e_t$$

$$X_t = 0.74\, X_{t-1} - 0.0168\, X_{t-2} - 38.19 + e_t$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2} = 12.7$$

$$\hat{C}_p = \frac{58 - 38}{(6)\left(\sqrt{12.7}\right)} = 0.93$$

یعنی فرآیند تقریباً کاراست. بنابراین روش اول با درنظرگرفتن خودهمبستگی در داده‌ها دقت بالائی داشته، ضمن اینکه محاسبات کمتری نیز لازم دارد.

۵. نتیجه‌گیری

در اکثر موارد که خودهمبستگی در داده‌ها وجود دارد و نادیده گرفته می‌شود. این موضوع تحلیل‌های نادرستی را بخصوص در زمینه محاسبه کارایی فرآیند تولید نتیجه می‌دهد.

بنابراین لازم است که ابتدا وجود خودهمبستگی در داده‌ها بررسی شود، سپس با توجه به حضور خودهمبستگی در داده‌ها واریانس فرآیند و در نهایت نسبت کارایی فرآیند محاسبه شود.

معمولاً بیان می‌شود که C_P کارائی بالقوه فرآیند و C_{pk} کارائی واقعی آن را اندازه‌گیری می‌کند. اغلب صاحبنظران کیفیت معتقدند که نباید بطور مستمر بر معیارهائی نظیر C_P و C_{pk} متکی بود. علت چنین پیشنهادی ساده شدن بیش از حد یک پدیده پیچیده توسط این‌گونه معیارها عنوان شده‌است.

بدیهی است که هر آماره‌ای که اطلاعات مربوط به میانگین و تغییرپذیری را ترکیب و از فرض توزیع نرمال به منظور یافتن به نتایج معقول استفاده می‌کند براحتی مورد سوء استفاده قرار می‌گیرد. بعلاوه، دیدیم که تخمین‌های نقطه‌ای که برای نسبت‌های کارائی فرآیند بر اساس اندازه نمونه‌های کوچک محاسبه می‌گردند استفاده چندانی نخواهند داشت. بنابراین، این‌گونه نسبت‌ها باید با دقت استفاده و تفسیر گردند.

البته ضرایب دیگری نیز برای محاسبه کارائی فرآیند مطرح شده‌است [۱۰]. یکی از این ضرایب C_{km} است. که در آن برای هر مقدار ثابتی از μ که در فاصله بین $[LSL\ ,USL]$ قرار داشته باشد، رابطه زیر تعریف می‌شود.

C_{pk} یک رابطه معکوس با σ دارد و در صورت افزایش σ ، C_{pk} به سمت صفر میل خواهد کرد.

این خاصیت باعث می‌گردد تا C_{pk} نتواند معیار مناسبی در رابطه با مرکز فرآیند باشد. یک راه برطرف کردن این مشکل استفاده از نسبتی از کارائی فرآیند است که بتواند به گونه بهتری نقطه تمرکز فرآیند را مشخص نماید. رابطه زیر یکی از این نسبت‌هاست.

$$C_{km} = \frac{USL - LSL}{6\tau}$$

$$\tau^2 = E\left[(X - T)^2\right] = E\left[(X - \mu)^2\right] + (\mu - T)^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2$$

$$T = \frac{USL - LSL}{2}$$

توجه داریم که نسبت‌های کارائی C_{pk} و C_{km} هر دو وقتی که $\mu = T$ است، با C_P برابر هستند و وقتی که μ از T فاصله می‌گیرد مقادیر نسبت‌های مذکور کاهش می‌یابد. برای مطالعات آتی می‌توان ضرایب C_{km} را برای داده‌های خودهمبسته محاسبه نمود.

در این مقاله داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. برای مطالعه بیشتر موضوع، می‌توان بررسی را برای حالت غیرنرمال توسعه داد.

بعنوان مثال توزیع وایبل را می‌توان بکار گرفت که برای بررسی زمان تا خرابی محصول استفاده می‌شود.

نیز با توجه به اینکه ضریب کارایی فرآیند می‌تواند بعنوان یک آماره از نوسانات آماری برخوردار باشد، می‌توان فاصله اطمینانی برای ضریب مذکور محاسبه نمود.

مراجع

[1] Montgomery, D.C., & Friedman, D.J., "*Statistical Process Control in a Computer Integrated Manufacturing Environment, in Statistical Process Control in Automated Manufacturing*", Edited by J.B. Keats and N.F. Hubele, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.

[2] Kots, S., & Johnson, N.L., "*Process Capability Indices*", Chapman & Hall, London, 1993.

[3] Harris, T.J., & Ross, W.H., "*Statistical Process Control Procedures For Correlated Observations*", Can. J. Chem. Eng, 69, 1991, PP. 48-57.

[4] Hunter, S., Just What Does an EWMA Do? ASQC Statist. Div. Newslett., 16(1), 1995, 4-12.

[5] Wheeler, D.J., Just What Does an EWMA Do? ASQC Statist. Div. Newslett., 15 (4), 1995, PP. 6-13.

[6] Loman, J.M., & Wang, W., "*On Reliability Modeling and Analysis of Highly–Reliable, Large Systems*", in Proc. 48th Annu. Reliability and Maintainability symp., 2002, PP. 456-459.

[7] Runger, G.C., & Willemain, T.R., "*Model-Based and Model-Free Control of Auto Correlated Processes*", J. Qual. Technol., 27, 1995, PP. 283-292.

[8] Smirnov, O., & Anselin, L., "*Fast Maximum Likelihood Estimation of Very Large Spatial Autoregressive Models: A Characteristic Polynomial Approach. Computational Statistics and Data Analysis*, 35, 2001, PP. 301-319.

[9] Heredia–Langner, A., Montgomery, D.C., Runger, G.C., Borror, C.M., & post, R.I., "*Performance of Customized Control Charts to Detect Process Disturbances*. Quality and Reliability Engineering International 17, 2001, PP. 205-218.

[10] Nelson, L.S., "*The Calculation of Process Capability Indices*." Journal of Quality Technology 31, 1999, PP. 249-250.