International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2012)

June 2012, Volume 23, Number 1
pp. 15-27

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

Design of a Robust EWMA t Chart with Variable Sampling Intervals for Monitoring Changes in the Process Mean

R. Baradaran Kazemzadeh*, M. Karbasian & M.A. Babakhani

Reza Baradaran Kazemzadeh, *Associate professor, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran*
Mahdi Karbasian, *Assistant Professor, Maleke-Ashtar University of Technology, Esfahan, Iran*
Mohammad Ali Babakhani, *Ms Student of IE, Payame-noor University of Tehran, Tehran, Iran*

Keywords

Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) control chart, Average Time to Signal (ATS), Variable Sampling Intervals (VSI), Markov Chain.

ABSTRACT

The performance of an X-bar chart is usually studied under the assumption that the process standard deviation is well estimated and does not change. This is, of course, not always the case in practice and X-bar charts are not robust against errors in estimating the process standard deviation or changing standard deviation. In this paper, the use of an exponentially weighted moving average (EWMA) t chart with variable sampling intervals to monitor the process mean is discussed. We have determined the optimal control limits for the VSI EWMA t chart so that the chart has the desired robustness property against errors in estimating the process standard deviation or changing standard deviation. Performance of the proposed chart is compared with similar charts using the Markov chain approach and simulation studies..

© 2012 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 23, No. 1, All Rights Reserved

* **Corresponding author. Reza Baradaran Kazemzadeh**
Email: *rkazem@modares.ac.ir*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــــریت تولیـــد

شمـــــاره ۱، جلـــد ۲۳، خـــــرداد ۱۳۹۱
صفحـــــه ۲۷-۱۶

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

طراحی یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی پایدار با بازه‌های نمونه‌گیری متغیر برای کنترل تغییرات در میانگین فرآیند

رضا برادران کاظم زاده*، مهدی کرباسیان و محمد علی باباخانی

کلمات کلیدی

نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، متوسط زمان هشدار، بازه های نمونه گیری متغیر، زنجیره مارکوف.

چکیده:

عملکرد یک نمودار X-bar معمولاً تحت این فرض که انحراف معیار فرآیند به خوبی تخمین زده شده و تغییر نمی کند، بررسی می شود. البته این فرض در عمل معمولاً درست نبوده و نمودارهای X-bar در برابر اشتباهات تخمین انحراف معیار فرآیند یا تغییرات انحراف معیار پایدار نیستند. در این مقاله به بررسی یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با بازه های نمونه گیری متغیر برای کنترل تغییرات در میانگین فرآیند پرداخته می شود. حدود کنترل بهینه به نحوی تعیین شده که نمودار در برابر اشتباهات تخمین انحراف معیار یا تغییرات آن پایداری خوبی داشته باشد. برای مقایسه عملکرد آن با سایر نمودارهای مشابه از روش زنجیره مارکوف استفاده شده و با استفاده از شبیه سازی، نتایج به دست آمده بررسی شده است. علت استفاده از ویژگی بازه های نمونه گیری متغیر، واکنش سریع تر نمودار به تغییرات میانگین است..

۱. مقدمه

در مفاهیم کنترل آماری فرآیند نمودار X-bar دارای اهمیت خاصی است. از جمله ویژگی های این نمودار، سادگی و اثربخشی هزینه‌ای برای کنترل تغییرات نسبتاً بزرگ در میانگین فرآیند است. عملکرد نمودار X-bar تحت فرضیات زیر بررسی می شود :

الف- مستقل بودن[۲] : مشاهدات داخل و بین زیر گروه ها مستقل هستند.

ب- نرمال بودن[۳] : متغیر مورد بررسی دارای توزیع نرمال است.

ج- ساختار درست[۴] : هیچ اشتباهی در تخمین انحراف معیار فرآیند وجود ندارد [۱].

در حالتی که فرض اول نقض شود، نمودارهای کنترل برای فرآیندهای همبسته[۵] باید استفاده شوند [۸-۲]. برای حالتی که فرض دوم نقض شود، نمودارهای کنترل برای توزیع های نامتقارن[۶] استفاده می شوند [۱۵-۹]. همچنین طبق نظر Roberts نمودار میانگین متحرک موزون نمایی[۷] ای که خوب طراحی شده باشد در برابر نقض فرض دوم پایدار است [۱۶]. به حالتی که فرض سوم نقض شود توجه کمتری شده و تحقیقات اندکی توسط Chao و Cheng و همچنین Chen و Cheng در این زمینه انجام شده است [۱۸-۱۷]. فرض سوم زمانی ممکن است نقض شود که داده های کافی و قابل اطمینان برای تخمین دقیق انحراف معیار فرآیند در دست نباشند یا انحراف معیار فرآیند ناپایدار (متغیر)

تاریخ وصول: ۸۹/۴/۸

تاریخ تصویب: ۹۰/۳/۲

***نویسنده مسئول مقاله: رضا برادران کاظم زاده**، دانشیار دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس. rkazem@modares.ac.ir

مهدی کرباسیان، استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی مالک اشتر. mkarbasi@mut-esf.ac.ir

محمد علی باباخانی، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه پیام نور مرکز تهران. mababakhani@gmail.com

[2] - *Independence*
[3] - *Normality*
[4] - *Correct Setup*
[5] - *Correlated Processes*
[6] - *Asymmetrical Distributions*
[7] - *Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

باشد. بنابراین عملکرد نمودار X-bar بدتر می شود (نمودار بیشتر یا کمتر از حد مورد انتظار هشدار می دهد).

اخیراً تحقیقاتی توسط Zhang و همکارانش بر روی نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با بازه نمونه گیری ثابت[1] برای کنترل تغییرات در میانگین فرآیند انجام شده که با استفاده از توزیع t-student (و بدون نیاز به تخمین پارامترها برای محاسبه حدود کنترل) به تعیین حدود کنترل بهینه برای نمودار خود پرداخته اند. همچنین این نمودار بر خلاف نمودارهای مشابه که به مقدار زیادی داده در فاز I برای تخمین حدود کنترل نیاز دارند (و تردید درباره درست تخمین زدن حدود کنترل)، بدون داده های فاز I حدود کنترل را محاسبه کرده و تردید درباره درست تخمین زدن حدود کنترل را برطرف می‌سازد [۱]. بنابراین نیاز به نموداری که علاوه بر پایداری مناسب در برابر تغییر در انحراف معیار فرآیند یا اشتباه در تخمین آن، دارای عملکرد قابل قبول باشد کاملاً احساس می شود. از این رو در ادامه تحقیقات انجام شده توسط Zhang و همکارانش و برای بهبود عملکرد نمودار پیشنهادی آنها، ویژگی بازه های نمونه گیری متغیر[2] به نمودار فوق اضافه شده است. متغیر بودن بازه نمونه گیری این امکان را می دهد تا زمانی که تغییری در میانگین فرآیند احساس می شود، نمونه گیری زودتر از حد معمول انجام شده و از تولید محصول با کیفیت ضعیف (نامطلوب)[3] جلوگیری شود. همچنین نمودارهای کنترل با بازه های نمونه گیری متغیر برای استفاده در تولیدات کوتاه مدت کاربردی تر و مؤثرتر از نمودارهای کنترل با بازه نمونه گیری ثابت هستند [۱۹].

در ادامه طراحی نمودار پیشنهادی (VSI EWMA t chart) شرح داده خواهد شد. در قسمت سوم به بررسی عملکرد نمودار پیشنهادی و مقایسه آن با نمودارهای FSI EWMA X-bar و FSI EWMA t پرداخته می شود. در قسمت چهارم نتایج حاصل از تحقیق بیان شده و پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی مطرح می گردد.

۲. طراحی نمودار پیشنهادی (VSI EWMA t Chart)

فرض کنید زیرگروه های $\{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}\}$ با اندازه نمونه n در زمان های $i = 1, 2, \dots$ مشاهده شده اند. در ضمن مشاهدات داخل و بین زیرگروه ها مستقل بوده و داریم :

$$X_{i,j} \sim N(\mu_0 + a\sigma_0, b\sigma_0) \;,\; i = 1, 2, \dots \;,\; 1 \le j \le n \qquad (۱)$$

که μ_0 و σ_0 میانگین و انحراف معیار اسمی (واقعی) فرآیند هستند. اگر $a = 0$ و $b = 1$ فرآیند تحت کنترل قرار دارد. در غیر این صورت فرآیند تغییر کرده (خارج از کنترل است)، اگر میانگین فرآیند μ_0 تغییر کند $(a \neq 0)$ یا انحراف معیار فرآیند σ_0 تغییر کند $(b \neq 1)$ و یا هر دوی آنها (μ_0 , σ_0) تغییر کنند.

میانگین زیرگروه $(\bar{X}_i)$ و انحراف معیار زیرگروه (S_i) در زمان i به صورت زیر تعریف می شوند :

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{i,j} \quad \text{و} \quad S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{i,j} - \bar{X}_i)^2} \qquad (۲)$$

آماره کنترلی (Y_i) برای نمودار VSI EWMA t به صورت زیر تعیین می شود :

$$Y_0 = 0 \;;$$
$$Y_i = \lambda T_i + (1-\lambda) Y_{i-1} \;;\; i = 1, 2, \dots \qquad (۳)$$

و T_i به صورت زیر است :

$$T_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{S_i / \sqrt{n}} \;. \qquad (۴)$$

و $\lambda \in (0,1]$ ضریب هموارسازی است که معمولا مقادیر کوچک مانند $\lambda = 0.1$ می گیرد. زمانی که $\lambda = 1$ باشد، نمودار EWMA t به نمودار t تبدیل می شود. از آنجایی که توزیع t حول صفر متقارن و میانگین Y_i برابر صفر است (زمانی که $a = 0$)، حدود کنترل و حدود هشدار بالایی و پایینی نمودار VSI EWMA t حول صفر قرینه اند $(UCL_{vt} = -LCL_{vt} \;;\; UWL_{vt} = -LWL_{vt})$. حد کنترل بالایی (UCL_t) نمودار EWMA t (FSI & VSI) تابعی از ضریب هموارسازی (λ)، متوسط طول دنباله تحت کنترل[4] و اندازه نمونه در هر زیرگروه (n) است. حد هشدار بالایی (UWL_{vt}) هم تابعی از ضریب حدود هشدار (w) است که از رابطه زیر به دست می آید :

$$w = \Phi^{-1}\left[\frac{\Phi(k)(2-2h_S) + h_L - 1}{2(h_L - h_S)}\right] \;. \qquad (۵)$$

که $\Phi(...)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و $k = 3$ ضریب حدود کنترل (با توجه به نمودار شوهارت با 3σ)، h_L بازه نمونه گیری بلند[5] و h_S بازه نمونه گیری کوتاه[6] می باشند [۲۰].

[1] - *Fixed Sampling Interval (FSI)*
[2] - *Variable Sampling Intervals (VSI)*
[3] - *Poor Quality*
[4] - *In-control Average Run Length (ARL_0)*
[5] - *Long Sampling Interval (h_L)*
[6] - *Short Sampling Interval (h_S)*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

برخلاف نمودارهای کنترل با بازه نمونه گیری ثابت، بازه نمونه گیری (زمان بین دو نمونه گیری متوالی T_i و T_{i+1}) در نمودارهای کنترل با بازه های نمونه گیری متغیر به مقدار فعلی آماره کنترلی (Y_i) وابسته است. در صورتی که آماره کنترلی داخل ناحیه $R_L = [LWL , UWL]$ (ناحیه نمونه گیری بلند) بیفتد، برای نمونه گیری بعدی و محاسبه آماره (Y_{i+1}) باید از بازه نمونه گیری بلند استفاده کرد. اگر آماره کنترلی در ناحیه نمونه گیری کوتاه $R_S = [LCL , LWL) \cup (UWL , UCL]$ بیفتد، باید از بازه نمونه گیری کوتاه استفاده کرد. زمانی که آماره کنترلی خارج از حدود کنترل بالایی یا پایینی بیفتد، فرآیند خارج از کنترل بوده و باید اقدام لازم صورت گیرد.

همان طور که توسط Lucas و Saccucci بیان شده، ممکن است محدودیت های کاربردی (عملی) برای تعیین میزان کوچک بودن بازه نمونه گیری کوتاه موجود باشند [۲۱]. مقدار بازه نمونه گیری کوتاه نشان دهنده کوچکترین بازه زمانی ممکن برای نمونه گیری بین زیرگروه هاست و هر بازه زمانی کوچکتر از آن غیر ممکن است (به دلیل زمان لازم برای تشکیل زیرگروه های منطقی، انجام بازرسی، تحلیل نتایج، انتقال مواد و قطعات و دیگر تأخیرهای غیرقابل اجتناب). از این رو در این مقاله از مقادیر کوچک و مخالف صفر (مانند $h_S = 0.2$) برای بازه نمونه گیری کوتاه استفاده کرده ایم.

مهمترین معیارهای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل که بیشتر از بقیه مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از :

- متوسط طول دنباله[1] : متوسط تعداد نمونه های لازم قبل از این که نمودار کنترل یک حالت خارج از کنترل را هشدار دهد یا یک زنگ خطر اشتباهی به صدا درآید.

- متوسط زمان هشدار[2] : امید ریاضی زمان سپری شده از آغاز تغییر (انحراف بادلیل) در فرآیند تا زمانی که نمودار هشدار می دهد.

اگرچه متوسط طول دنباله ابزار مفیدی برای مقایسه عملکرد نمودارهای کنترل مختلف به شمار می رود ولی به دلیل ثابت نبودن (کوتاه یا بلند بودن) بازه های نمونه گیری در نمودارهای کنترل با بازه های متغیر، نمی توان از آن برای مقایسه نمودارهای با بازه نمونه گیری متغیر استفاده کرد. بنابراین به جای متوسط طول دنباله از متوسط زمان هشدار استفاده می شود. زمانی که فرآیند تحت کنترل بوده و در این حالت باقی بماند، مطلوب است که متوسط زمان هشدار بزرگ باشد. در صورتی که فرآیند تغییر کند (خارج از کنترل باشد)، مطلوب است متوسط زمان هشدار تا حد ممکن کوچک باشد. برای نمودارهای کنترل با بازه نمونه گیری ثابت، متوسط زمان هشدار ضریبی از متوسط طول دنباله است. بنابراین داریم:

$$ATS^{FSI} = h_F \times ARL^{FSI} . \qquad (۶)$$

که در آن h_F بازه زمانی بین زیرگروه ها و ثابت است [۲۲]. برای نمودارهای کنترل با بازه های نمونه گیری متغیر، متوسط زمان هشدار به متوسط طول دنباله و بازه های نمونه گیری وابسته است و داریم:

$$ATS^{VSI} = E(h) \times ARL^{VSI} . \qquad (۷)$$

که در آن E(h) امید ریاضی بازه های نمونه گیری است و از رابطه زیر به دست می آید :

$$E(h) = h_S \times p_S + h_L \times p_L . \qquad (۸)$$

و p_S و p_L به ترتیب نسبت زمان هایی هستند که بازه نمونه گیری کوتاه یا بلند استفاده می شود [۲۳].

برای مقایسه دو نمودار کنترل با بازه نمونه گیری ثابت، تنها لازم است که متوسط طول دنباله تحت کنترل هر دو را برابر با ARL_0 (که معمولاً با توجه به حدود کنترل نمودار کلاسیک شوهارت با 3σ مقدار آن برابر است با $ARL_0 = 1/\alpha = 1/0.0027 = 370.4$) قرار داده و متوسط زمان هشدار خارج از کنترل آنها را محاسبه و ارزیابی کنیم.

مقایسه نمودارهای کنترل با بازه های نمونه گیری متغیر کمی پیچیده تر است، زیرا اگر یکی از نمودارها نمونه گیری بیشتری انجام دهد، تغییر در فرآیند را نیز سریع تر از دیگری نشان می‌دهد.

بنابراین، برای مقایسه متوسط زمان هشدار خارج از کنترل دو نمودار کنترل با بازه های نمونه گیری متغیر، لازم است که متوسط طول دنباله تحت کنترل هر دوی آنها برابر با ARL_0 و امید ریاضی بازه های نمونه گیری در حالت تحت کنترل هر دو نمودار برابر با $E_0(h)$ باشند. از آنجایی که در نمودارهای کنترل با بازه نمونه گیری ثابت داریم:

$$h_S = h_L = h_F = 1 \text{ time unit} \rightarrow ATS^{FSI} = ARL^{FSI} . \qquad (۹)$$

امید ریاضی بازه های نمونه گیری در حالت تحت کنترل برابر است با:

$$E_0(h) = 1 \text{ time unit} . \qquad (۱۰)$$

[1] - *Average Run Length (ARL)*
[2] - *Average Time to Signal (ATS)*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

در این حالت اطمینان می یابیم که متوسط زمان هشدار تحت کنترل برای نمودار کنترل با بازه نمونه گیری ثابت و نمودار کنترل با بازه های نمونه گیری متغیر برابر است، یعنی:

$$ATS_0^{VSI} = ATS_0^{FSI} = ARL_0 . \quad (۱۱)$$

براین اساس، مقادیر متوسط زمان هشدار خارج از کنترل (به ازای تغییرهای مختلف a) را برای نمودارهای کنترل با بازه های نمونه گیری ثابت و متغیر محاسبه و با هم مقایسه می کنیم.
با استفاده از الگوریتم زیر که توسط Castagliola و همکارانش ارائه شده، حدود کنترل بهینه (λ^* , UCL_{vt}^*) و متوسط زمان هشدار خارج از کنترل بهینه (ATS^*) را محاسبه می کنیم :

گام ۱- برای هر $\lambda \in \{0.01 , 0.011, 0.012 , \dots , 0.999\}$ و $a = 0$، طوری UCL_{vt} را محاسبه می کنیم که $ATS_0 = ARL_0 =$ 370.4 باشد. در پایان این مرحله، مجموعه ای از جفت های (λ , UCL_{vt}) برای گام دوم داریم.

گام ۲- برای هر تغییر در میانگین $a \in \{0.1 , 0.2 , \dots , 2\}$ و برای هر جفت (λ , UCL_{vt}) مقدار ATS را حساب می‌کنیم و جفتی که کمترین مقدار ATS را برای تغییر a دارند انتخاب می کنیم. این مقدار (بهینه) ATS^* برای تغییر a است [۲۴].
برای محاسبه حدود کنترل و متوسط زمان هشدار خارج از کنترل بهینه برای نمودارهای کنترل از روش زنجیره مارکوف ارائه شده توسط Brook و Evans استفاده کرده ایم (برای اطلاعات بیشتر به پیوست مراجعه کنید) [۲۵].
الگوریتم فوق توسط برنامه MATLAB کدنویسی شده و برای مقادیر مختلف اجرا گردید. جدول ۱ مقادیر مینیمم متوسط زمان هشدار (ATS*) و حدود کنترل بهینه (λ^* , UCL_{vt}^*) را برای تغییرهای مختلف ($a \in \{0.1 , 0.2 , \dots , 2\}$) و اندازه زیرگروه‌های $n = \{ 3 , 5 , 7 , 9 \}$ نشان می دهد. مقدار بازه نمونه گیری کوتاه را $h_S = 0.2$ واحد زمان و $p_S = 0.6$ در نظر گرفته ایم. برای مثال، برای یافتن تغییر $a = 0.5$ در میانگین فرآیند زمانی که بازه نمونه گیری کوتاه $h_S = 0.2$ واحد زمان، $p_S = 0.6$ و اندازه زیرگروه $n = 5$ است، مقادیر بهینه عبارتند از:

$$\lambda^* = 0.116 ; UCL_{vt}^* = 1.029 ; ATS^* = 6.76 .$$

برای بررسی تأثیر p_S (برای $p_S = \{0.4 , 0.5 , 0.6\}$) روی مقادیر حدود کنترل بهینه زمانی که $h_S = 0.2$ و $n = 5$ باشد، مقادیر ATS^* را محاسبه می‌کنیم. این مقادیر در جدول ۲ آمده اند.
شکل ۱ (آ، ب و ج) منحنی‌های ATS مربوط را نشان می‌دهد. تنها برای جفت‌های (λ^* , UCL_{vt}^*) مربوط به تغییر بزرگ ($a = 1.5$)،اختلاف معناداری بین این مقادیر مشاهده می شود. بنابراین هر چه p_S بزرگتر باشد، از بازه نمونه گیری کوتاه بیشتر از بازه نمونه گیری بلند استفاده خواهد شد و w نیز کوچکتر خواهد شد. در نتیجه مقدار ATS^* نیز کمتر می شود.

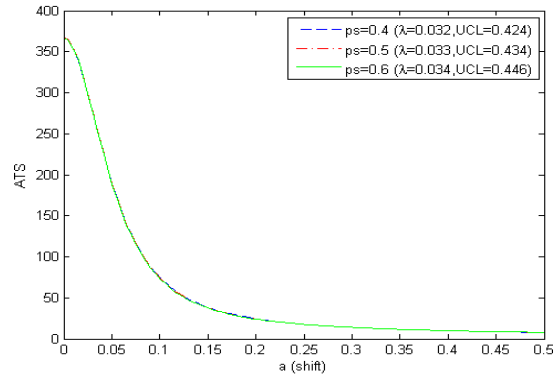
جدول ۱. مقادیر بهینه برای نمودار VSI EWMA t زمانی که $h_S = 0.2$، $p_S = 0.6$ و $ATS_0 = 370.4$ باشد.

shift	*n = 3*			*n = 5*			*n = 7*			*n = 9*		
(a)	λ^*	UCL_{vt}^*	ATS^*	λ^*	UCL_{vt}^*	ATS^*	λ^*	UCL_{vt}^*	ATS^*	λ^*	UCL_{vt}^*	ATS^*
0.1	0.010	0.343	132.09	0.013	0.228	64.75	0.017	0.241	47.25	0.022	0.272	38.14
0.2	0.014	0.440	53.14	0.034	0.446	23.99	0.055	0.532	17.02	0.067	0.568	13.58
0.3	0.023	0.631	30.31	0.061	0.662	13.37	0.094	0.756	9.47	0.124	0.845	7.60
0.4	0.032	0.802	20.48	0.092	0.876	9.01	0.136	0.966	6.43	0.177	1.068	5.23
0.5	0.042	0.979	15.28	0.116	1.029	6.76	0.176	1.151	4.90	0.228	1.267	4.07
0.6	0.049	1.097	12.14	0.143	1.194	5.44	0.214	1.319	4.02	0.265	1.406	3.41
0.7	0.057	1.228	10.07	0.170	1.353	4.58	0.248	1.465	3.47	0.311	1.575	3.02
0.8	0.070	1.434	8.63	0.192	1.480	3.99	0.274	1.575	3.12	0.338	1.673	2.77
0.9	0.077	1.542	7.56	0.209	1.577	3.59	0.295	1.663	2.88	0.375	1.806	2.62
1.0	0.087	1.694	6.76	0.226	1.673	3.28	0.320	1.767	2.71	0.406	1.917	2.51
1.1	0.098	1.857	6.12	0.244	1.774	3.06	0.341	1.854	2.60	0.448	2.067	2.44
1.2	0.104	1.945	5.62	0.258	1.852	2.89	0.365	1.953	2.52	0.504	2.267	2.39
1.3	0.114	2.090	5.20	0.269	1.913	2.77	0.392	2.064	2.46	0.560	2.468	2.35
1.4	0.123	2.219	4.86	0.280	1.974	2.67	0.430	2.220	2.42	0.625	2.703	2.32
1.5	0.135	2.389	4.56	0.290	2.029	2.60	0.469	2.380	2.38	0.693	2.952	2.29
1.6	0.142	2.488	4.31	0.290	2.029	2.54	0.515	2.569	2.35	0.738	3.119	2.27
1.7	0.149	2.585	4.10	0.310	2.139	2.50	0.556	2.738	2.33	0.789	3.311	2.25
1.8	0.157	2.696	3.91	0.333	2.265	2.46	0.612	2.970	2.31	0.833	3.479	2.24
1.9	0.170	2.875	3.74	0.346	2.336	2.43	0.653	3.141	2.29	0.873	3.634	2.23
2.0	0.177	2.971	3.59	0.368	2.456	2.41	0.702	3.347	2.27	0.901	3.744	2.22

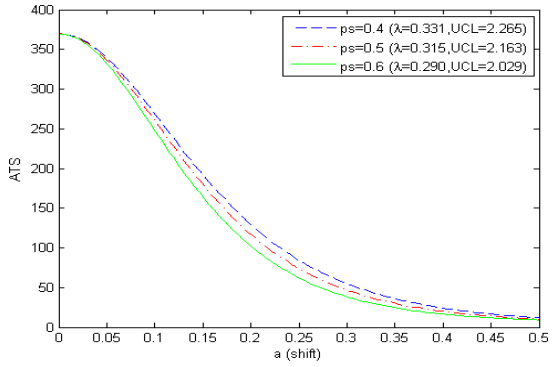
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

جدول ۲. مقادیر بهینه برای نمودار VSI EWMA t زمانی که $h_S = 0.2$، $p_S = \{0.4, 0.5, 0.6\}$، $n = 5$ و $ATS_0 = 370.4$ باشد.

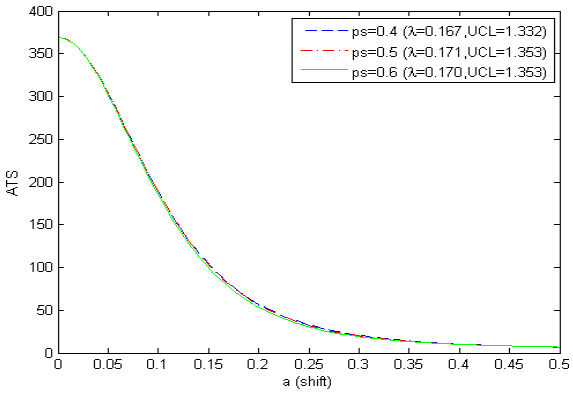
shift	$p_S = 0.4$, $w = 0.84$			$p_S = 0.5$, $w = 0.67$			$p_S = 0.6$, $w = 0.52$		
(a)	λ^*	UCL_{vt}^*	ATS^*	λ^*	UCL_{vt}^*	ATS^*	λ^*	UCL_{vt}^*	ATS^*
0.1	0.010	0.186	66.20	0.012	0.213	65.54	0.013	0.228	64.75
0.2	0.032	0.424	24.35	0.033	0.434	24.18	0.034	0.446	23.99
0.3	0.056	0.620	13.41	0.059	0.643	13.35	0.061	0.662	13.37
0.4	0.083	0.811	8.91	0.087	0.838	8.91	0.092	0.876	9.01
0.5	0.111	0.993	6.59	0.113	1.005	6.62	0.116	1.029	6.76
0.6	0.135	1.141	5.21	0.142	1.182	5.27	0.143	1.194	5.44
0.7	0.167	1.332	4.32	0.171	1.353	4.40	0.170	1.353	4.58
0.8	0.191	1.472	3.71	0.193	1.480	3.80	0.192	1.480	3.99
0.9	0.219	1.633	3.26	0.219	1.628	3.36	0.209	1.577	3.59
1.0	0.239	1.747	2.92	0.235	1.718	3.03	0.226	1.673	3.28
1.1	0.268	1.911	2.66	0.260	1.858	2.78	0.244	1.774	3.06
1.2	0.287	2.018	2.45	0.276	1.947	2.59	0.258	1.852	2.89
1.3	0.303	2.108	2.28	0.287	2.008	2.44	0.269	1.913	2.77
1.4	0.321	2.209	2.15	0.302	2.091	2.33	0.280	1.974	2.67
1.5	0.331	2.265	2.05	0.315	2.163	2.24	0.290	2.029	2.60
1.6	0.341	2.321	1.96	0.323	2.207	2.17	0.290	2.029	2.54
1.7	0.351	2.377	1.89	0.331	2.251	2.12	0.310	2.139	2.50
1.8	0.361	2.433	1.84	0.342	2.312	2.08	0.333	2.265	2.46
1.9	0.371	2.489	1.80	0.363	2.427	2.04	0.346	2.336	2.43
2.0	0.378	2.528	1.76	0.367	2.449	2.01	0.368	2.456	2.41



شکل ۱.آ- مقایسه منحنی‌های ATS برای p_s={0.4, 0.5, 0.6} و جفت های (λ^* , UCL_{vt}^*) مربوط به تغییر کوچک (a = 0.2).



شکل ۱. ج- مقایسه منحنی های ATS برای p_s = {0.4,0.5,0.6} و جفت های (λ^* , UCL_{vt}^*) مربوط به تغییر بزرگ (a = 1.5).



شکل ۱. ب- مقایسه منحنی های ATS برای p_s = {0.4,0.5,0.6} و جفت های (λ^* , UCL_{vt}^*) مربوط به تغییر متوسط (a = 0.7).

۳. ارزیابی عملکرد نمودار پیشنهادی :

در این قسمت عملکرد نمودار پیشنهادی (VSI EWMA t) با نمودارهای FSI EWMA t و FSI EWMA X-bar مقایسه خواهد شد. نمودار FSI EWMA t حالت خاصی از نمودار VSI EWMA t است که:

$$h_S = h_L = h_F = 1 \text{ time unit} . \qquad (۱۲)$$

آماره کنترلی (Z_i) برای نمودار FSI EWMA X-bar به صورت زیر تعریف می شود:

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

$Z_0 = 0$;

$$Z_i = \lambda \bar{X}_i + (1-\lambda) Z_{i-1} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (۱۳)$$

که $\bar{X}_i$ میانگین زیرگروه در زمان i است. حدود کنترل برای این نمودار عبارتند از :

$$LCL_{X\text{-}bar} = \mu_0 - L\,\sigma_0 .$$
$$UCL_{X\text{-}bar} = \mu_0 + L\,\sigma_0 . \qquad (۱۴)$$

که باید برای مقایسه عملکرد آن با نمودارهای دیگر، مقدار بهینه $L = k\sqrt{\lambda/(n(2-\lambda))}$ را با ضریب k پیدا کرد. از آنجایی که فرض می کنیم $\mu_0 = 0$ و $\sigma_0 = 1$ ، در ادامه از L که شامل k ، λ و n است به جای $UCL_{X\text{-bar}}$ استفاده می کنیم.

مقادیر بهینه برای این نمودار در جدول ۳ آمده اند. جدول ۴ هم شامل مقادیر بهینه برای نمودار FSI EWMA t می باشد.

برای ارزیابی پایداری نمودار پیشنهادی (VSI EWMA t) و مقایسه آن با نمودارهای FSI EWMA t و FSI EWMA X-bar، منحنی ATS برای مقادیر منتخب حدود کنترل بهینه زمانی که $n = 5$ ، $a = [0 , 0.5]$ ، $b \in \{0.9 , 0.95 , 1 , 1.05 , 1.1\}$ و $ATS_0 = 370.4$ در شکل های ۲، ۳ و ۴ رسم شده است.

جدول ۳. مقادیر بهینه برای نمودار FSI EWMA X-bar زمانی که $ATS_0 = 370.4$ باشد.

shift	*n = 3*			*n = 5*			*n = 7*			*n = 9*		
(a)	λ^*	L^*	ATS^*	λ^*	L^*	ATS^*	λ^*	L^*	ATS^*	λ^*	L^*	ATS^*
0.1	0.013	0.090	102.01	0.016	0.081	75.23	0.022	0.086	61.28	0.026	0.085	52.01
0.2	0.026	0.148	43.46	0.041	0.156	30.75	0.059	0.167	24.26	0.064	0.155	20.22
0.3	0.056	0.247	24.94	0.081	0.242	17.25	0.097	0.229	13.46	0.128	0.240	11.16
0.4	0.084	0.320	16.48	0.122	0.313	11.28	0.152	0.303	8.75	0.188	0.305	7.24
0.5	0.119	0.398	11.85	0.164	0.376	8.06	0.216	0.377	6.24	0.223	0.340	5.19
0.6	0.145	0.450	9.01	0.215	0.445	6.12	0.278	0.442	4.74	0.259	0.376	4.01
0.7	0.187	0.527	7.14	0.269	0.512	4.84	0.319	0.483	3.76	0.299	0.416	3.25
0.8	0.220	0.583	5.83	0.322	0.574	3.95	0.365	0.529	3.11	0.346	0.463	2.73
0.9	0.274	0.669	4.87	0.382	0.641	3.31	0.422	0.586	2.63	0.408	0.525	2.34
1.0	0.307	0.719	4.15	0.455	0.720	2.82	0.495	0.659	2.27	0.489	0.606	2.04
1.1	0.359	0.795	3.60	0.534	0.804	2.44	0.581	0.745	1.97	0.586	0.703	1.78
1.2	0.409	0.866	3.16	0.599	0.873	2.13	0.677	0.841	1.72	0.688	0.805	1.56
1.3	0.466	0.945	2.79	0.668	0.947	1.87	0.776	0.940	1.52	0.792	0.909	1.38
1.4	0.517	1.015	2.49	0.731	1.016	1.66	0.876	1.040	1.35	0.895	1.012	1.24
1.5	0.574	1.093	2.24	0.788	1.080	1.49	0.976	1.140	1.23	0.996	1.113	1.14
1.6	0.630	1.170	2.02	0.833	1.132	1.36	0.999	1.163	1.14	0.999	1.116	1.08
1.7	0.676	1.234	1.83	0.870	1.176	1.25	0.999	1.163	1.09	0.999	1.116	1.04
1.8	0.729	1.309	1.67	0.898	1.210	1.17	0.999	1.163	1.05	0.999	1.116	1.02
1.9	0.763	1.358	1.54	0.931	1.251	1.12	0.999	1.163	1.03	0.999	1.116	1.01
2.0	0.799	1.411	1.42	0.946	1.270	1.08	0.999	1.163	1.01	0.999	1.116	1.00

جدول ۴. مقادیر بهینه برای نمودار FSI EWMA t زمانی که $ATS_0 = 370.4$ باشد.

shift	*n = 3*			*n = 5*			*n = 7*			*n = 9*		
(a)	λ^*	UCL_t^*	ATS^*	λ^*	UCL_t^*	ATS^*	λ^*	UCL_t^*	ATS^*	λ^*	UCL_t^*	ATS^*
0.1	0.010	0.330	166.58	0.011	0.193	88.19	0.014	0.202	67.32	0.020	0.247	55.96
0.2	0.010	0.330	77.63	0.028	0.382	37.62	0.042	0.438	27.42	0.053	0.481	22.18
0.3	0.013	0.404	48.07	0.042	0.507	22.02	0.071	0.623	15.71	0.088	0.672	12.56
0.4	0.017	0.497	34.00	0.057	0.627	14.99	0.094	0.752	10.53	0.124	0.842	8.36
0.5	0.022	0.606	25.93	0.072	0.738	11.14	0.118	0.877	7.75	0.160	0.998	6.12
0.6	0.026	0.690	20.82	0.089	0.857	8.76	0.146	1.015	6.05	0.200	1.162	4.76
0.7	0.028	0.731	17.31	0.107	0.978	7.17	0.175	1.152	4.93	0.239	1.315	3.87
0.8	0.032	0.812	14.78	0.124	1.089	6.06	0.200	1.267	4.14	0.276	1.457	3.25
0.9	0.035	0.872	12.89	0.136	1.166	5.23	0.227	1.389	3.57	0.317	1.612	2.79
1.0	0.040	0.970	11.42	0.147	1.236	4.59	0.251	1.496	3.13	0.363	1.784	2.45
1.1	0.042	1.009	10.25	0.161	1.324	4.10	0.277	1.611	2.79	0.403	1.933	2.18
1.2	0.044	1.048	9.30	0.173	1.399	3.70	0.315	1.778	2.52	0.458	2.138	1.96
1.3	0.048	1.125	8.52	0.187	1.486	3.38	0.344	1.905	2.29	0.521	2.374	1.78
1.4	0.048	1.125	7.86	0.203	1.585	3.11	0.373	2.032	2.11	0.574	2.574	1.63
1.5	0.054	1.240	7.30	0.222	1.702	2.88	0.410	2.194	1.96	0.638	2.818	1.49
1.6	0.054	1.240	6.82	0.229	1.745	2.69	0.451	2.374	1.82	0.696	3.042	1.39
1.7	0.058	1.317	6.41	0.250	1.874	2.52	0.490	2.546	1.71	0.752	3.261	1.29
1.8	0.060	1.355	6.04	0.257	1.917	2.38	0.541	2.772	1.60	0.787	3.400	1.21
1.9	0.063	1.412	5.72	0.272	2.009	2.25	0.580	2.946	1.51	0.843	3.624	1.16
2.0	0.065	1.450	5.43	0.294	2.144	2.14	0.623	3.139	1.43	0.875	3.754	1.11

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

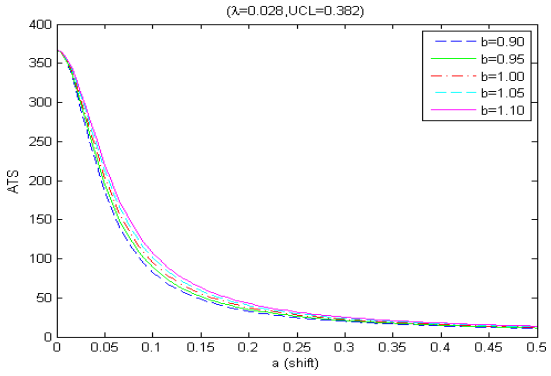
این جفت های منتخب عبارتند از (برای نمودار VSI EWMA t مقدار $h_S = 0.2$ و $p_S = 0.6$ فرض شده اند.) :

- برای یافتن تغییر کوچک (a = 0.2) : ($\lambda^* = 0.041$, $L^* = 0.156$) برای نمودار FSI EWMA X-bar، ($\lambda^* = 0.028$, $UCL_t^* = 0.382$) برای نمودار FSI EWMA t، ($\lambda^* = 0.034$, $UCL_{vt}^* = 0.446$) برای نمودار VSI EWMA t.

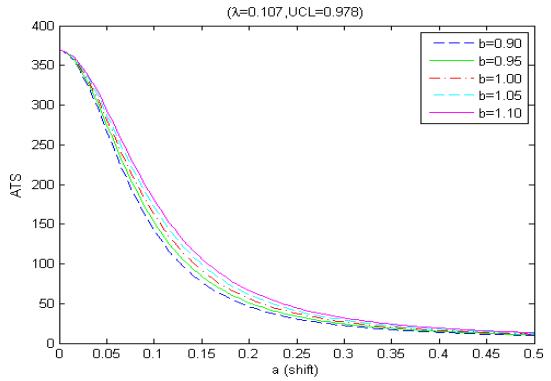
- برای یافتن تغییر متوسط (a = 0.7): ($\lambda^* = 0.269$, $L^* = 0.512$) برای نمودار FSI EWMA X-bar، ($\lambda^* = 0.107$, $UCL_t^* = 0.978$) برای نمودار FSI EWMA t، ($\lambda^* = 0.170$, $UCL_{vt}^* = 1.353$) برای نمودار VSI EWMA t.

- برای یافتن تغییر بزرگ (a = 1.5) : ($\lambda^* = 0.788$, $L^* = 1.08$) برای نمودار FSI EWMA X-bar، ($\lambda^* = 0.222$, $UCL_t^* = 1.702$) برای نمودار FSI EWMA t، ($\lambda^* = 0.290$, $UCL_{vt}^* = 2.029$) برای نمودار VSI EWMA t

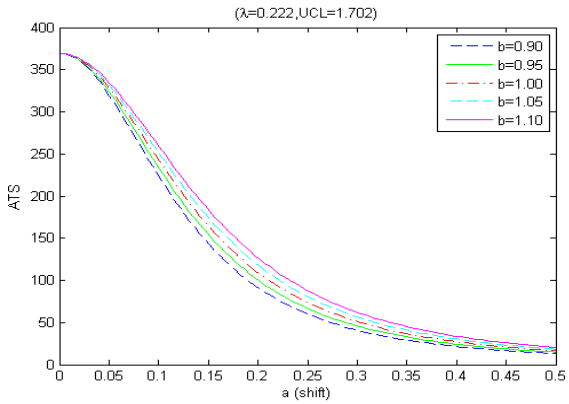
همان طور که مشاهده می شود برای مقادیر مختلف b ، پایداری نمودارهای FSI EWMA t و VSI EWMA t تفاوت چندانی ندارند و در مقایسه با پایداری نمودار FSI EWMA X-bar ، این نمودارها پایداری خیلی خوبی دارند. همچنین هر چه مقدار λ بیشتر شود، این اختلاف بیشتر قابل تشخیص است. بنابراین، نمودار پیشنهادی (VSI EWMA t) در برابر اشتباهات تخمین انحراف معیار فرآیند یا تغییرات آن (که موجب زنگ خطرهای اشتباهی بیش از حد معمول یا از بین رفتن حساسیت نمودار نسبت به تغییرات در میانگین فرآیند می شود)، پایداری خوبی دارد. در ادامه، منحنی های ATS مربوط به نمودارهای FSI EWMA t ، FSI EWMA X-bar و VSI EWMA t زمانی که فرض سوم برقرار باشد (b = 1)، با هم مقایسه می شوند. در شکل ۵ این منحنی‌های ATS برای جفت های استفاده شده در شکل های ۲ تا ۴، رسم گردیده‌اند. همان طور که مشاهده می شود، منحنی های ATS مربوط به نمودار پیشنهادی (VSI EWMA t) در شکل های ۵ - آ و ۵ - ج (مربوط به تغییر کوچک a = 0.2 و تغییر بزرگ a = 1.5) زیر منحنی های ATS مربوط به نمودار FSI EWMA X-bar و نمودار FSI EWMA t می افتد. در شکل ۵ - ب (مربوط به تغییر متوسط a = 0.7) هم در بازه [0.2 , 0.5] این مسئله صادق است. نمودار پیشنهادی توسط Zhang و همکارانش (FSI EWMA t) برای تغییرات کوچک و متوسط (a = 0.2 , a = 0.7) عملکرد بدتری نسبت به نمودار FSI EWMA X-bar دارد و فقط برای تغییر بزرگ در میانگین (a = 1.5) عملکرد بهتری نسبت به FSI EWMA X-bar دارد و همین امر موجب انجام تحقیق حاضر برای بهبود عملکرد نمودار FSI EWMA t شد. بنابراین، نمودار VSI EWMA t علاوه بر پایداری خوبی که در برابر تغییرات در انحراف معیار فرآیند یا اشتباه در تخمین آن دارد، عملکرد نسبتاً بهتری نسبت به نمودارهای FSI EWMA t و FSI EWMA X-bar دارد.



شکل۲. آ- بررسی پایداری نمودار FSI EWMA t توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , UCL_t^*) مربوط به تغییر کوچک (a = 0.2).

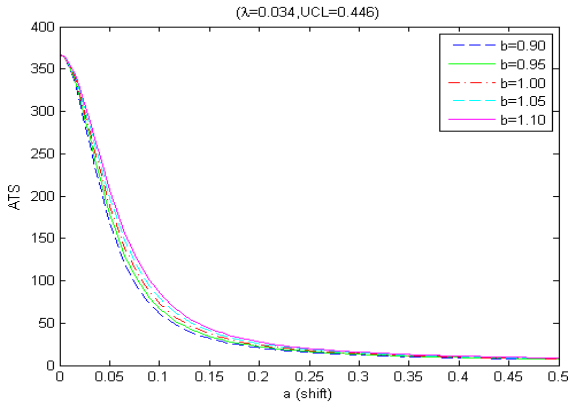


شکل۲. ب- بررسی پایداری نمودار FSI EWMA t توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , UCL_t^*) مربوط به تغییر متوسط (a = 0.7).

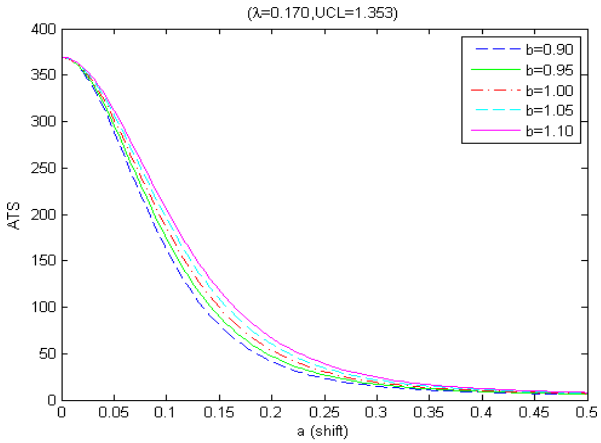


شکل۲. ج- بررسی پایداری نمودار FSI EWMA t توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , UCL_t^*) مربوط به تغییر بزرگ (a = 1.5).

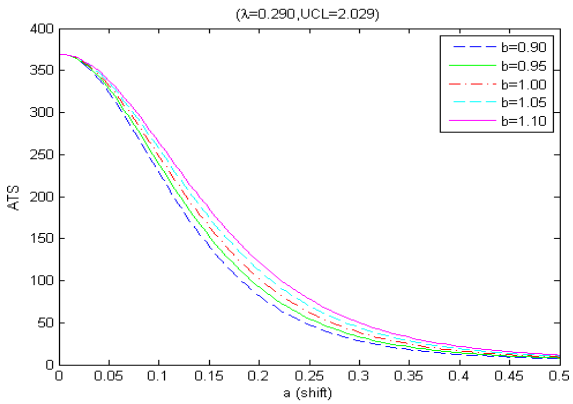
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]



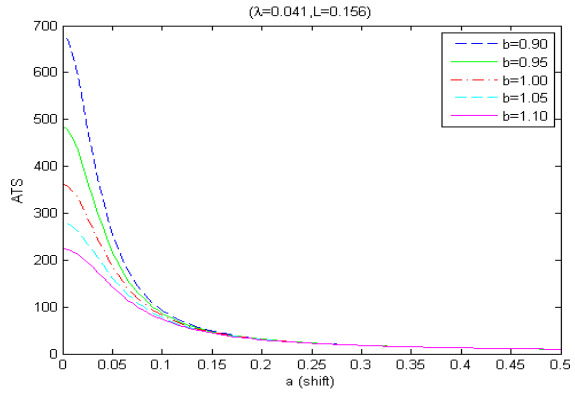
شکل۳. آ- بررسی پایداری نمودار VSI EWMA t توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , UCL_{vt}^*) مربوط به تغییر کوچک (a = 0.2).



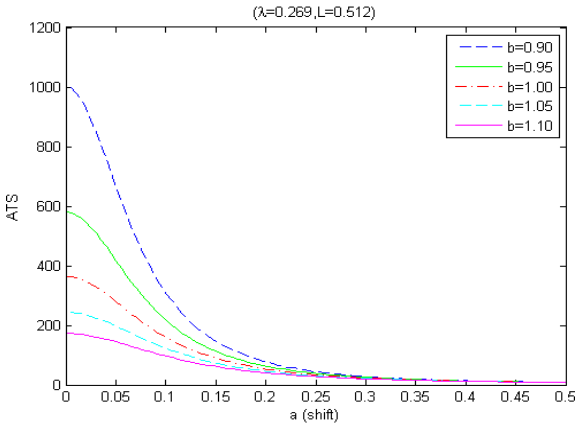
شکل۳. ب- بررسی پایداری نمودار VSI EWMA t توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , UCL_{vt}^*) مربوط به تغییر متوسط (a = 0.7).



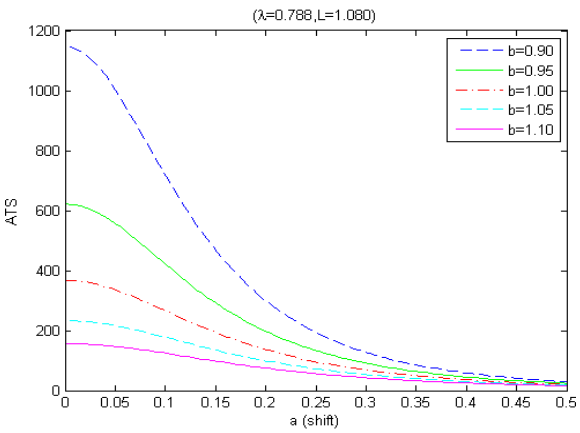
شکل۳. ج- بررسی پایداری نمودار VSI EWMA t توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , UCL_{vt}^*) مربوط به تغییر بزرگ (a = 1.5).



شکل۴. آ- بررسی پایداری نمودار FSI EWMA X-bar توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , L^*) مربوط به تغییر کوچک (a = 0.2).

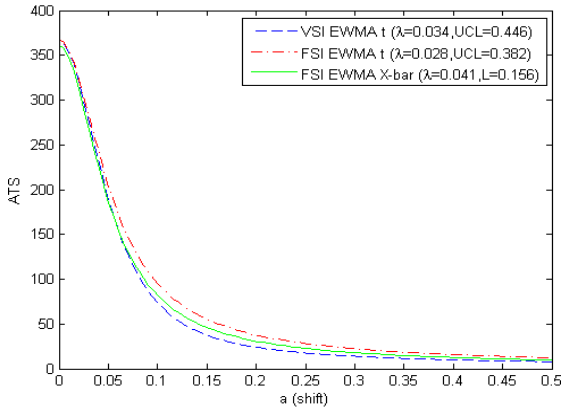


شکل۴. ب- بررسی پایداری نمودار FSI EWMA X-bar توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , L^*) مربوط به تغییر متوسط (a = 0.7).

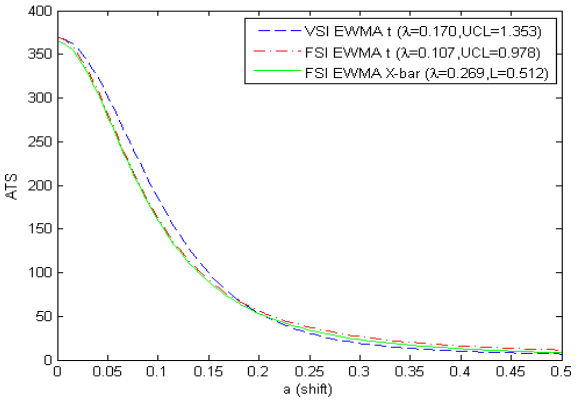


شکل۴. ج- بررسی پایداری نمودار FSI EWMA X-bar توسط منحنی های ATS برای جفت های (λ^* , L^*) مربوط به تغییر بزرگ (a = 1.5).

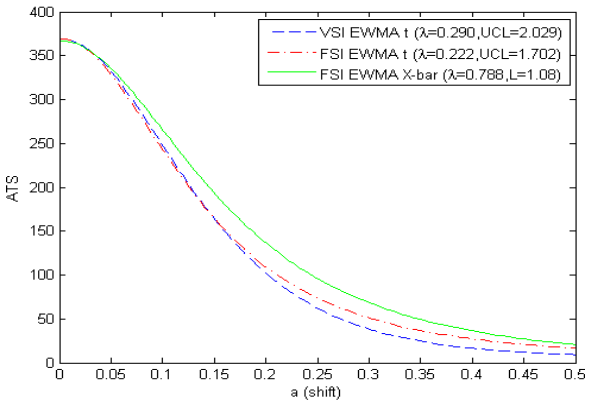
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]



شکل۵. آ- مقایسه منحنی های ATS برای مقادیر بهینه مربوط به تغییر کوچک (a = 0.2).



شکل۵. ب- مقایسه منحنی های ATS برای مقادیر بهینه مربوط به تغییر متوسط (a = 0.7).



شکل۵. ج- مقایسه منحنی های ATS برای مقادیر بهینه مربوط به تغییر بزرگ (a = 1.5).

برای ارزیابی مقادیر ATS^* محاسبه شده توسط الگوریتم (اعداد جدول‌های ۱ تا ۴)، از تکنیک شبیه‌سازی استفاده می کنیم. برای این منظور، برای اندازه زیر گروه‌های مختلف (n = 3, 5, 7, 9) و با تغییر معین a، ۱۰.۰۰۰ داده تولید کرده و پس از محاسبه آماره کنترلی برای نمودار مورد نظر، با استفاده از حدود کنترل بهینه مربوط، بازه نمونه گیری مورد استفاده برای نمونه گیری بعدی را تعیین می کنیم. شبیه سازی را برای ۱۰۰.۰۰۰ تکرار انجام داده ایم. میانگین زمان لازم تا هشدار نمودار برای حالت خارج از کنترل را برای این تکرارها محاسبه می کنیم. برای نمونه، تعدادی از این مقادیر در جدول ۵ آمده اند. اختلاف کمی که بین مقادیر بهینه ATS^* با مقادیر حاصل از شبیه سازی وجود دارد، می تواند ناشی از خطای شبیه سازی و گرد کردن (به ویژه در تخمین حالات تحت کنترل توسط زنجیره مارکوف) باشد.

جدول۵. مقایسه مقادیر ATS^* حاصل از اجرای الگوریتم و شبیه سازی زمانی که $h_S = 0.2$ و $p_S = 0.6$ باشد.

	a (shift)	0.2	0.7	1.5
n = 3	ATS^* *(algorithm)*	53.1429	10.0739	4.5623
	ATS (simulation)	53.2383	10.0766	4.5785
n = 5	ATS^* *(algorithm)*	23.9934	4.5812	2.5968
	ATS (simulation)	23.7747	4.5752	2.6032
n = 7	ATS^* *(algorithm)*	17.0240	3.4739	2.3820
	ATS (simulation)	16.9799	3.4873	2.3822
n = 9	ATS^* *(algorithm)*	13.5759	3.0198	2.2916
	ATS (simulation)	13.6728	3.0214	2.2922

۴. نتیجه گیری

در مقاله حاضر به بررسی و طراحی نمودار VSI EWMA t برای کنترل تغییرات در میانگین فرآیند پرداختیم. برای این منظور، چگونگی تعیین بازه های نمونه گیری و حدود کنترل بهینه بیان شد و تأثیر برخی پارامترها در عملکرد نمودار بررسی گردید. همچنین پایداری نمودار (زمانی که انحراف معیار فرآیند تغییر کند یا اشتباه در تخمین آن وجود داشته باشد)، با نمودارهای مشابه مقایسه گردید و نشان دادیم که نمودار VSI EWMA t دارای پایداری بهتری (در برابر تغییر در انحراف معیار فرآیند) نسبت به FSI EWMA X-bar می‌باشد.

مقادیر بهینه ATS^* و حدود کنترل بهینه را برای نمودارها محاسبه و با هم مقایسه کردیم. همچنین نشان دادیم که نمودار VSI EWMA t (با توجه به مقادیر ATS) عملکرد بهتری نسبت به نمودارهای مشابه دارد.

نتایج حاصل از اجرای الگوریتم برای محاسبه حدود کنترل بهینه، با استفاده از تکنیک شبیه سازی بررسی و تأیید شدند. اختلاف اندک بین نتایج حاصل از شبیه سازی و داده های جدول ها، می تواند ناشی از خطای شبیه سازی و گرد کردن باشد.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

معمولاً در عمل (کاربرد)، نمودارهای X-bar یا EWMA X-bar همراه با یک نمودار پراکندگی (مانند نمودار S) استفاده می شوند. با توجه به پایداری نمودار VSI EWMA t، این نمودار نسبت به نمودار FSI EWMA X-bar وابستگی کمتری به نمودارهای پراکندگی دارد و این یکی دیگر از مزیت های آن است.

برای بهبود عملکرد نمودار VSI می توان کارهای زیر را انجام داد :

- تا حد ممکن بازه نمونه گیری کوتاه را کوچک و بازه نمونه گیری بلند را بزرگ در نظر گرفت.
- با نظر مدیران و بررسی هزینه ها، تا حد ممکن p_s را بزرگ و در نتیجه w را کوچک در نظر گرفت.
- برای جلوگیری از تغییر زیاد بین بازه های نمونه گیری کوتاه و بلند می توان از قوانین دنباله ها[1] استفاده کرد.
- با افزودن ویژگی اندازه نمونه متغیر[2] ممکن است عملکرد نمودار بهتر شود.

مراجع

[1] Zhang, L., Chen, G., Castagliola, P., *"On t and EWMA t Charts for Monitoring Changes in the Process Mean*", Quality and Reliability Engineering International, Vol. 25, No. 8, 2009, pp. 933–945.

[2] Montgomery, D.C., Mastrangelo, C.M., *"Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data"*, Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 3, 1991, pp. 179–193.

[3] Maragah, H.D., Woodall, W.H., "*The Effect of Autocorrelation on Retrospective X-Bar Chart*", Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 40, 1992, pp. 29–42.

[4] Liu, R.Y., Tang, J., *"Control Charts for Dependent and Independent Measurements Based on Bootstrap Methods",* Journal of the American Statistical Association, Vol. 91, 1996, pp. 1694–1700.

[5] Zhang, N.F., "*A Statistical Control Chart for Stationary Process Data"*, Technometrics, Vol. 40, No. 1, 1998, pp. 24–38.

[6] Amin, R.W., Lee, S.J., "*The Effects of Autocorrelation and Outliers on Two-Sided Tolerance Limits*", Journal of Quality Technology, Vol. 31, No. 3, 1999, pp. 286–300.

[7] Ben-Gal, I., Morag, G., Shmilovici, A., "*Context-Based Statistical Process Control: A Monitoring Procedure for Statedependent Processes*", Technometrics, Vol. 45, No. 4, 2003, pp. 293–311.

[8] Castagliola, P., Tsung, F., "*Autocorrelated Statistical Process Control for Non-Normal Situations*", Quality and Reliability Engineering International, Vol. 21, No. 2, 2005, pp. 131–161.

[9] Choobineh, F., Ballard, J.L., "*Control-limits of QC Charts for Skewed Distribution using Weighted-Variance*", IEEE Transactions on Reliability, Vol. 36, No. 4, 1987, pp. 473–477.

[10] Bai, D.S., Choi, I.S., *"X-Bar and R Control Charts for Skewed Population"*, Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 2, 1995, pp. 120–131.

[11] Castagliola P., "X-bar control chart for skewed populations using a scaled weighted variance method", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 7, No. 3, 2000, pp. 237–252.

[12] Chang, Y.S., Bai, D.S., "*Control Charts for Positively-Skewed Populations with Weighted Standard Deviation"*, Quality and Reliability Engineering International, Vol. 17, 2001, pp. 397–406.

[13] Chan, L.K., Cui, H.J., *"Skewness Correction X-Bar and R Charts for Skewed Distributions*", Naval Research Logistics, Vol. 50, No. 6, 2003, pp. 555–573.

[14] Shore, H., "*Non-Normal Populations in Quality Applications: A Revisited Perspective*", Quality and Reliability Engineering International, Vol. 20, No. 4, 2004, pp. 375–382.

[15] Khoo, M.B.C., Wu, Z., Atta, A.M.A., "*A Synthetic Control Chart for Monitoring the Process Mean of Skewed Populations Based on the Weighted Variance Method*", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 15, No. 3, 2008, pp. 217–245.

[16] Roberts, S.W., "*Control Charts Tests Based on Geometric Moving Averages*", Technometrics, Vol. 1, 1959, pp. 239–250.

[17] Chao, M.T., Cheng, S.W., *"Semicircle Control Chart for Variables Data"*, Quality Engineering, Vol. 8, No. 3, 1996, pp. 441–446.

[18] Chen, G., Cheng, S.W., "*Max Chart: Combining X-bar Chart and S Chart*", Statistica Sinica, Vol. 8, 1998, pp. 263–271.

[19] Saccucci, M.S., Amin, R.W., Lucas, J.M., *"Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes with Variable Sampling Intervals*", Communications in Statistics- Simulation and Computation, 1992, Vol. 21, pp. 627–657.

[20] Tagaras, G., "*A Survey of Recent Developments in the Design of Adaptive Control Charts*", Journal of Quality Technology, 1998, Vol. 30, pp. 212–231.

[1] - *Runs Rules*
[2] - *Variable Sample Size (VSS)*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

[21] Lucas, J.M., Saccucci, M.S., "*Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements"*, Technometrics, Vol. 32, No. 1, 1990, pp. 1–12.

[22] Castagliola, P., Celano, G., Fichera, S., Giuffrida, F., *"A Variable Sampling Interval S2-EWMA Control Chart for Monitoring the Process Variance*", International Journal of Technology Management, 2006, Vol. 37, No.1/2, pp. 125–146.

[23] Reynolds, M.R., Jr., Amin, R.W., Arnold, J.C., "*CUSUM Charts with Variable Sampling Intervals*", Technometrics, Vol. 32, No. 4, 1990, pp. 371–384.

[24] Castagliola, P., Celano, G., Fichera, S., "*Monitoring Process Variability using EWMA*", in Pham H. (Editor), Springer Handbook of Engineering Statistics, Springer, New York, pp. 291–325.

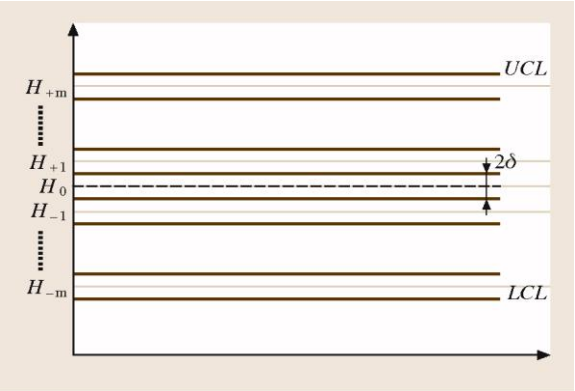
[25] Brook, D., Evans, D., "*An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length*", Biometrika, 1972, Vol. 59, No. 3, pp. 539–549.

[26] Wu, Z., Zhang, S., Wang, P., "*A CUSUM Scheme with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals for Monitoring the Process Mean and Variance*", Quality and Reliability Engineering International, 2007, Vol. 23, pp. 157–170.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

پیوست

برای محاسبه مقادیر ATS* و حدود کنترل بهینه برای نمودارهای کنترل از رویکرد زنجیره مارکوف ارائه شده توسط Brook و Evans که انعطاف پذیرتر و ساده‌تر از روش‌های دیگر (مانند معادلات انتگرال) است استفاده می‌کنیم. در این روش، بازه بین حدود کنترل بالایی و پایینی (LCL , UCL) به p = 2m+1 زیربازه با پهنای 2δ تقسیم می‌شود (شکل پ. ۱) که p تعداد حالات گذرا[1] و $\delta = (UCL - LCL)/(2p)$ است. هرچه p بزرگتر باشد، مقادیر ATS و حدود کنترل برای نمودارهای کنترل دقیق‌تر تخمین زده می‌شود (در اینجا p = 101 در نظر گرفته‌ایم).



شکل پ. ۱- بازه بین حدود کنترل بالایی و پایینی (LCL , UCL) به p = 2m+1 زیربازه با پهنای 2δ تقسیم شده است.

آماره کنترلی (Y_k) در زمان k در حالت گذرای j قرار دارد اگر:

$$H_j - \delta < Y_k < H_j + \delta \;;\; j = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m. \qquad (پ.۱)$$

که H_j نقطه میانی زیربازه j ام می باشد. آماره کنترلی در حالت جاذب[2] قرار دارد اگر Y_k خارج از حدود کنترل بیفتد. اگر آماره کنترلی در حالت گذرا باشد، فرآیند تحت کنترل و اگر در حالت جاذب باشد، فرآیند خارج از کنترل فرض می‌شود.

مقدار ATS از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$ATS = \boldsymbol{q}^T \times \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{G}. \qquad (پ.۲)$$

که $\boldsymbol{q}$ بردار احتمال اولیه، $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ ماتریس پایه، $\boldsymbol{Q}$ ماتریس احتمالات گذر و $\boldsymbol{G}$ بردار بازه‌های نمونه گیری (کوتاه و بلند)، مرتبط با حالات گسسته زنجیره مارکوف می باشند. بردار احتمال اولیه ($\boldsymbol{q}$) شامل احتمالاتی است که آماره کنترلی در یک حالت معین قرار دارد. برای حالت صفر[3]، این بردار شامل یک عنصر ۱ و 2m عنصر صفر می‌باشد. عنصر j ام این بردار ($\boldsymbol{q}_j$) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

- برای نمودار FSI EWMA X-bar :

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{if } H_j - \delta < Z_0 < H_j + \delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (پ.۳)$$

- برای نمودارهای FSI EWMA t و VSI EWMA t :

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{if } H_j - \delta < Y_0 < H_j + \delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (پ.۴)$$

ماتریس احتمالات گذر ($\boldsymbol{Q}$) شامل احتمالات گذر یک مرحله ای از یک حالت گذرا به حالت گذرای دیگر است. عناصر این ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

- برای نمودار FSI EWMA X-bar :

$$Q_{i,j} = F_N\left(\left(\frac{H_j + \delta - (1-\lambda)H_i}{\lambda} - a\right)\frac{\sqrt{n}}{b}\right) - F_N\left(\left(\frac{H_j - \delta - (1-\lambda)H_i}{\lambda} - a\right)\frac{\sqrt{n}}{b}\right) \qquad (پ.۵)$$

که F_N تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد می باشد.

- برای نمودارهای FSI EWMA t و VSI EWMA t :

$$Q_{i,j} = F_t\left(\frac{H_j + \delta - (1-\lambda)H_i}{\lambda}\middle| n-1, \frac{a\sqrt{n}}{b}\right) - F_t\left(\frac{H_j - \delta - (1-\lambda)H_i}{\lambda}\middle| n-1, \frac{a\sqrt{n}}{b}\right) \qquad (پ.۶)$$

که $F_t(\dots | u , v)$ تابع توزیع تجمعی برای توزیع t-student غیر مرکزی[4] با u درجه آزادی و پارامتر غیرمرکزیت (شیفت از میانگین) v می‌باشد.

عنصر j ام بردار بازه های نمونه گیری ($\boldsymbol{G}_j$)، یعنی بازه نمونه گیری مورد استفاده زمانی که آماره کنترلی در حالت j قرار دارد، به صورت زیر محاسبه می شود :

- اگر $g \le j \le g - g$ (یا به عبارتی $LWL \le H_j \le UWL$) قرار گیرد، از بازه نمونه‌گیری بلند (h_L) و در غیر این صورت از بازه نمونه گیری کوتاه (h_S) استفاده می کنیم.

مقدار g را هم طبق نظر *Wu* و همکارانش، نزدیکترین مقدار صحیح به $UWL/2\delta$ در نظر گرفته ایم [۲۶].

[1] - *Transient States*
[2] - *Absorbing State*
[3] - *Zero State*
[4] - *Non-central*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-05]