

ROBUST PARAMETER DESIGN USING AN  $L_p$  METRIC

Rassoul Noorossana &amp; M. Kamali Ardakani

Ph.D. Professor of Applied Statistics Industrial Engineering Department  
Iran University of Science and Technology

**Abstract:** In this paper, after applying Response Surface Methodology (RSM) for Robust Parameter Design, we take into account two equations representing the mean and variance responses. Then, the control factors are determined such that these two objective functions are close to their ideal values. In this regard, the  $L_p$  method is used and its sensitivity analysis is accomplished through a numerical example for the larger- the better case. Moreover, in this study the impact of ignoring uncontrollable noise factors in estimation of the optimum points are investigated.

روش  $L_p$  متریک در طراحی پارامتر استوار

رسول نورالسناء و مصطفی کمالی اردکانی

**چکیده:** پس از استفاده از نگرش متدولوژی سطح پاسخ  $RSM$ <sup>۱</sup> در بحث طراحی پارامتر استوار  $RPD$ <sup>۲</sup>، با دو معادله  $\mu_y$  و  $\sigma_y$  روبرو می شویم که باید در آن مقادیر عوامل کنترل بگونه ای تعیین گردند که دو تابع هدف تا حد امکان به مقادیر ایده آل شان نزدیک باشند. برای رسیدن به این مقصود روش  $L_p$  متریک در این زمینه ارایه و در یک مثال عددی حد اکثر- بهتر<sup>۳</sup> تحلیل حساسیت آن صورت گرفته است. همچنین در این مقاله اثر نادیده گرفتن عوامل اغتشاش غیر قابل کنترل در مرحله آزمایش در تخمین ضرایب و در جابجایی نقطه بهینه مورد تحلیل قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: متدولوژی سطح پاسخ، طراحی پارامتر استوار،  $L_p$  متریک، بهینه سازی

## ۱. مقدمه

امروزه با توجه به بازار رقابتی نیاز شدیدی به محصولات استوار در بازارها مشاهده می شود و همانطوری که مایرز و همکاران [۱] ذکر کرده اند  $RSM$  یکی از جنبه هایی است که انتظار می رود به طور وسیعی در مبحث  $RPD$  مورد استفاده قرار گیرد. معمولاً در نگرش منحنی سطح پاسخ در طراحی پارامتر استوار، مدل پاسخ بصورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$y(x, z) = \beta_0 + x'\beta + x'Bx + z'\gamma + x'\Delta z + \varepsilon, \quad (1)$$

که در آن  $y(x, z)$  بیانگر پاسخ،  $x(r_x \times 1)$  بیانگر متغیرهای کنترل و  $z(r_z \times 1)$  بیانگر متغیرهای اغتشاش می باشند،  $\beta_0$  عرض از مبدأ بوده و  $\beta$  یک بردار از ضرایب برای اثرات خطی در متغیرهای کنترل بوده و  $B$  شامل ضرایب اثرات درجه دو در عوامل کنترل و اثرات متقابل کنترل  $\times$  کنترل می باشد،  $\gamma$  یک بردار از ضرایب برای اثرات خطی در متغیرهای اغتشاش و  $\Delta$  شامل ضرایب اثرات متقابل بین عوامل اغتشاش و کنترل که بسیار حائز اهمیت در  $RPD$  است می باشند.

فرض می کنیم که  $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2$ ,  $E(\varepsilon) = 0$  و همچنین فرض می شود که  $\text{Var}(z) = \sigma_z^2 I_{r_z}$ ,  $E(z) = 0$ ، که برای ارضا کردن فرض امید ریاضی مساوی صفر می توان با استفاده از کدبندی عوامل اغتشاش بطوریکه متغیر کد شده حول میانگین مطلوب متمرکز گردد استفاده نمود.

تاریخ وصول: ۸۶/۴/۱۵

تاریخ تصویب: ۸۷/۲/۷

دکتر رسول نورالسناء، عضو هیات علمی دانشکده صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، rassoul@iust.ac.ir

مصطفی کمالی اردکانی، دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه علم و

صنعت ایران، mk\_ardakani@iust.ac.ir

<sup>۱</sup> Response Surface Methodology<sup>۲</sup> -Robust Parameter Design<sup>۳</sup> -Larger is better

$$\varepsilon = \begin{cases} (\mu - T)^2; & (\mu - T)^2 > \Delta^2 \\ 0; & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

در ضمن، ماهیت مسئله فوق به گونه‌ای است که برای بهینه سازی احتیاج به دو بار حل دارد. آنها برای معیار حداکثر-بهرتر مدل زیر را ارائه کردند و نشان دادند که روش آنها به خوبی روش لی و تو [۵] می‌باشد.

$$\begin{aligned} & \text{Max } \mu \\ & \text{s.t.:} \\ & \sigma \leq \sigma_T \end{aligned} \quad (3)$$

رابینسون و همکاران [۷] مرور جامعی بر روشهای بهینه سازی در طراحی استوار انجام داده‌اند.

در مطالبی که توضیح داده شد فرض بر این است که عوامل اغتشاش در آزمایشگاه قابل کنترل می‌باشند ولی همانطوری که خوری [۸] متذکر می‌شود در برخی از شرایط، عوامل اغتشاش در آزمایشگاه نیز غیر قابل کنترل بوده و می‌بایستی مانند عوامل تصادفی در مدل بندی و تحلیل در نظر گرفته شوند. از این رو نگاه دقیقتر به عوامل اغتشاش و پذیره‌های مورد نیاز برای برآورد ضرایب معادله RSM و بعد از آن، یافتن نقطه‌ای که بتواند فرایند یا محصول استوار تری را ارائه دهد حائز اهمیت می‌باشد. در این مقاله ابتدا به طور مختصر روشهای برآورد ضرایب مدل بررسی شده و سپس روشهای متفاوت برای یافتن نقطه بهینه برای دو تابع هدفی  $\mu_y$  و  $\sigma_y$  معرفی می‌کنیم.

در بخش نهایی مثالی را از روشهای مختلف حل کرده و آنها را ارزیابی می‌کنیم.

## ۲. روشهای برآورد

مدل مفروض  $Y = \tilde{X}\alpha + \varepsilon$  را در نظر بگیرید که در آن  $\tilde{X} = [X, Z]$  می‌باشد،  $X$  عوامل قابل کنترل و  $Z$  بیانگر عوامل اغتشاش می‌باشند و  $\varepsilon$  خطای تصادفی است که کواریانس آنرا  $V$  می‌نامیم. روشهای برآورد را می‌توان بطور خلاصه در جدول زیر نشان داد که در آن  $I$  ماتریس یکه می‌باشد.

جدول ۱. خلاصه روشهای برآورد و خصوصیات آنها

| Method | V                             | $\hat{\alpha}$              | $E(\hat{\alpha})$ | $Var(\hat{\alpha})$              |
|--------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------|----------------------------------|
| OLS    | $= \sigma_\varepsilon^2 I$    | $(X'X)^{-1}X'Y$             | $\alpha$          | $(X'X)^{-1}\sigma_\varepsilon^2$ |
| WLS    | $\neq \sigma_\varepsilon^2 I$ | $(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$ | $\alpha$          | $(X'V^{-1}X)^{-1}$               |
| IM     | $\neq \sigma_\varepsilon^2 I$ | $(X'X)^{-1}X'Y$             | $\alpha$          | $(X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1}$       |

مدل سطح پاسخ برای میانگین با توجه به فرض  $E(z)=0$  بصورت زیر حاصل می‌گردد  $E[y(x,z)] = \beta_0 + x'\beta + x'Bx$  و مدل سطح پاسخ برای واریانس فرآیند بصورت  $Var[y(x,z)] = (\gamma + \Delta x)' \Sigma_\gamma (\gamma + \Delta x) + \sigma_\varepsilon^2$  حاصل می‌شود.

با توجه به میانگین و واریانس تابع پاسخ، هدف RPD این است که عوامل کنترلی ( $x$  ها) را به گونه‌ای تعیین کند تا میانگین پاسخ  $\mu_y$  به مقدار ایده‌آلش نزدیک باشد، در حالیکه پراکندگی  $\sigma_y$  نیز حداقل گردد. حال در زیر مرور مختصری از روشهای بهینه سازی برای مسائل RPD ارائه می‌دهیم.

واینینگ و مایرز [۲] یک روش برای حل مسائل Dual (ارائه شده توسط مایرز و کارتر [۳]) ارائه کردند. حل مسئله به این صورت است که ابتدا مقادیر  $x$  به گونه‌ای تنظیم می‌گردد که پاسخ اولیه  $y_p$  بهینه گردد با شرط اینکه  $y_s = \theta$  که در آن  $\theta$  مقدار قابل قبول برای پاسخ دوم (یعنی  $y_s$ ) می‌باشد.

$y_p$  و  $y_s$  با توجه به ماهیت مسئله می‌توانند  $\mu_y$  یا  $\sigma_y$  باشند. مثلاً برای حالتی که می‌خواهیم میانگین در مقدار معین  $T$  قرار گیرد، تابع  $L = \hat{\sigma}_y^2 - \lambda_\theta(\hat{\mu}_y - T) - \lambda_p(X'X - \rho^2)$  باید بهینه شود عبارت دیگر مقادیر  $x$  از روش لاگرانژین بگونه‌ای بدست می‌آیند که این تابع حداقل مقدار ممکن را داشته باشد، فرض شده است که این مقادیر روی یک فضای کروی گون به شعاع  $\rho$  قرار دارند.

مایرز و کارتر [۳] هدف بهینه سازی را بر حسب  $\lambda_p$  در نظر می‌گیرند بطوریکه  $y_s = \theta$  و  $x'x = \rho$  باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، این معادلات چون به صورت تساوی می‌باشند گاهی اوقات جواب موجهی نداریم. برای رفع این مشکل دل کاستیلو و مونتهگومری [۴] روش GRG را پیشنهاد کردند. در تمام مسائلی که قبلاً ذکر شد ابتدا تابع اولیه را در سطح خاصی تنظیم کرده و سپس پاسخ ثانویه را بهینه می‌کردیم که این کار باعث می‌شود پاسخ نا اریب باشد.

لی و تو [۵] بیان می‌کنند که گاهی اوقات پذیرفتن مقداری اریبی باعث کاهش محسوسی در تغییر پذیری پاسخ می‌شود که بدین منظور حداقل سازی معیار  $MSE = (\hat{\mu} - T)^2 + \hat{\sigma}^2$  را معرفی کردند که نسبت به دو روش واینینگ و مایرز [۵] و دل کاستیلو و مونتهگومری [۴] بهتر عمل می‌کند. در نهایت کپلند و نلسون [۶] روش CN را ارائه دادند که قادر به تعیین حداکثر میزان اختلاف  $\Delta$  از میانگین می‌باشد و استفاده از روش سیمپلکس Nelder-Mead را برای حداقل سازی تابع  $\hat{\sigma}_y + \varepsilon$  ارائه دادند که در آن

در ادبیات مربوطه این راه حل معروف به Pareto Optimal Solution می‌باشد و راه‌حلی است که نتوان هدفی را بهبود بخشید بدون آنکه حداقل به یک هدف دیگر لطمه وارد شود. به هر حال همانطور که قبلاً ذکر کردیم در مسائل MODM قادر به ارائه روشی نیستیم که بتوان همزمان تمام اهداف را بهینه کند و این امر به این علت است که معمولاً اهداف با یکدیگر در تعارض می‌باشند.

در مباحث MODM روشهای متعددی وجود دارد که نظر  $DM^5$  را به طور مستقیم و یا غیر مستقیم در تصمیم‌گیری دخیل می‌کند. در اینجا ما روش  $L_p$  را برای بهینه‌سازی انتخاب می‌کنیم چون نسبت به روشهای دیگر MODM ساده‌تر بوده و احتیاج کمتری به نظر DM دارد.

### ۳-۱. روش $L_p$

فاصله متریک در روش  $L_p$  به منظور سنجش نزدیکی یک راه حل موجود نسبت به راه حل ایده آل مورد استفاده واقع می‌شود. این معیار به صورت یک تابع سازگار به صورت زیر خواهد بود (با فرض اینکه اهداف به صورت Max مدنظر می‌باشند).

$$L_p = \left\{ \sum_{j=1}^k \gamma_j \left( f_j(\mathbf{x}^{\max j}) - f_j(\mathbf{x}) \right)^p \right\}^{1/p} \quad (5)$$

که در آن  $\mathbf{x}^{\max j}$  نشان دهنده راه حل ایده آل در بهینه‌سازی هدف  $j$ ام است،  $\mathbf{x}$  بیانگر یک راه حل مفروض بوده و  $\gamma_j$  نشان دهنده درجه اهمیت (وزن) برای هدف  $j$ ام می‌باشد. تابع سازگار  $L_p$  به منظور حداقل کردن انحرافات از ایده آل باید کمینه شود.  $1 \leq p \leq \infty$  بیانگر پارامتر مشخص کننده خانواده  $L_p$  است. ارزش  $p$  مشخص کننده درجه تأکید به انحرافات موجود می‌باشد به گونه‌ای که هر چه  $p$  بزرگتر باشد تأکید بیشتری بر بزرگترین انحرافات خواهد بود.

اگر  $p = \infty$  شود بدان مفهوم است که بزرگترین انحراف در بین انحرافات موجود برای بهینه‌سازی مدنظر واقع می‌گردد (یعنی همان مدل Minmax). معمولاً ارزشهای  $p=1$ ،  $p=2$  و  $p=\infty$  در محاسبات به کار گرفته می‌شوند. ارزش  $p$  در هر صورت می‌تواند بستگی به معیارهای ذهنی DM داشته باشد. همچنین چون ارزش متریک  $L_p$  می‌تواند تحت تأثیر مقیاس اندازه‌گیری از اهداف موجود واقع شود (در صورت متفاوت بودن این مقیاسها)، به منظور برطرف کردن این مشکل می‌توان از یکی از دو فرمول ذیل استفاده نمود:

$$L_p = \left( \sum_{j=1}^k \gamma_j \left[ \frac{f_j(\mathbf{x}^{\max j}) - f_j(\mathbf{x})}{f_j(\mathbf{x}^{\max j})} \right]^p \right)^{1/p} \quad (6)$$

همانطور که از جدول فوق مشخص است با توجه به ماتریس کواریانس  $\mathbf{V}$  نحوه تخمین ضرایب متفاوت خواهد بود و ردیف آخر بیانگر این است که ضرایب که می‌بایستی از روش حداقل مربعات موزون  $WLS^1$  برآورد شوند اشتباهاً از روش حداقل مربعات معمولی  $OLS^2$  برآورد گردند، این حالت را از این پس روش نادرست  $IM^3$  می‌نامیم. همچنین باید در نظر داشت علیرغم اینکه برآورد ها در تمام روشها نا اریب هستند ولیکن واریانس ضرایب برآورد شده در حالت IM بیشتر می‌باشد [۹].

در مواقع زیادی در عمل مشاهده می‌گردد که برای سهولت هنگامیکه عوامل اغتشاش قابل کنترل نیستند آزمایشگر آنها تحت کنترل فرض کرده و بجای استفاده از روش WLS از روش OLS ضرایب را برآورد می‌نماید. به عنوان مثال فرض کنید که در آزمایشگاه می‌خواهیم عامل اغتشاش مثلاً دمای کوره را در ۱۰۰ درجه تنظیم کنیم ولی بنا به محدودیتهای تکنولوژیکی مانند دقت وسایل اندازه‌گیری، خطای آزمایشگر و ... قادر به انجام آن نبوده، ولی برای سادگی فرض شده که دما دقیقاً در ۱۰۰ درجه تنظیم شده است، در نتیجه بجای استفاده از روش WLS از روش OLS ضرایب برآورد می‌شوند.

در این حالت از لحاظ آماری یعنی ماتریس کواریانس  $\mathbf{V}$  مضربی از ماتریس همایی نبوده و می‌بایستی از روش WLS ضرایب معادله پاسخ طوری برآورد شوند تا وزن بیشتر به نقاط با پراکندگی کمتر داده شود ولیکن برای سادگی به اشتباه ماتریس کواریانس مضربی از ماتریس همایی فرض شده و از روش OLS تخمین صورت گرفته است. هر چند استفاده از روش ناصحیح در برآورد به نالربیی ضرایب نمی‌انجامد ولیکن عدم قطعیت بیشتری به ضرایب وارد می‌کند. در مباحث بعدی اثر استفاده نامناسب روش برآورد را در جابجایی نقطه بهینه خواهیم دید که در مبحث RPD حائز اهمیت می‌باشد.

### ۳. یافتن نقطه بهینه با توجه به دو تابع هدف

به طور کلی می‌دانیم که وقتی بیش از یک تابع هدف داشته باشیم به ندرت می‌توان نقاطی را یافت که همزمان همه توابع هدف را بهینه کند. بنابراین در این مواقع به دنبال راه حل‌های غیر مسلط<sup>۴</sup> هستیم. بنا به تعریف و با فرض اینکه  $f_i$  از نوع Max باشد،  $\tilde{\mathbf{x}}$  یک راه حل موثر خواهد بود اگر هیچ نقطه ایی مانند  $\mathbf{x}$  وجود نداشته باشد که

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) &\geq f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall i \\ f_j(\mathbf{x}) &> f_j(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \exists j \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>1</sup> -Weighted Least Squares

<sup>2</sup> -Ordinary Least Squares

<sup>3</sup> -Incorrect Method

<sup>4</sup> -Non-Dominant

<sup>5</sup> Decision-Maker

IM صورت گرفته است به عبارتی در هر بار اجرا ضرایب از توزیع  $N(\alpha, V)$  تولید شده‌اند که در آن  $V$  مطابق دو روش WLS و IM در جدول (۱) محاسبه شده است.

کلیه نتایج حاصل 15000 بار شبیه سازی می‌باشد که به کمک نرم افزار MATLAB انجام شده است. مایرز و مونتهگوری [۱۳] معادله پاسخ مربوط به مثال کیفیت تلویزیون رنگی را بصورت زیر بدست آوردند. در آن عوامل قابل کنترل عبارتند از  $x_1$  تعداد نوارها در فیلتر و  $x_2$  میزان فرکانس و عوامل اغتشاش شامل  $z_1$  تعداد بایتهای تصویر و  $z_2$  ولتاژ مصرفی می‌باشد.

$$y = 33.389 - 4.175x_1 + 3.748x_2 + 3.348x_1x_2 - 2.328x_2^2 - 1.867x_2^2 - 4.076z_1 + 2.985z_2 - 2.324x_1z_1 + 1.932x_1z_2 + 3.268x_2z_1 - 2.073x_2z_2 \quad (8)$$

می‌توان امید ریاضی و واریانس معادله سطح پاسخ را بصورت زیر نوشت:

$$E[y(x, z)] = 33.389 + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -4.175 \\ 3.748 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -2.328 & 3.348/2 \\ 3.348/2 & -1.867 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$Var[y(x, z)] = \begin{pmatrix} -4.076 \\ 2.985 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.324 & 1.932 \\ 3.268 & -2.073 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\sum_z \left[ \begin{pmatrix} -4.076 \\ 2.985 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.324 & 1.932 \\ 3.268 & -2.073 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

در اینجا فرض می‌کنیم که بر خلاف مثال مایرز و مونتهگوری [۱۳]، عوامل اغتشاش اگر چه در سطوح  $\pm 1$  تنظیم شده‌اند ولی قادر به کنترل آنها نیستیم. ماتریس  $x$  را بر اساس یک طرح مرکب مرکزی تصحیح شده CCD که در جدول ۳ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم و بطور دلخواه فرض می‌کنیم  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  باشد (چون در حل مسئله اثری ندارد).

در نهایت ماتریس کواریانس اغتشاش در دو حالت  $\Sigma_z^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و

$\Sigma_z^+ = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.9 & 1 \end{bmatrix}$  در نظر گرفته شده‌اند تا اثر همبستگی نیز بررسی شود. یعنی حالتی که همبستگی بین متغیرها اغتشاش وجود ندارد  $\Sigma_z^-$  با حالتی که همبستگی وجود دارد  $\Sigma_z^+$  مقایسه می‌گردد.

در نظر داشته باشید که در اینجا فرض شده است که کواریانس در آزمایش (برای تخمین ضرایب) و فرایند (جهت بهینه سازی) مشابه می‌باشند. نقاط ایده‌آل در این مثال برابرند با  $\mu^{\max} = 35.47$  و  $\sigma^{\min} = 1$ . ضرایب با دو روش WLS و IM برآورد شده‌اند.

$$L_p = \left( \sum_{j=1}^k \gamma_j \left[ \frac{f_j(\mathbf{x}^{\max j}) - f_j(\mathbf{x})}{f_j(\mathbf{x}^{\max j}) - f_j(\mathbf{x}^{\min j})} \right]^p \right)^{1/p} \quad (7)$$

فاصله متریک حاصل از فرمول دوم بین صفر و یک می‌باشد و از اینرو می‌تواند در محاسبات فازی به کار گرفته شود. با مفروض بودن بردار  $\gamma$  راه حل حاصل از کمینه کردن  $L_p$  (یعنی  $\mathbf{x}^p$ ) معروف به یک راه حل سازگاری است.

چانکونگ و همیز [۱۰] نشان می‌دهند که مجموعه راه حل های  $\mathbf{x}^p$  به ازای  $1 \leq p \leq \infty$  و  $\gamma > 0$  راه حل های موثر را تشکیل می‌دهند. مجموعه سازگار برای مورد خطی بودن یک مسئله توسط  $\mathbf{x}^{p=1}$  و  $\mathbf{x}^{p=\infty}$  کاملاً مشخص است. بخصوص در وضعیت دو تابع هدف و به ازای  $\gamma > 0$  مجموعه سازگار برای راه حل های موثر از نقاط بین  $\mathbf{x}^{p=1}$  و  $\mathbf{x}^{p=\infty}$  تشکیل می‌گردند [۱۱].

بطور خلاصه معیارهایی که برای حل مثال مورد استفاده قرار می‌گیرند در جدول زیر نشان داده شده است. در اینجا روش CN انتخاب شده زیرا نسبت به روشهای موجود کارایی بهتری دارد [۶]. علاقمندان می‌توانند برای بررسی نتایج در حالت هدف-بهترین به [۱۲] مراجعه کنند.

## جدول ۲. دو روش مختلف بهینه سازی

| روش CN                                      | روش $L_p$                                                                     |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Max $\mu$<br>s.t:<br>$\sigma \leq \sigma_T$ | $Min L_p = \{w(\sigma - \sigma^{\min})^p + (1-w)(\mu^{\max} - \mu)^p\}^{1/p}$ |

در جدول فوق  $\sigma_T$  حداکثر مقدار انحراف استاندارد است که توسط DM مشخص می‌گردد.  $\sigma^{\min}$  کمترین مقدار معادله  $\sigma_y$  و  $\mu^{\max}$  حداکثر مقدار معادله  $\mu_y$  در فضای بهینه سازی می‌باشند که به عنوان مقادیر ایده‌آل در نظر گرفته می‌شوند.  $w$  مقدار وزنی است که DM قبل از بهینه سازی باید تعیین کند.

## ۴. مثال عددی

همانطور که قبلاً ذکر شد استفاده از روش نادرست برای برآورد ضرایب معادله پاسخ منجر به افزایش واریانس ضرایب می‌شود و هدف از حل این مثال این است که نشان دهیم اثر افزایش واریانس در برآورد ضرایب و در جابجایی نقطه بهینه در مبحث طراحی استوار به چه صورتی است.

در این مثال از دو روش مجزا بهینه یابی استفاده شده است تا مزایا و معایب روشها را با یکدیگر مقایسه کنیم. همچنین فرض شده است که معادله برآورد شده به عنوان معادله واقعی است که می‌خواهیم ضرایب آن را تخمین بزنیم. روش تخمین بر اساس دو روش WLS و

## جدول ۳. طرح مرکب مرکزی تصحیح شده با ۲۳ اجرا

| Design Points | $X_1$ | $X_2$ | $Z_1$ | $Z_2$ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| ۱             | -1    | -1    | -1    | -1    |
| ۲             | -1    | -1    | -1    | 1     |
| ۳             | -1    | -1    | 1     | -1    |
| ۴             | -1    | -1    | 1     | 1     |
| ۵             | -1    | 1     | -1    | -1    |
| ۶             | -1    | 1     | -1    | 1     |
| ۷             | -1    | 1     | 1     | -1    |
| ۸             | -1    | 1     | 1     | 1     |
| ۹             | 1     | -1    | -1    | -1    |
| ۱۰            | 1     | -1    | -1    | 1     |
| ۱۱            | 1     | -1    | 1     | -1    |
| ۱۲            | 1     | -1    | 1     | 1     |
| ۱۳            | 1     | 1     | -1    | -1    |
| ۱۴            | 1     | 1     | -1    | 1     |
| ۱۵            | 1     | 1     | 1     | -1    |
| ۱۶            | 1     | 1     | 1     | 1     |
| ۱۷            | -2    | 0     | 0     | 0     |
| ۱۸            | 2     | 0     | 0     | 0     |
| ۱۹            | 0     | -2    | 0     | 0     |
| ۲۰            | 0     | 2     | 0     | 0     |
| ۲۱            | 0     | 0     | 0     | 0     |
| ۲۲            | 0     | 0     | 0     | 0     |
| ۲۳            | 0     | 0     | 0     | 0     |

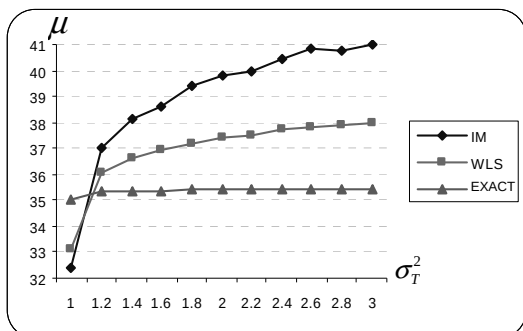
## ۴-۱. نتایج روش CN

روش CN بر حسب  $\sigma_T$  های متفاوتی حل گردیده است که نتایج آن در جداول ۱ تا ۶ نشان داده شده است. جهت مقایسه مقادیر EXACT که از معادلات ۹ و ۱۰ بدست آمده‌اند، نیز در این نمودارها نشان داده شده است.

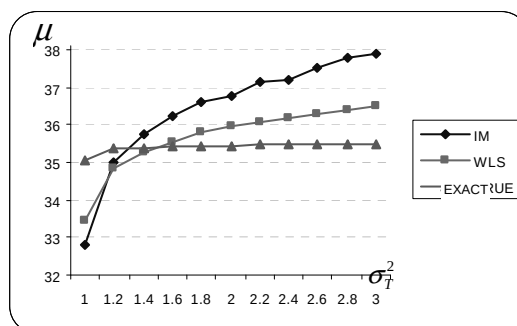
منظور از مقادیر EXACT این است که ضرایب پاسخها در معادلات ذکر شده بدون هیچ تغییری در بهینه سازی لحاظ شده‌اند. بعبارت دیگر، فرض شده است که هیچ اغتشاشی در پاسخها وجود ندارد و پاسخهای واقعی بطور دقیق تخمین زده شده‌اند.

نمودار ۱ و ۲ بترتیب بیانگر مقادیر معادله میانگین پاسخ در حالت غیر همبسته و همبسته می‌باشند. نمودارهای ۳ و ۴ معادله واریانس بترتیب در حالات غیر همب و همبسته نشان می‌دهد. مقادیر انحراف استاندارد برای معادلات میانگین و واریانس بترتیب در نمودارهای ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند. در این نمودارها علامت "+" بیانگر همبستگی و علامت "-" نشاندهنده عدم همبستگی در ماتریس اغتشاش می‌باشد.

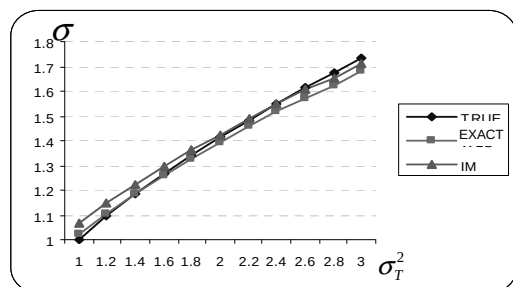
در نمودار ۱ برای  $1.2 \leq \sigma_T^2 \leq 1.6$ ، مقادیر  $x$  به‌گونه‌ای است که میانگین پاسخ به مقدار واقعی  $\mu$  نزدیک می‌باشد. و در حالت IM ملاحظه می‌گردد که مقدار معادله  $\mu$  مقداری بزرگتر از  $\mu$  واقعی تخمین زده شده‌اند.



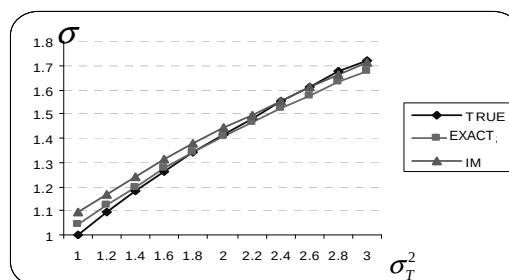
شکل ۲. متوسط مقادیر برای معادله میانگین در حالت همبسته



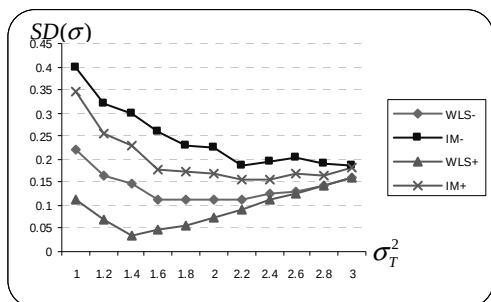
شکل ۱. متوسط مقادیر برای معادله میانگین در حالت غیر همبسته



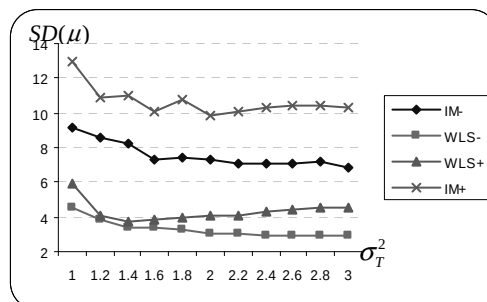
شکل ۴. متوسط مقادیر برای معادله انحراف معیار در حالت همبسته



شکل ۳. متوسط مقادیر برای معادله انحراف معیار در حالت غیر همبسته



شکل ۶. متوسط مقادیر انحراف استاندارد برای معادلات انحراف معیار



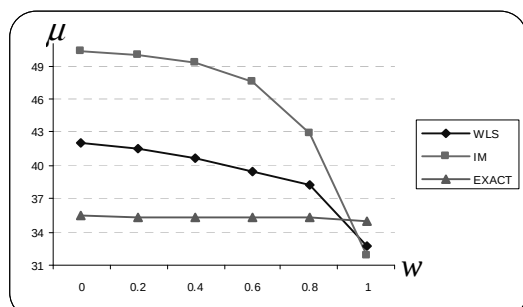
شکل ۵. متوسط مقادیر انحراف استاندارد برای معادلات میانگین

بدست می‌آید و این خود دلیلی است برای تأکید بر استفاده صحیح روش برآورد.

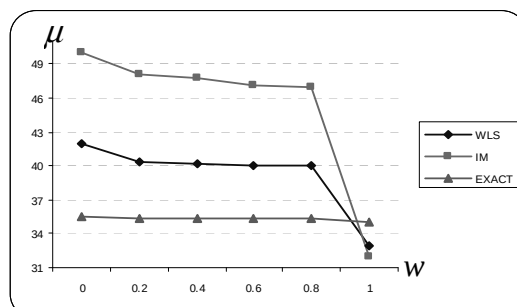
#### ۴-۲. نتایج روش $L_p$

روش دوم ارائه شده در جدول ۲ را با  $p$  های یک، دو و بینهایت برای مثال فوق حل شده است و چون نتایج مشابهی قابل استنباط است، فقط نتایج مربوط به روش  $L_p$  برای حالت  $p=1$  در شکل‌های ۷ تا ۱۲ ارائه می‌گردد. شکلهای ۷ و ۸ به ترتیب نتایج مربوط به معادلات میانگین در حالت غیر همبسته و همبسته را بر حسب  $w$  های مختلف نشان می‌دهد.

$w$  بیان کننده اهمیتی است که به معادله  $\sigma$  می‌دهیم مثلاً  $w=1$  یعنی اینکه معادله واریانس ۱۰۰٪ اهمیت دارد و DM به هیچ وجه حاضر به پذیرفتن واریانس بیشتر برای بدست آوردن  $\mu$  بهتر نمی‌باشد. نمودارها بیانگر این می‌باشند که در  $w=0.9$  مقادیر معادلات  $\mu$  و  $\sigma$  به مقدار واقعی شان نزدیک‌ترند و حتی استفاده از روش نادرست زیاد بر پاسخها تأثیر گذار نمی‌باشد، ولی به طور کلی روش نادرست برآورد در مقایسه با روش حداقل مربعات وزین به نقاط دور تری از مقادیر واقعی منجر می‌گردد. و در حالت همبستگی بین عوامل اغتشاش نیز این وضعیت تشدید می‌شود.



شکل ۸. متوسط مقادیر برای معادله میانگین در حالت همبسته و  $p=1$

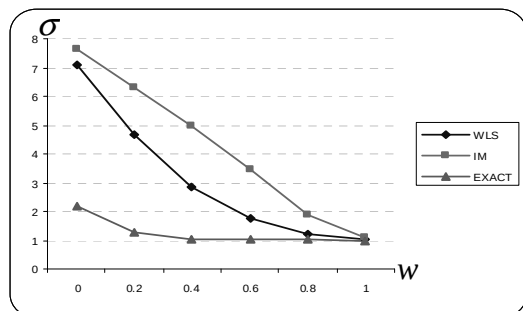


شکل ۷. متوسط مقادیر برای معادله میانگین در حالت غیر همبسته و  $p=1$

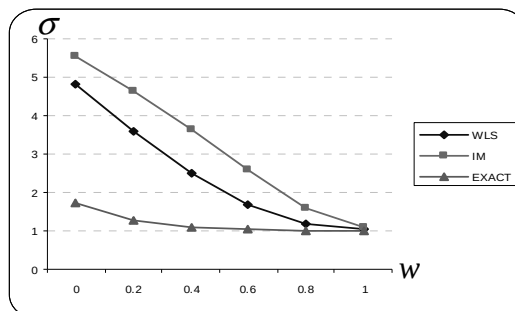
در مقایسه با نمودار ۱، در نمودار ۲ دیده می‌شود که طبق انتظار در حالت وجود همبستگی بین عوامل اغتشاش، جواب‌های بدست آمده در هر دو روش دورتر از جواب‌های واقعی شان می‌باشند. نمودارهای ۳ و ۴ بیانگر این هستند که مقدار  $\sigma$  به همان اندازه ای است که DM از طریق  $\sigma_T$  مشخص کرده است.

نمودار ۵ انحراف معیار معادله  $\mu$  را نشان می‌دهد، همانطور که مشاهده می‌شود در حالتی که روش ناصحیح برآورد استفاده شده است نسبت به حالت WLS انحراف استاندارد بیشتری به معادله میانگین اعمال می‌شود و هنگامیکه همبستگی وجود داشته باشد این شدت بیشتر می‌شود.

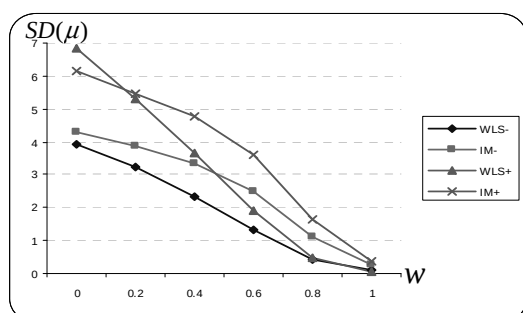
در نمودار ۶ که انحراف معیار معادله  $\sigma$  را نشان می‌دهد، بر خلاف انتظار دیده می‌شود که در حالت IM انحراف استانداردهای بیشتری برای حالت عدم همبستگی مشاهده می‌شود. مدل در حالت‌های دیگر همبستگی تست شد که نتایج حاصل نشان دهنده این امر است که بر خلاف انتظار حالات IM بهتر از WLS جواب می‌دهد. این پدیده را می‌توان به عنوان یکی از نقاط ضعف این مدل نام برد و علت این است که معادله  $\sigma$  فضای بهینه سازی را تعیین می‌سازد بعبارت دیگر می‌توان گفت که مدل حساس به  $\sigma$  است. به هر حال بطور کلی با توجه به نمودارها می‌توان گفت که در حالت IM به مراتب جواب‌های بدتری نسبت به روش صحیح برآورد یعنی WLS



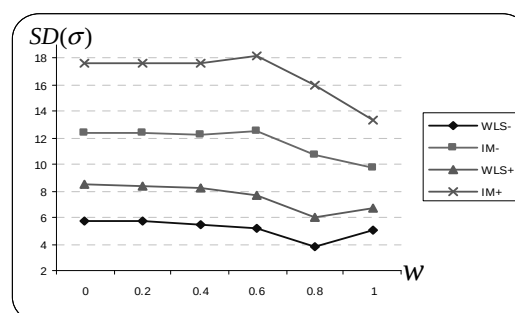
شکل ۱۰. متوسط مقادیر برای معادله انحراف معیار در حالت همبسته و  $p = 1$



شکل ۹. متوسط مقادیر برای معادله انحراف معیار در حالت غیر همبسته و  $p = 1$



شکل ۱۲. متوسط مقادیر انحراف استاندارد برای معادلات انحراف معیار و  $p = 1$



شکل ۱۱. متوسط مقادیر انحراف استاندارد برای معادلات میانگین و  $p = 1$

نتیجه ضرایب پاسخ را از روش مناسب تخمین بزنیم. در روشهای بهینه سازی، ملاحظه شد که روش  $CN$  کمتر قابل اطمینان بوده چون بر خلاف انتظار دیده شد که انحراف استاندارد معادله واریانس در موارد همبستگی، برآورد ضرایب از طریق  $IM$  نسبت به  $WLS$  به جوابهای بهتری منجر می گردد. ولی این مشکل برای روش  $L_p$  دیده نشد. مزیت دیگر روش  $L_p$  این است که فارغ از مقادیر  $p$  و  $w$  همه حل ها بدست آمده جوابهای موثر می باشند یعنی همان جوابهای که در مسائل چند هدفه بدنبال آنها هستیم.

### مراجع

- [1] Myers, R.H., Montgomery, D.C., Vining, G.G., Kowalski, S.M., Borror, C.M., "Response Surface Methodology: A Retrospective and Current Literature Review," Journal of Quality Technology, Vol. 36, 2004, PP. 53-77.
- [2] Vining, G.G., Myers, R.H., "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach," Journal of Quality Technology, Vol. 22, 1990, PP. 38-45.
- [3] Myers, R.H., Carter, W., "Response Surface Techniques for Dual Response Systems," Technometrics, Vol.15, 1973, PP. 301-317.
- [4] Del Castillo, E., Montgomery, D.C., "A Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem," Journal of Quality Technology, Vol. 25, 1993, PP. 199-204.

نمودارهای ۹ و ۱۰ بیانگر مقادیر معادله واریانس در حالت غیر همبسته و همبسته می باشد. این نمودارها نشان می دهند که هر چه مقدار  $w$  افزایش یابد مقادیر معادله واریانس کاهش می یابد. همچنین روش ناصحیح برآورد به مقادیری با واریانس قابل ملاحظه ای بیشتر منجر می شود. در نمودار ۱۰ یعنی هنگامیکه همبستگی بین عوامل اغتشاش وجود دارد نسبت به مقادیر متناظرشان در نمودار ۹ دورتر از مقادیر واقعی می باشند. نمودارهای ۱۱ و ۱۲ به ترتیب بیانگر انحراف استاندارد معادلات میانگین و واریانس پاسخ می باشند. همانطور که انتظار داریم استفاده نادرست روش برآورد، پراکندگی بیشتری را به همراه دارد و روش  $L_p$  این مطلب را به خوبی نشان می دهد.

### ۵. نتیجه گیری

در این مقاله روش بهینه سازی  $L_p$  در مبحث طراحی پارامتر استوار معرفی گردید و با یکی از بهترین روشهای بهینه سازی موجود یعنی  $CN$  برای مسائل از نوع بیشتر- بهتر مقایسه شد. همچنین اثر تخمین ضرایب از روش نادرست در مبحث طراحی پارامتر استوار بررسی گردید. نتایج دلالت بر این دارد که استفاده نادرست برآورد در مبحث طراحی استوار منجر به بدست آوردن جوابهای بهینه ای می شود که خیلی دورتر از مقادیر واقعی شان می باشند و در مواقع وجود همبستگی بین متغیرهای اغتشاش این وضعیت تشدید می شود. در نتیجه در هنگام برآورد ضرایب معادلات پاسخ باید توجه خاصی به وجود عوامل اغتشاش در شرایط آزمایش داشته و در

- [5] Lin, D., Tu, W., "Dual Response Surface Optimization," Journal of Quality Technology, Vol. 27, 1995, PP. 34-39.
- [6] Copeland, K., Nelson, P.R., "Dual Response Optimization Via Direct Function Minimization," Journal of Quality Technology, Vol. 28, 1996, PP. 331-336.
- [7] Robinson, T.J., Borror, C.M., Myers, R.H., "Robust Parameter Design: A Review," Quality and Reliability Engineering International, Vol. 20, 2004, PP. 81-101.
- [8] Khuri, A.I., "Response Surface Models with Mixed Effects," Journal of Quality Technology, Vol. 28, 1996, PP. 177-186.
- [9] Draper, N.R., Smith, H., Applied regression analysis, 2nd edition, New York: Wiley, 1998.
- [10] Chankong, V., Haimes, Y., Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, New York: North Holland, 1983.
- [11] Ardakani, M.K., Noorossana, R., "A New Optimization Criterion for Robust Parameter Design -The case of Target is Best," The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, DOI 10.1007/s00170-007-1141-6, 2007.
- [12] Myers, R.H., Montgomery, D.C., Response Surface Methodology: Process and Product Optimization using Designed Experiments, New York: Wiley, 2nd edition, 2002.

[۱۳] اصغریور، محمدجواد؛ تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره؛ انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۷.