International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2012)

International Journal of Industrial Engineering & Production Research

June 2012, Volume 23, Number 1
pp. 129-137

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

"Technical Note"

A New Combining Model for Ranking Generalized Fuzzy numbers

A. Alem Tabriz*, E. Roghanian & F. Mojibian

Akbar Alem Tabriz, *Associate professor of Industrial Management, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran*
Emad Roghanian, *Assistance professor of Industrial Engineering, Khaje Nasir Toosi University, Tehran, Iran*
Fatemeh Mojibian, *MSc student of Industrial Management, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran*

Keywords

Generalized fuzzy numbers,
Ranking methods,
Parametric form of fuzzy numbers,
Ranking value

ABSTRACT

Because of the suitability of fuzzy numbers in representing uncertain values, ranking the fuzzy numbers has widely applications in different sciences. Many models are presented in field of ranking the fuzzy numbers that each one rank based on special criteria and features. The purpose of this paper is presenting a new method for ranking generalized fuzzy numbers based on some parameters such as membership degree, mean, standard deviation and parametric form of membership function. This paper introduce existing ranking models, comparing them the proposed model is presented .Considering special sets of fuzzy numbers, the advantages of proposed model is expressed. The main purpose of this paper is to present a reliable ranking method for generalized fuzzy numbers.

* **Corresponding author. Akbar Alem Tabriz**
Email: *A-tabriz@sbu.ac.ir*

نشـــــریه بین المللــــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــــریت تولیـــد

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

شمـــــاره ۱، جلـــــد ۲۳، خـــــرداد ۱۳۹۱
صفحــــــــه ۱۳۷-۱۳۰

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

"یادداشت فنی"

یک مدل ترکیبی برای رتبه بندی اعداد فازی غیرنرمال

اکبر عالم تبریز*، عماد روغنیان و فاطمه مجیبیان

کلمات کلیدی

اعداد فازی غیر نرمال،
روش های رتبه بندی،
فرم پارامتریک اعداد فازی،
ارزش رتبه بندی.

چکیده:

به دلیل قابلیت اعداد فازی در نشان دادن ارزش های غیر قطعی، رتبه بندی این اعداد دارای کاربردهای وسیعی در علوم مختلف می باشد. در زمینه رتبه بندی اعداد فازی تاکنون مدل های بسیاری ارائه شده است که هر یک بر اساس معیارها و ویژگی های خاصی از اعداد فازی این رتبه بندی را انجام می دهند.

هدف این مقاله ارائه یک مدل جدید در رتبه بندی اعداد فازی براساس پارامترهایی چون درجه عضویت، میانگین، انحراف معیار و فرم پارامتریک تابع عضویت اعداد فازی می باشد. این مقاله به معرفی مدل‌های موجود در زمینه رتبه بندی اعداد فازی پرداخته و با بررسی مقایسه‌ای آنها مدل پیشنهادی ارائه شده است. در ادامه مجموعه های خاصی از اعداد فازی مطرح و برتری مدل پیشنهادی نسبت به مدل‌های موجود تبیین شده است. هدف اصلی این مقاله ارائه یک مدل قابل اطمینان و در رتبه بندی اعداد فازی می باشد.

۱. مقدمه

در مواردی که به دلیل پیچیدگی سیستم نمی توان با دقت و صراحت در مورد پارامترها و مشخصه های آن قضاوت کرد رتبه بندی اعداد فازی به دلیل ماهیت غیر قطعی این اعداد کارکردهای فراوانی دارند. رتبه بندی اعداد فازی در مسائلی چون تجزیه و تحلیل داده ها، بهینه سازی، تصمیم گیری، استدلال تقریبی[2]، سیستم های اجتماعی-اقتصادی و ... کاربردهای بسیاری دارند. از سال ۱۹۷۶ تا کنون مدل های زیادی در زمینه رتبه بندی اعداد فازی ارائه شده که بسیاری از این مدل ها توسط بورتن و دگانی در سال ۱۹۸۵، چن و هانگ در سال۱۹۹۲ و وانگ و کر در سال ۲۰۰۱ مورد مقایسه و بررسی قرار گرفته [۱،۲،۳] تا در نهایت استانداردهای منطقی و معقولی ارائه نمودند که توانسته مبنای تعریف مدل های رتبه بندی اعداد فازی قرار گیرند. مدل‌های رتبه بندی اخیر استانداردهای مذکور را دارا می باشند. هدف این مقاله ارائه مدلی است که علاوه بر رعایت استاندارهای تعریف شده در زمینه رتبه بندی، نقص‌ها و کاستی های هشت مدل ارائه شده از سال ۲۰۰۳ تا کنون را پوشش دهد.

ساختار این مقاله این گونه طراحی شده است که در بخش دوم تعاریف مورد نیاز از اعداد فازی غیر نرمال و روابط بین آنها ارائه می شود. در بخش سوم به معرفی مدل های موجود در زمینه رتبه بندی اعداد فازی از سال ۲۰۰۳ تا کنون پرداخته شده است. در بخش چهارم ساختار مدل پیشنهادی ارائه گردیده و در بخش پنجم مقایسه ای بین مدل‌های موجود و مدل پیشنهادی صورت گرفته است. در بخش ششم نیز نتیجه گیری بیان شده است.

تاریخ وصول: ۸۹/۷/۹
تاریخ تصویب: ۹۰/۳/۲۱

***نویسنده مسئول مقاله: دکتر اکبر عالم تبریز**: دانشیار، دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه شهید بهشتی، تهران. A-tabriz@sbu.ac.ir

عماد روغنیان، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه خواجه نصیر طوسی، تهران. E_roghanian@kntu.ac.ir

فاطمه مجیبیان: دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه شهید بهشتی، تهرانf.mojibian@mail.sbu.ac.ir

[2] *Approximate Reasoning*

۲. تعاریف

تعریف ۱: طبق تعریف چن [۴] عدد فازی غیر نرمال $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A} = (\mathrm{a,b,c,d};\, w_{\tilde{A}})$ نشان داده می‌شود به طوریکه $0 < w_{\tilde{A}} \le 1$ بوده و اعداد a, b, c, d قطعی می باشند. اگر $w_{\tilde{A}} = 1$ باشد آنگاه $\tilde{A}$ یک عدد فازی نرمال است. اگر $a < c = b < d$ باشد آنگاه $\tilde{A}$ یک عدد فازی مثلثی است. اگر $a = b = c = d$ باشد آنگاه $\tilde{A}$ عددی قطعی است و اگر $-1 \le a \le b \le c \le d \le 1$ باشد آنگاه $\tilde{A}$ یک عدد فازی استاندارد می‌باشد.

تعریف ۲: چنگ [۵] روابط ریاضی بین اعداد فازی غیر نرمال $\tilde{A} = (\mathrm{a_1,b_1,c_1,d_1};\, w_{\tilde{A}})$ و $\tilde{B} = (\mathrm{a_2,b_2,c_2,d_2};\, w_{\tilde{B}})$ را به صورت زیر تعریف کرده است :

۱. جمع دو عدد فازی غیر نرمال:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{A}}) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2; w_{\tilde{B}}) = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2; min(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}))$$

۲. تفریق دو عدد فازی غیر نرمال:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{A}}) \ominus (a_2, b_2, c_2, d_2; w_{\tilde{B}}) = (a_1- d_2, b_1- c_2, c_1- b_2, d_1- a_2; min(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}))$$

۳. ضرب دو عدد فازی غیر نرمال:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{A}}) \otimes (a_2, b_2, c_2, d_2; w_{\tilde{B}}) = (a_1\times a_2, b_1\times b_2, c_1\times c_2, d_1\times d_2; min(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}))$$

۴. تقسیم دو عدد فازی غیر نرمال:

$$\tilde{A} \oslash \tilde{B} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{A}}) \oslash (a_2, b_2, c_2, d_2; w_{\tilde{B}}) = (a_1/d_2, b_1/c_2, c_1/b_2, d_1/a_2; min(w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}))$$

تعریف ۳: تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه‌ای غیرنرمال $\tilde{A} = (\mathrm{a,b,c,d};\, w_{\tilde{A}})$ به صورت زیر تعریف شده است[۶].

$$u(\mathrm{x}) = \begin{cases} w_{\tilde{A}}(x-a)/(b-a) & a \le x \le b \\ w_{\tilde{A}} & b \le x \le c \\ w_{\tilde{A}}(x-d)/(c-d) & c \le x \le d \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (۱)$$

تعریف ۴: فرم پارامتریک تابع عضویت هر عدد فازی ذوزنقه ای غیر نرمال به صورت $u = (\underline{u}, \overline{u})$ می باشد که در آن :

$$\underline{u}(r) = a + (b - a/w)\, r \qquad (۳)$$

$$\overline{u}(r) = d - (d - c/w)\, r \qquad (۴)$$

می باشد که $\underline{u}(r)$ تابع صعودی کران دار یکنواخت و $\overline{u}(r)$ تابع نزولی کران دار یکنواخت بوده و رابطه $\underline{u}(r) \le \overline{u}(r)$ به ازای هر $0 \le \mathrm{r} \le \mathrm{w}$ برقرار می باشد[۷].

تعریف ۵: میانگین و انحراف معیار عدد فازی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می شود[۸]:

$$\bar{X}(\tilde{A}) = \frac{\int_{S(\tilde{A})} x\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_{S(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x)dx} \qquad (۵)$$

$$\sigma(\tilde{A}) = \left[\left(\frac{\int_{S(\tilde{A})} x^2\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_{S(\tilde{A})} \mu_{\tilde{A}}(x)dx}\right) - (\bar{X}(\tilde{A}))^2\right]^{1/2} \qquad (۶)$$

۳. مروری بر مدل های موجود در رتبه بندی اعداد فازی

در این بخش مختصرا هشت مدل موجود در رتبه بندی اعداد فازی معرفی شده است. برای رتبه بندی n عدد فازی $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ به طوریکه $\tilde{A}_i = (\mathrm{a,b,c,d};\, w_{\tilde{A}_i})$ و $w_{\tilde{A}_i}$ ماکزیمم درجه عضویت عدد فازی $\tilde{A}_i$ باشد، هر یک از مدل های ارائه شده دارای مراحلی به شرح زیر می باشند:

- چن و چن [۹] مدل رتبه بندی ای بر پایه روش مرکز ثقل ارائه دادن که گام های مدل پیشنهادی آنها به شرح زیر است :

گام اول : تبدیل هر عدد فازی غیر نرمال به حالت استاندارد:

$$\tilde{A}_i^* = \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}; w_{\tilde{A}_i}\right) = \left(a^*, b^*, c^*, d^*; w_{\tilde{A}_i}\right) \qquad (۷)$$

به طوریکه $k = max\,(a, b, c, d, 1)$

گام دوم: محاسبه مرکز ثقل[۱] $(x^*_{\tilde{A}_i}, y^*_{\tilde{A}_i})$ هر عدد فازی استاندارد:

$$y^*_{\tilde{A}_i} = \begin{cases} \frac{w_{\tilde{A}_i}\left(\frac{c^*-b^*}{d^*-a^*}+2\right)}{6}, & if\ a^* \ne d^* \\ \frac{w_{\tilde{A}_i}}{2} & if\ a^* = d^* \end{cases} \qquad (۸)$$

$$x^*_{\tilde{A}_i} = \frac{y^*_{\tilde{A}_i}(b^*+c^*)+(a^*+d^*)(w_{\tilde{A}_i} - y^*_{\tilde{A}_i})}{2w_{\tilde{A}_i}} \qquad (۹)$$

گام سوم: محاسبه میانگین $\bar{x}_{\tilde{A}_i}$ و انحراف معیار $S_{\tilde{A}_i}$ هر عدد فازی استاندارد:

$$\bar{x}_{\tilde{A}_i} = \frac{a^*+b^*+c^*+d^*}{4} \qquad (۱۰)$$

$$S_{\tilde{A}_i} = \sqrt{\frac{\sum(x_j - \bar{x}_{\tilde{A}_i})^2}{4-1}} \qquad \text{For } x_j = a^*, b^*, c^*, d^* \qquad (۱۱)$$

گام چهارم: محاسبه ارزش رتبه بندی $\mathrm{Rank}(\tilde{A}_i^*)$ برای هر عدد فازی استاندارد:

[۱] Center-of-gravity

$$\mathrm{Rank}(\tilde{A}_i^*) = x_{\tilde{A}_i}^* + (w_{\tilde{A}_i} - y_{\tilde{A}_i}^*)^{S_{\tilde{A}_i}} \times (y_{\tilde{A}_i}^* + 0.5)^{1-w_{\tilde{A}_i}} \quad (۱۲)$$

که بزرگترین مقدار $\mathrm{Rank}(\tilde{A}_i^*)$ در رتبه بندی دارای بالاترین ارزش می باشد.

- یانگ و کی [۱۰] یک مدل رتبه بندی بر پایه روش تاپسیس به شرح زیر ارائه کردند:

گام اول: تبدیل هر عدد فازی غیر نرمال به حالت استاندارد با استفاده از رابطه (۷) .

گام دوم: محاسبه مرکز ثقل $(x_{\tilde{A}_i}^*, y_{\tilde{A}_i}^*)$ هر عدد فازی استاندارد با استفاده از رابطه های(۸) و(۹) .

گام سوم: تبدیل نقطه مرکز ثقل $(x_{\tilde{A}_i}^*, y_{\tilde{A}_i}^*)$ به نقطه شاخصی[۱] $(x_{\tilde{A}_i}^*, y_{\tilde{A}_i}^*)$ به وسیله روابط زیر:

$$x_{\tilde{A}_i}^* = x_{\tilde{A}_i}^* \quad (۱۳)$$

$$y_{\tilde{A}_i}^* = (w_{\tilde{A}_i} - y_{\tilde{A}_i}^*)^{S_{\tilde{A}_i}} \times (y_{\tilde{A}_i}^* + 0.5)^{1-w_{\tilde{A}_i}} \quad (۱۴)$$

گام چهارم: تعیین نقطه ایده‌آل مثبت (x_P^*, y_P^*) و ایده آل منفی(x_N^*, y_N^*) به طوریکه گزینه مثبت (۱ ; ۱, ۱, ۱, ۱) و گزینه منفی (۱ ;۱- ,۱- ,۱- ,۱-) باشدکه با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) داریم:

(۱/۲, ۱) = (x_P^*, y_P^*) و (۱/۲- , ۱) = (x_N^*, y_N^*) .

گام پنجم: محاسبه فاصله از ایده آل مثبتd^+ و فاصله از ایده آل منفیd^- با استفاده از روابط زیر:

$$d^+ = \sqrt{\left(x_{\tilde{A}_i}^* - x_P^*\right)^2 + (y_{\tilde{A}_i}^* - y_P^*)^2} \quad (۱۵)$$

$$d^- = \sqrt{\left(x_{\tilde{A}_i}^* - x_N^*\right)^2 + (y_{\tilde{A}_i}^* - y_N^*)^2} \quad (۱۶)$$

گام ششم : محاسبه ضریب شاخص[۲] $IC_{\tilde{A}_i}$ برای هر گزینه :

$$IC_{\tilde{A}_i} = \frac{d^-}{d^- + d^+} \quad (۱۷)$$

که در رتبه بندی بزرگترین $IC_{\tilde{A}_i}$ دارای بالاترین رتبه است.

- عباس بندی و اسدی[۱۱] یک مدل رتبه بندی بر پایه روش فاصله علامت دار[۳] ارائه کردند. روش پیشنهادی آنها دارای گام هایی به شرح زیر می باشد:

گام اول: تبدیل هر عدد فازی غیر نرمال به حالت استاندارد با استفاده از رابطه (۷) .

گام دوم: استفاده از روابط (۳) و(۴) برای محاسبه D_p :

$$D_p = [\int_0^1 \left(|\underline{u}(r)|^p + |\overline{u}(r)|^p \right) dr]^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (۱۸)$$

گام سوم : محاسبه تابع$\gamma(u)$ به شرح زیر:

$$\gamma(u) = \begin{cases} -1 & if\ sign\ \left(\int_0^1 (\underline{u} + \overline{u})(r) dr\right) < 0 \\ 1 & if\ sign\ \left(\int_0^1 (\underline{u} + \overline{u})(r) dr\right) \geq 0 \end{cases} \quad (۱۹)$$

گام چهارم : محاسبه فاصله نشانه d_p :

$$d_p = \gamma(u) \times D_p \quad (۲۰)$$

که هر چه مقدار d_p یک عدد بیشتر باشد آن عدد دارای رتبه بهتری می باشد.

- اسدی و زنده نام [۱۲] با توجه به روش حداقل فاصله[۴] مدل رتبه بندی ای به شرح زیر اراده کردند:

گام اول : تبدیل هر عدد فازی غیر نرمال به حالت استاندارد با استفاده از رابطه (۷) .

گام دوم : محاسبه فرم پارامتریک تابع عضویت با استفاده از رابطه ۲ وسپس محاسبه حداقل فاصله :

$$M(\tilde{A}_i^*) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\underline{u}(r) + \overline{u}(r)) dr \quad (۲۱)$$

به طوریکه بزرگترین مقدار $M(\tilde{A}_i^*)$ نشان دهنده بهترین ارزش در رتبه بندی می باشد.

- چن و چن [۱۳] مدل رتبه بندی دیگری را ارائه دادند:

گام اول: تبدیل هر عدد فازی غیر نرمال به حالت استاندارد با استفاده از رابطه (۷).

گام دوم: محاسبه مرکز ثقل $(x_{\tilde{A}_i}^*, y_{\tilde{A}_i}^*)$ هر عدد فازی استاندارد با استفاده از روابط(۸) و(۹) .

گام سوم: محاسبه انحراف معیار هر عدد فازی استاندارد با استفاده از رابطه(۱۱) .

گام چهارم: بدست آوردن مقدار ${y_{\tilde{A}_i}^*}^s$ با استفاده از رابطه زیر:

$${y_{\tilde{A}_i}^*}^s = 0.5 \times w_{\tilde{A}_i} - y_{\tilde{A}_i}^* \times S_{\tilde{A}_i} \quad (۲۲)$$

به طوریکه $0 < {y_{\tilde{A}_i}^*}^s \leq 0.5$ و $1 \leq i \leq n$ می باشد.

---

[1] *Index Point*
[2] *Index Coefficient*
[3] *Sing Distance*
[4] *Distance minimization*

گام پنجم: استفاده از نقطه بدست آمده $(x^*_{\tilde{A}_i}, {y^*_{\tilde{A}_i}}^s)$ برای محاسبه ارزش رتبه بندی با استفاده از رابطه زیر:

$$Score\ (\tilde{A}^*_i) = \sqrt{(x^*_{\tilde{A}_i} - x_{\min})^2 + ({y^*_{\tilde{A}_i}}^s)^2} \qquad (۲۳)$$

به طوریکه بهترین رتبه را عددی دارد که دارای $Score$ بزرگتری نسبت به بقیه باشد.

- لی و چن [۱۴] مدلی بر اساس شکل و انحراف معیار اعداد فازی به منظور رتبه بندی آنها ارائه کردند. طبق تعریف آنها برای هرعدد فازی ذوزنقه ای $\tilde{A}_i= (a, b, c, d; L_{iH}, R_{iH})$ که در آن R_{iH} ارتفاع راست[1] عدد فازی و L_{iH} ارتفاع چپ[2] عدد فازی بوده، مدل رتبه بندی دارای گام هایی به شرح زیر است:

گام اول: تبدیل هر عدد فازی به حالت استاندارد:

$$\tilde{A}^*_i = (\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}\ ;\ L_{iH}, R_{iH}) = (a^*, b^*, c^*, d^*;\ L_{iH}, R_{iH}) \qquad (۲۴)$$

به طوریکه $k = \max(a, b, c, d, 1)$

گام دوم: محاسبه مقادیر $R_{iM}, L_{iM}, R_{iS}, L_{iS}$ و T_{iS} با استفاده از روابط زیر:

$$R_{iM} = c^* + d^*/2 \qquad (۲۵)$$

و

$$L_{iM} = a^* + b^*/2 \qquad (۲۶)$$

$$R_{iS} = \sqrt{[(c^* - R_{iM})^2 + (d^* - R_{iM})^2]/2} \qquad (۲۷)$$

$$L_{iS} = \sqrt{[(a^* - L_{iM})^2 + (b^* - L_{iM})^2]/2} \qquad (۲۸)$$

$$T_{iS} = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_{\tilde{A}})^2/4}\ \ ,\ \ x_i = a^*, b^*, c^*, d^* \qquad (۲۹)$$

به طوریکه $\bar{x}_{\tilde{A}_i} = (a^* + b^* + c^* + d^*)/4)$

گام سوم: تعریف α به عنوان درجه اطمینان تصمیم گیرنده و β به عنوان میزان خوش بینی تصمیم گیرنده که در اینجا هر دو مقادیر برابر ۰.۵ فرض شده اند.

گام چهارم: محاسبه ارزش رتبه بندی $\text{Rank}(\tilde{A}^*_i)$ برای هر عدد فازی استاندارد:

$$\text{Rank}(\tilde{A}^*_i) = \alpha\left[\beta R_{iH}(\tilde{A}^*_i) + (1-\beta) L_{iH}(\tilde{A}^*_i)\right] + (1-\alpha)\left[\beta R_{iM}(\tilde{A}^*_i) + (1-\beta) L_{iM}(\tilde{A}^*_i) - 1/3(\beta R_{iS}(\tilde{A}^*_i) + (1-\beta) L_{iS}(\tilde{A}^*_i) + T_{iS}(\tilde{A}^*_i))\right] \qquad (۳۰)$$

که بزرگترین مقدار $\text{Rank}(\tilde{A}^*_i)$ نشان دهنده بالاترین رتبه می باشد.

[1] *Right Height*
[2] *Left Height*

- عباس بندی و حجاری [۱۵] مدل رتبه‌بندی بر پایه فرم پارامتریک هر عدد فازی به شرح زیر ارائه دادند:

گام اول: تبدیل هر عدد فازی غیر نرمال به حالت استاندارد با استفاده از رابطه (۷).

گام دوم: محاسبه فرم پارامتریک تابع عضویت با استفاده از رابطه (۲) وسپس محاسبه بزرگی[3] $Mag\ (\tilde{A}^*_i)$ هر عدد فازی استاندارد:

$$Mag\ (\tilde{A}^*_i) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left(\underline{u}(r) + \overline{u}(r) + b^* + c^*\right) f(r) dr\right) \qquad (۳۱)$$

به طوریکه بزرگترین مقدار $Mag\ (\tilde{A}^*_i)$ بدست آمده بالاترین ارزش در رتبه بندی را دارا می باشد.

- چن و چن [۱۶] با در نظر گرفتن میانگین و انحراف معیار اعداد فازی مدل رتبه بندی دیگری به شرح زیر ارائه کردند:

گام اول: تبدیل هر عدد فازی غیر نرمال به حالت استاندارد با استفاده از رابطه (۷) .

گام دوم: محاسبه میانگین $\bar{x}_{\tilde{A}_i}$ و انحراف معیار $S_{\tilde{A}_i}$ هر عدد فازی استاندارد با استفاده از روابط(۱۰) و(۱۱) .

گام سوم: محاسبه ارزش رتبه بندی با استفاده از رابطه زیر:

$$Score(\tilde{A}^*_i) = \frac{\bar{x}_{\tilde{A}_i} \times w_{\tilde{A}_i}}{1 + S_{\tilde{A}_i}} \qquad (۳۲)$$

که در رتبه بندی بزرگترین $Score$ دارای بالاترین رتبه است.

۴. مدل پیشنهادی

در این بخش به تشریح مدل پیشنهادی این مقاله می پردازیم. در این مدل نه تنها از روش فاصله و فرم پارامتریک تابع عضویت برای رتبه بندی اعداد فازی استفاده گردیده بلکه میانگین و انحراف معیار این اعداد را نیز در رتبه بندی آنها دخیل نموده تا با ارائه مدلی جامع بتواند عیوب مدل های پیشین را پوشش دهد. چراکه تا کنون هیچ مدلی متشکل از تمامی پارامترهای مهم در رتبه بندی اعداد فازی ارائه نشده است. فرض کنید n عدد فازی غیرنرمال $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ داریم به طوریکه $1 \le i \le n\ ;\ \tilde{A}_i = (a, b, c, d; w_{\tilde{A}_i})$ و $w_{\tilde{A}_i}$ نشان دهنده ماکزیمم درجه عضویت عدد فازی غیر نرمال $\tilde{A}_i$ می باشد. گام‌های مدل پیشنهادی به شرح زیر است:

گام اول: تبدیل هر عدد فازی غیر نرمال به حالت استاندارد با استفاده از رابطه (۷).

گام دوم: محاسبه میانگین $\bar{X}(\tilde{A}^*_i)$ هر عدد فازی غیر نرمال استاندارد $\tilde{A}^*_i$ با استفاده از رابطه(۵).

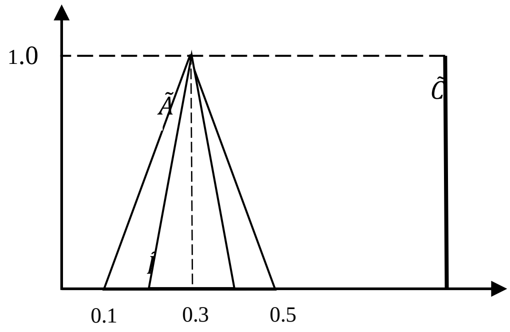
[3] *Magnitude*

گام سوم: محاسبه انحراف معیار $\sigma(\tilde{A}_i^*)$ هر عدد فازی غیر نرمال استاندارد $\tilde{A}_i^*$ با استفاده از رابطه (۶) .

گام چهارم: محاسبه ارزش رتبه بندی $Rank\ (\tilde{A}_i^*)$ برای هر عدد فازی غیر نرمال استاندارد $\tilde{A}_i^*$ با استفاده از رابطه زیر:

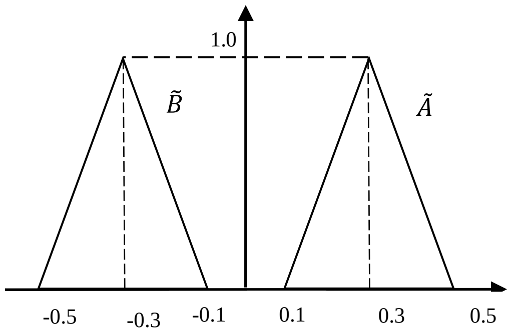
$$Rank(\tilde{A}_i^*) = \frac{(w_{\tilde{A}_i})^2}{2}\left(\int_0^{w_{\tilde{A}_i}}(\underline{u}(r) + \overline{u}(r))f(r)dr\right) + \frac{\bar{X}(\tilde{A}_i^*)}{1+\sigma(\tilde{A}_i^*)} \quad (۳۳)$$

به طوریکه بزرگترین مقدار $Rank\ (\tilde{A}_i^*)$ نشان دهنده بالاترین ارزش در رتبه بندی می باشد.



مجموعه یک

$\tilde{A} = (0.1, 0.3, 0.3, 0.5; 1)$
$\tilde{B} = (0.2, 0.3, 0.3, 0.4; 1)$
$\tilde{C} = (1.0, 1.0, 1.0, 1.0; 1)$



مجموعه دو

$\tilde{A} = (0.1, 0.3, 0.3, 0.5; 1)$
$\tilde{B} = (-0.5, -0.3, -0.3, -0.1; 1)$

شکل ۱. دو مجموعه از اعداد فازی

جدول۱. مقایسه نتایج رتبه بندی توسط ۸ مدل موجود و مدل پیشنهادی

مدل ها	مجموعه یک			مجموعه دو	
	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{C}$	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$
چن و چن [۹]	۱.۲۳۶۰	۱.۲۶۷۴	۲	۱.۲۳۶۰	۰.۶۳۵۹
یانگ و کی [۱۰]	۰.۶۲۴۴	۰.۶۲۱۴	۱	۰.۶۲۴۴	۰.۳۷۵۶
عباس بندی و اسدی (p=1) [۱۱]	۰.۶	۰.۶	۲	۰.۶	۰.۶
عباس بندی و اسدی (p=2) [۱۱]	۰.۵۰۹۹	۰.۴۴۷۲	۱.۴۱۴۲	۰.۵۰۹۹	-۰.۵۰۹۹
اسدی و زنده نام [۱۲]	۰.۳	۰.۳	۱	۰.۳	-۰.۳
چن و چن [۱۳]	۰.۴۴۵۶	۰.۴۷۲۸	۰.۸۶۰۲	۰.۷۴۷۳	۰.۴۴۵۶
لی و چن [۱۴]	۰.۶۰۹۸	۰.۶۲۹۹	۱	۰.۶۰۹۸	۰.۳۰۹۸
عباس بندی و حجاری [۱۵]	۰.۳	۰.۳	۱	۰.۳	-۰.۳
چن و چن [۱۶]	۰.۲۵۷۹	۰.۲۷۷۴	۱	۰.۲۵۷۹	-۰.۲۵۷۹
مدل پیشنهادی	۰.۴۲۷۳	۰.۴۳۸۲	۱.۵	۰.۴۲۷۳	-۰.۴۲۷۳

۵. بررسی و مقایسه مدل پیشنهادی با مدل‌های موجود

در این بخش به مقایسه مدل پیشنهادی با مدل های موجود در زمینه رتبه بندی اعداد فازی می پردازیم. در شکل۱ دو مجموعه اعداد فازی نرمال پیشنهادی توسط چن و چن[۹] آمده و بر اساس آن نتایج رتبه بندی توسط مدل های مختلف ارائه شده است. (جدول ۱)

(۱) طبق مجموعه یک شکل۱ ، مدل های ارائه شده توسط عباس بندی و اسدی [۱۱]، اسدی و زنده نام [۱۲]، عباس بندی و حجاری [۱۵] قابلیت رتبه بندی صحیح دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ که دارای میانگین های برابر و انحراف معیارهای متفاوت می باشند را ندارند.

از طرفی در مقاله ای که توسط یانگ و کی[۱۰]ارائه گردیده است ضریب شاخص بدست آمده برای این دو عدد فازی برابر $IC_{\tilde{A}} = ۰.۶۲۱۴$ و $IC_{\tilde{B}} = ۰.۶۲۴۴$ می باشد که ترتیب رتبه بندی $\tilde{B} > \tilde{A}$ بدست آمده است. حال آنکه اگر این مقادیر را مجددا محاسبه کنیم به نتایج کاملا برعکسی دست می یابیم. با نقاط شاخصی $(x_{\tilde{A}_i}^*, y_{\tilde{A}_i}^*) = (۰.۹۳۶۰, ۰.۳)$ و $(x_{\tilde{B}_i}^*, y_{\tilde{B}_i}^*) =$

(۰.۹۶۷۴,۰.۳) برای دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و فاصله های $d_{\tilde{A}}^{-} = ۱.۳۷۱۱$, $d_{\tilde{A}}^{+} = ۰.۸۲۴۶$, $d_{\tilde{B}}^{+} = ۰.۸۴۱۷$, $d_{\tilde{B}}^{-} = ۱.۳۸۱۴$ ، ضرایب بدست آمده برابر $IC_{\tilde{A}} = ۰.۶۲۴۴$ و $IC_{\tilde{B}} = ۰.۶۲۱۴$ می شوند و ترتیب رتبه بندی $\tilde{A} > \tilde{B}$ می‌باشد. لازم به ذکر است که مدل یانگ و کی نه تنها در محاسبه این مجموعه خاص بلکه در رتبه بندی تمامی اعداد فازی مثلثی نرمال با میانگین‌های یکسان و انحراف معیارهای متفاوت نتایج نادرستی را ارائه می دهد. اشتباه محاسباتی مقاله یانگ و کی در تحقیقات چن و چن [۱۶]، چن و وانگ[۱۷]، لی و چن[۱۴] بدون تصحیح آن به منظور مقایسه مورد استفاده قرار گرفته است.

(۲) طبق مجموعه دو شکل۱، مدل عباس بندی و اسدی[۱۱] برای حالت p=1 ، دو مجموعه را برابر می داند در حالی که مجموعه $\tilde{A}$ در ناحیه مثبت و مجموعه $\tilde{B}$ در ناحیه منفی قرار دارد. بنابراین مدل آنها قادر به رتبه بندی صحیح دو عدد فازی متقارن نسبت به محورy ها نمی باشد.

با کنار گذاشتن چهار مدلی که در دو مجموعه قبلی ضعف‌های آنها تشریح شد حال با استفاده از شش مجموعه فازی که در شکل شماره ۲ نشان داده شده اند، مدل های باقی مانده را مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهیم. مجموعه‌های یک، دو و سه توسط چن و چن [۹]، مجموعه چهار به وسیله یانگ و کی [۱۰] و مجموعه پنج و شش به وسیله لی وانگ و لی[۷] معرفی شده‌اند.

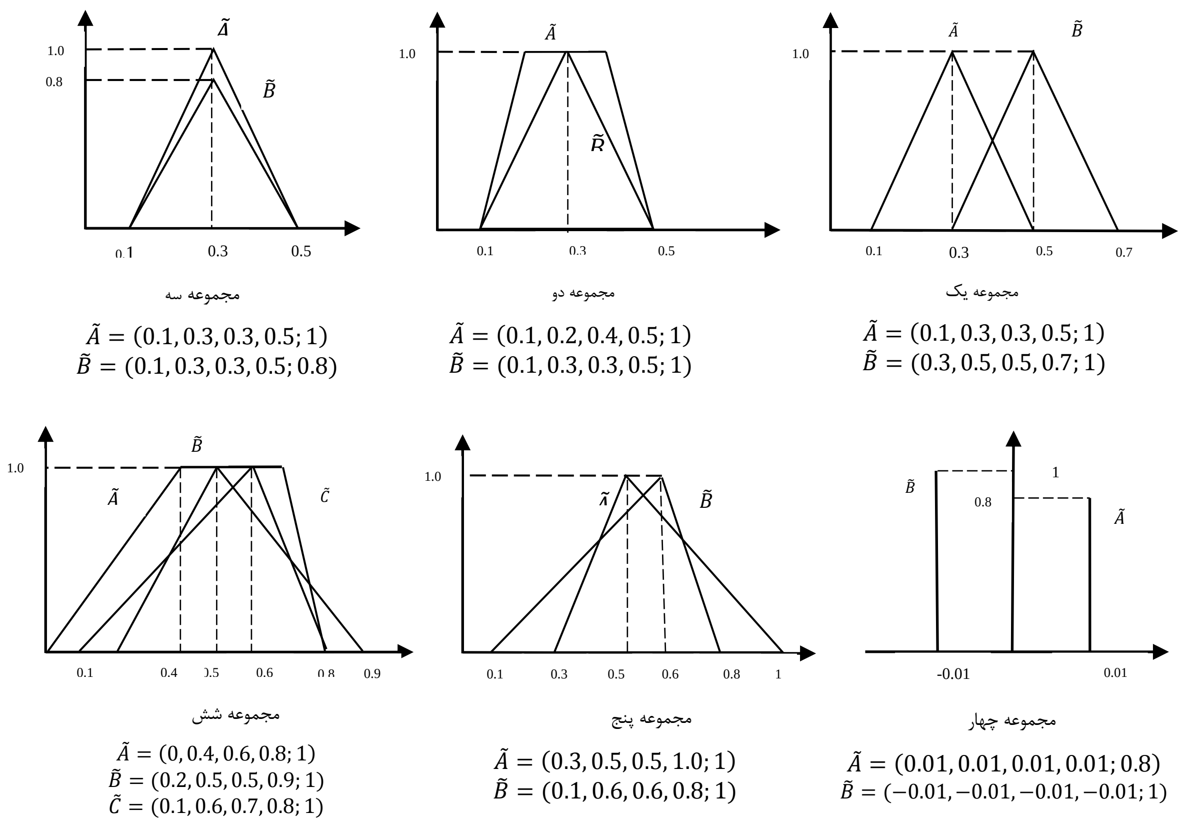
نتایج رتبه بندی به وسیله چهار مدل موجود و مدل پیشنهادی درجدول۲ نشان داده شده است. این نتایج بیانگر آن است که:

(۱) تمامی مدل‌ها در رتبه بندی اعداد فازی مجموعه یک ترتیب رتبه بندی یکسان ارائه می دهند. این امر نشان دهنده آن است که مقدار میانگین اعداد، عامل مهمتری در رتبه بندی اعداد برای همه این مدل ها می باشد.

(۲) در مجموعه دو از شکل۲ ، مدل لی و چن [۱۴] رتبه بندی صحیحی را ارائه نمی دهد و به طور کلی مدل ارائه شده توسط آنها قادر به رتبه بندی صحیح دو عدد فازی مثلثی و ذوزنقه ای با مقدار میانگین یکسان نمی باشد.

(۳) در مجموعه سه از شکل۲، تمامی مدل های مذکور نتایج رتبه بندی یکسانی را ارائه می دهند. این امر نشان می دهد که این مدل ها در رتبه بندی اعداد فازی غیر نرمال که دارای میانگین و انحراف معیار برابر هستند مشکلی ندارند.

(۴) برای مجموعه چهار از شکل۲، مدل چن و چن[۹]، لی و چن[۱۴] و چن و چن[۱۳]، قادر به رتبه بندی این دو عدد فازی متقارن نسبت به محورy ها نمی‌باشند و ترتیب رتبه بندی نادرستی را ارائه می کنند.



شکل ۲. شش مجموعه از اعداد فازی

(۵) در مجموعه پنج از شکل۲، هر چهار مدل به همراه مدل پیشنهادی ترتیب رتبه بندی $\tilde{A} > \tilde{B}$ را ارئه می‌دهند. به این ترتیب، مدل های مذکور قادر به ارائه رتبه بندی صحیح دو عدد فازی نامتقارن با میانگین و انحراف معیار برابر می باشند.

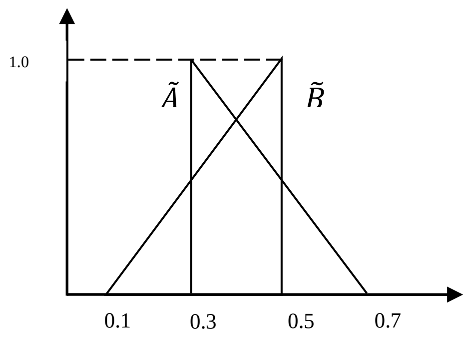
(۶) در مجموعه شش از شکل۲، نتایج حاصل از رتبه بندی مدل های چن و چن[۹]، چن و چن[۱۳]، به صورت $\tilde{B} > \tilde{C} > \tilde{A}$ بوده در حالی که برای مدل‌های لی و چن[۱۴]، چن و چن [۱۶] و مدل پیشنهادی از آنجایی که عامل میانگین در رتبه بندی نسبت به انحراف معیار ارجح است ترتیب رتبه بندی به صورت $\tilde{C} > \tilde{B} > \tilde{A}$ می باشد.

جدول۲. مقایسه نتایج رتبه بندی توسط ۴ مدل موجود و مدل پیشنهادی

مدل ها	مجموعه یک		مجموعه دو		مجموعه سه	
	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$
چن و چن [۹]	۱.۲۳۶۰	۱.۴۳۶۰	۱.۲۰۶۷	۱.۲۳۶۰	۱.۲۳۶۰	۱.۱۵۱۳
چن و چن [۱۳]	۰.۴۴۵۶	۰.۴۸۸۴	۰.۴۲۳۹	۰.۴۴۵۶	۰.۴۴۵۶	۰.۳۵۶۵
لی و چن [۱۴]	۰.۶۰۹۸	۰.۷۰۹	۰.۶۱۵۳	۰.۶۰۹۸	۰.۶۰۹۸	۰.۵۰۹۸
چن و چن [۱۶]	۰.۲۵۷۹	۰.۴۲۹۸	۰.۲۵۳۷	۰.۲۵۷۹	۰.۲۵۷۹	۰.۲۰۶۳
مدل پیشنهادی	۰.۴۲۷۳	۰.۷۱۲۲	۰.۴۲۴۹	۰.۴۲۷۳	۰.۴۲۷۳	۰.۳۳۸۸

مدل ها	مجموعه چهار		مجموعه پنج		مجموعه شش		
	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{C}$
چن و چن [۹]	۰.۹۸۹۱	۰.۹۹	۱.۴۸۵۹	۱.۳۸۵۹	۱.۲۸۹۰	۱.۴۳۹۵	۱.۴۰۴۶
چن و چن [۱۳]	۰.۴	۰.۵	۰.۴۱۲۸	۰.۴۰۰۵	۰.۳۷۱۹	۰.۴۱۵۵	۰.۳۹۷۹
لی و چن [۱۴]	۰.۴۰۵	۰.۴۹۵	۰.۷۱۵۵	۰.۶۹۰۵	۰.۶۵۱	۰.۶۹۲	۰.۷۰۵۵
چن و چن [۱۶]	۰.۰۰۸	-۰.۰۱	۰.۴۴۲۸	۰.۴۰۴۳	۰.۳۳۵۴	۰.۴۰۷۹	۰.۴۱۹۶
مدل پیشنهادی	۰.۰۱۲	-۰.۰۱۵	۰.۷۹۸۰	۰.۷۱۰۸	۰.۶۰۸۹	۰.۷۲۴۱	۰.۷۴۶۷

طبق جدول ۱ و ۲ تنها مدل چن و چن [۱۶] و مدل پیشنهادی در تمامی مجموعه های که مورد بررسی قرار گرفت، نتایج رتبه‌بندی صحیحی را ارئه دادند. حال اگر مجموعه ای از دو اعداد فازی متقارن $\tilde{A} = (۰.۳, ۰.۳, ۰.۳, ۰.۷ \,;\, ۱)$ و $\tilde{B} = (۰.۱, ۰.۵, ۰.۵, ۰.۵ \,;\, ۱)$ مطابق شکل۳ در نظر گرفته شود،



شکل۳. دو عدد فازی متقارن

طبق مدل ارائه شده توسط چن و چن [۱۶]، این دو عدد دارای میانگین های یکسانی معادل ۰.۴ و همچنین انحراف معیارهای یکسانی معادل ۰.۲ می باشند. نتیجه رتبه بندی مدل چن و چن $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ می باشد. اما از دیدگاه مدل پیشنهادی این دو عدد فازی دارای میانگین های برابری نمی باشند بطوریکه $\bar{X}(\tilde{A}) = ۰.۴۳$ و $\bar{X}(\tilde{B}) = ۰.۳۶$ بوده و نتیجه رتبه بندی این مدل $\tilde{A} > \tilde{B}$ می باشد. همانطور که مطرح شد در هر دو مدل میانگین مهمترین عامل در رتبه بندی اعداد فازی بوده است ولی از آنجایی که این دو مدل از روابط یکسانی برای اندازه گیری میانگین استفاده نمی کنند به تبع نتایج یکسانی ارائه نمی‌دهند. روش میانگین گیری مدل پیشنهادی بر اساس شکل تابع عضویت عدد فازی بوده در حالی که روش چن و چن از روش میانگین گیری ساده استفاده می‌کند. لازم به ذکر است نتایج رتبه بندی مدل های چن و چن، یانگ و کی، چن و چن نیز به صورت $\tilde{A} > \tilde{B}$ می باشد. بنابراین با توجه به مثال های ارائه شده در بخش پنجم مقاله، اثبات گردید که مدل‌های مذکور هر یک دارای نقصی در رتبه بندی صحیح اعداد فازی می باشند.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل جدید برای رتبه بندی اعداد فازی غیر نرمال براساس پارامتر هایی چون درجه عضویت، میانگین، انحراف

معیار و فرم پارامتریک تابع عضویت ارائه گردیده است. این مدل ترکیبی با دارا بودن تمامی پارامترهای مهم در رتبه بندی اعداد فازی توانسته است کاستی های مدل‌های پیشین را پوشش می‌دهد. در این مقاله با استفاده از مثال هایی که از مجموعه های فازی مختلف ارائه شد، ثابت گردیده مدل پیشنهادی نقص‌های مدل های موجود را دارا نبوده و نسبت به مدل های موجود برتری دارد.

منابع

[1] Bortolan, G., Degani, R. *"A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Numbers"*. Fuzzy Sets and Systems, Vol.15. 1985, pp. 1–19.

[2] Chen, S.J., Hwang C.L., *"Fuzzy Multiple Attribute Decision Making"*, Springer; New York,1992.

[3] Wang, X., Kerre, E.E., *"Reasonable Properties for the Ordering of Fuzzy Quantities (I)"*, Fuzzy Sets and Systems, Vol.118. 2001, pp. 375-385.

[4] Chen, S.H., *"Ranking Fuzzy Numbers with Maximizing Set and Minimizing Set"*, Fuzzy Sets and Systems, Vol.17.1985, pp. 113-129.

[6] Cheng, S.H., *"Operations of Fuzzy Number with Function Principle",*Tamkang. Jornal of Management and Science, Vol. 6. 1985, pp.13-25.

[7] Cheng, C.H., *"A New Approach for Ranking Fuzzy Numbers by Distance Method"*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 95. 1998, pp.307-317.

[8] Lee-kwang, H., Lee, J.H., *"A Method for Ranking Fuzzy Numbers and its Application to Decision-Making"*, IEEE Trans Fuzzy Systems, Vol.7. 1999, pp.677-685.

[9] Lee, E.S., Li, R.L., *"Comparison of Fuzzy Numbers Based on the Probability Measure of Fuzzy Events", Computers and* Mathematics with Applications, Vol. 15. 1988, pp.887-896.

[10] Chen, S.J., Chen, S.M., *"A New Mmethod for Handing Multicriteria Fuzzy Decision-Making Problems using FN-IOWA Operators"*, Cybernetics and Systems, Vol. 34. 2003, pp.109-137.

[11] Yong, D., Qi, L., *"A TOPSIS-Based Centroid-Index Ranking Method of Fuzzy Numbers and its Application in Decision-Making"* ; Cybernetics and Systems,Vol.36. 2005, pp.581-595.

[12] Abbasbandy, S., Asady, B., *"Ranking of Fuzzy Numbers by Sign Distance"* ; Information Science, Vol. 176. 2006, pp.2405-2416.

[13] Asady, B., Zendehnam, A., *"Ranking Fuzzy Numbers by Distance Minimization"*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 31. 2007, pp. 2589-2598.

[14] Chen, S.J., Chen, S.M., *"Fuzzy Risk Analysis Based on the Ranking of Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers"*, Applied Intelligence, Vol. 95. 2007, pp. 307-317.

[15] Lee, L.W., Chen, S.M., *"Fuzzy Risk Analysis Based on Fuzzy Numbers with Different Shapes and Different Deviations"*, Expert Systems with Applications, Vol. 34. 2008, pp. 2763-2771.

[16] Abbasbandy, S., Hajjari, T.,*"A New Approach for Ranking of Trapezoidal Fuzzy Numbers"*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 57. 2009, pp.413-419.

[17] Chen, S.M., Chen, J.H., *"Fuzzy Risk Analysis Based on Ranking Generalized Fuzzy Numbers with Different Heights and Different Spreads"* , Expert Systems with Applications, Vol. 36. 2009, pp. 6833-6842.

[18] Chen, S.M., Wang, S.H., *"Fuzzy Risk Analysis Based on Ranking Fuzzy Numbers using a-Cuts Belief Features and Signal/Noise Ratios"*, Expert Systems with Applications, Vol. 36. 2009, pp.5576-5581.