International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2012)

March 2012, Volume 22, Number 4
pp. 319-330

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

Estimating Time of a Simple Step Change in Non-conforming Items in High-Yield Processes

Rassoul Noorossana*, Kamran Peynabar & Mona Moradimanesh

Rassoul Noorossana, *Industrial Engineering Department, Iran University of Science and Technology,*
Kamran Peynabar, *Ph.D. Student of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109-2117,*
Mona Moradimanesh, *Industrial Engineering Department, Islamic Azad University—South Tehran Branch, Tehran, Iran*

Keywords

Statistical Process Control (SPC),
Change Point,
Simple Step Change,
Built-in Estimator,
Cumulative Sum control chart (CUSUM),
Exponential Weighted Moving Average control chart (EWMA),
Average Run Length (ARL),
Confidence Set

ABSTRACT

Knowing about the real time of a change in the parameter(s) of a statistical process would enable users to identify root causes more quickly and precisely. Due to the sensitivity and importance of reaching zero defects in high quality processes, to be aware of the change time would be so precious. In this paper, we consider the performance of the Maximum Likelihood Estimator in comparison with built-in change point estimators of Cumulative Sum (CUSUM) and Exponential Weighted Moving Average (EWMA) control charts. Using likelihood function approach, we also proposed a confidence set for the change point. The results of a Monte-Carlo simulation have shown the priority of the MLE in identifying the real time of the change.

© 2012 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 22, No. 4, All Rights Reserved

*
Corresponding author. Rassoul Noorossana
Email: *rassoul@iust.ac.ir*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــریت تولیـــد

شمـــاره ۴، جلـــد ۲۲، زمستـــان ۱۳۹۰
صفحـــه ۳۲۰-۳۳۰

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

برآورد زمان تغییر پله ای ساده در نسبت اقلام معیوب در فرآیندهای باکیفیت بالا

رسول نورالسناء*، کامران پی‌نبر و مونا مرادی منش

کلمات کلیدی

کنترل کیفیت آماری،
نقطه تغییر، تغییر پله ای ساده،
برآورد کننده های ذاتی،
نمودار کنترل تجمعی هندسی، نمودار کنترل میانگین موزون متحرک وزنی،
میانگین طول دنباله، مجموعه اطمینان

چکیده:

اطلاع داشتن از زمان واقعی تغییر در پارامترهای یک فرآیند تولید، به کاربران این امکان را می دهد تا علل ریشه ای تغییر را در زمان کوتاهتر و با دقت بیشتر شناسایی کنند. در فرآیندهای باکیفیت بالا، بدلیل حساسیت و اهمیت زیاد رسیدن به نقص صفر، برآورد این زمان دستاوردهای ارزشمندی را به همراه خواهد داشت. در این مقاله، مقایسه‌ای میان عملکرد برآوردکننده درستنمایی بیشینه و برآوردکننده های ذاتی نمودارهای کنترل تجمعی هندسی (CUSUM) و میانگین موزون درستنمایی (EWMA) صورت گرفته است. همچنین، بااستفاده از رویکرد تابع احتمالی، یک مجموعه اطمینان برای نقطه تغییر پیشنهاد شده است. نتایج حاصل از شبیه سازی مونت کارلو برتری عملکرد برآوردکننده پله ای ساده را نسبت به برآوردکننده‌های ذاتی نشان می‌دهد.

۱. مقدمه

نمودارهای کنترل یکی از مهمترین ابزارها جهت کنترل و پایش فرایندها می‌باشند. یکی از مسایلی که کاربران در بکارگیری هر نمودار کنترل با آن روبرو هستند، برآورد زمان تغییر فرایند پس از مشاهده یک هشدار از نمودار کنترل است. هنگامیکه یک نمودار کنترل، وجود انحراف با دلیل در فرایند را هشدار می‌دهد، مهندس فرایند جستجو را برای شناسایی منبع انحراف آغاز می‌نماید. بنابراین اطلاع داشتن در مورد اینکه فرایند در چه زمانی تغییر کرده، می‌تواند جستجو را تا حد بسیار زیادی ساده نماید. اگر بتوان زمان تغییر را تعیین نمود، مهندسین فرایند بر روی پنجره کوچکی حول زمان تعیین شده تمرکز کرده و در زمان بسیار کمتری ریشه انحراف بادلیل را مشخص و برای حذف آن اقدام می‌نمایند. در این مقاله عملکرد روش MLE در برآورد دوره تغییر که توسط نورالسناء و همکاران [۱،۲] ارایه گردید با برآورد کننده ذاتی[2] نمودارهای کنترل EWMA و CUSUM هندسی که برآوردی از زمان تغییر را ارائه می‌دهند، در حالتیکه تغییر سطح فرایند در یک نقطه مورد نظر می باشد، مورد مقایسه قرار می گیرد. مقایسه براساس صحت و دقت برآورد کننده ها صورت می گیرد.

همچنین با توجه به خصوصیات برآورد کننده MLE مجموعه اطمینان[3] تقریبی که دوره تغییر واقعی فرایند را پوشش می دهد، ارایه می گردد. لازم به ذکر است که مقایسات مشابهی در حالتیکه نوع تغییر از نوع پله ای ساده است، برای میانگین فرآیند نرمال، پارامتر نرخ فرآیند پواسون و نسبت اقلام معیوب به ترتیب توسط پیگناتیلو و ساموئل [۳]، پیگناتیلو و سیمپسون [۴] و همچنین پری و پیگناتیلو [۵] انجام شده است.

تاریخ وصول: ۸۹/۸/۸
تاریخ تصویب: ۹۰/۳/۲

***نویسنده مسئول مقاله:** **دکتر رسول نورالسناء**، دانشکده صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، rassoul@iust.ac.ir

کامران پی‌نبر، دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی صنایع و تحقیق در عملیات، دانشگاه میشیگان، امریکا

مونا مرادی منش، دانشکده صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، m.moradimanesh@gmail.com

[2] *Built-in*
[3] *Confidence Set*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

در بخش بعدی، با این فرض که در پارامتر نسبت اقلام معیوب یک فرآیند باکیفیت بالا تغییری از نوع پله ای ساده رخ داده است، مدل آماری مربوطه را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از این مدل به محاسبه برآوردکننده درستنمایی ماکزیمم پرداخته شده است.

۲. مدل آماری تغییر پله‌ای ساده و توسعه برآورد کننده MLE

یک فرایند با کیفیت بالا را که در حالت اولیه با نسبت اقلام معیوب (پارامتر) معلوم $p = p_0$ تحت کنترل می باشد را در نظر بگیرید. به منظور پایش این فرایند از نمودار کنترل هندسی (رابطه ۱) استفاده می‌شود که در آن هر مشاهده[1] به صورت تعداد واحدهای تولید شده تا تولید اولین واحد معیوب تعریف شده و مستقل از سایر مشاهدات می باشد. در یک زمان نامشخص پارامتر فرایند به سطح جدید و نامعلوم $p = p_1$ تغییر نموده و تا زمان هشدار نمودار کنترل هندسی در همان سطح p_1 باقی می‌ماند. به عبارت دیگر نسبت اقلام معیوب فقط در یک نقطه تغییر نموده و این سطح جدید تا زمان شناسایی انحراف با دلیل و رفع آن ثابت است.

$$UCL = 1 + \frac{Ln(\alpha/2)}{Ln(1-p_0)} \qquad (۱)$$
$$LCL = \frac{Ln(1-\alpha/2)}{Ln(1-p_0)}$$

که در آن α خطای نوع اول نمودار کنترل می باشد.

فرض کنید که زمان سپری شده بین تولید واحد معیوب (i-1)ام و iام (مدت زمان بین دو مشاهده (i-1) و i) به عنوان دوره i تعریف شود. فرایند تا دوره τ تحت کنترل بوده و سپس به سطح جدید تغییر می یابد. همچنین نمودار کنترل در دوره T (دوره فعلی)، اعلام هشدار می نماید. به عبارت دیگر مشاهدات $i = 1,2,\ldots,\tau$ از یک توزیع هندسی با پارامتر $p_i = p_0$ پیروی کرده و مشاهدات $i = \tau+1, \tau+2, \ldots, T$ از یک توزیع هندسی با پارامتر $p_i = p_1$ پیروی می کنند. دوره تغییر نامعلوم τ به عنوان آخرین دوره ای که در آن فرایند تحت کنترل بوده است در نظر گرفته می شود. لازم به ذکر است که این مدل تحت عنوان مدل تغییر سطح نامیده می شود. با استفاده از برآورد کننده درستنمایی بیشینه (MLE) برآورد پریود تغییر $(\hat{\tau})$ مدل تغییر سطح توسط نورالسناء و همکاران [۱،۲] به صورت زیر معرفی می شود.

$$L(\tau, p_1|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{\tau} p_0(1-p_0)^{x_i-1} \prod_{i=\tau+1}^{T} p_1(1-p_1)^{x_i-1} \qquad (۲)$$

که در آن X_i مقدار مشاهده در پریود iام و $L(.)$ تابع درستنمایی را نشان می‌دهد. برآورد کننده τ مقداری از τ است که تابع درستنمایی یا لگاریتم آن را بیشینه می سازد. با لگاریتم گیری از این تابع و عملیات جبری رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}\log_e L(\tau, p_1|\mathbf{x}) &= \tau \log_e p_0 + \\ &\left(\sum_{i=1}^{T} x_i - \sum_{i=\tau+1}^{T} x_i\right)\log_e(1-p_0) - \\ &\tau \log_e(1-p_0) + (T-\tau)\log_e p_1 + \\ &\left(\sum_{i=\tau+1}^{T} x_i - T + \tau\right)\log_e(1-p_1)\end{aligned} \qquad (۳)$$

با مشتق گیری نسبت به p_1، به سادگی می توان نشان داد که به ازای هر τ مقداری از p_1 که تابع درستنمایی را بیشینه می سازد به صورت زیر به دست می آید.

$$\hat{p}_1(\tau) = \frac{T-\tau}{\sum_{i=\tau+1}^{T} x_i} \qquad (۴)$$

با جایگذاری $\hat{p}_1(\tau)$ به جای p_1 در تابع درستنمایی و ساده سازی رابطه به صورت زیر خلاصه می شود.

$$\log_e L(\tau|\mathbf{x}) = \tau \log_e\left(\frac{p_0(1-\hat{p}_1(\tau))}{\hat{p}_1(\tau)(1-p_0)}\right) - \frac{T-\tau}{\hat{p}_1(\tau)}\log_e\left(\frac{1-p_0}{1-\hat{p}_1(\tau)}\right) + T\log_e\left(\frac{\hat{p}_1(\tau)}{1-\hat{p}_1(\tau)}\right) \qquad (۵)$$

بنابراین برآورد *MLE* دوره تغییر (آخرین دوره تحت کنترل) که مقدار تابع درستنمایی را بیشینه می سازد عبارتست از:

(۶)

نورالسناء و همکاران [۱،۲] این برآورد کننده را زمانیکه نمودار حدود احتمال هندسی اعلام هشدار می نماید، اعمال نمودند. در ادامه کاربرد این برآورد کننده در نمودارهای کنترل *EWMA* و *CUSUM* هندسی مورد بررسی قرار می گیرد.

۲-۱. نمودار کنترل CUSUM هندسی

زی و همکاران [۶] نمودار کنترل جمع تجمعی(CUSUM) را در دو حالت ماسک V [2] و جدولی [3] برای توزیع هندسی پیشنهاد نمودند. بروک و ایوانز [۷] نیز برای توزیع هندسی با مقدار حداقل نسبت اقلام معیوب تحت کنترل ۰/۰۰۲ نمودار کنترل CUSUM هندسی طراحی نمودند. ایشان بیان می کنند که روش پیشنهادی که بر اساس استفاده از زنجیره مارکوف می باشد

[1] *Observation*

[2] *V-mask*

[3] *Tabular*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

در فرایندهای با کیفیت بالا به علت تعداد بسیار زیاد حالتهای ماتریس انتقال و پیچیدگی محاسبات کاربرد ندارد. رینولدز و استومبوس [۸] نمودار کنترل CUSUM را برای توزیع برنولی توسعه داده و برای محاسبه مقادیر ARL این نمودار دو روش دقیق زنجیره مارکوف و دستگاه معادلات و یک روش تقریبی انتشار تصحیح شده[1] (CD) را پیشنهاد دادند. ایشان همچنین خاطر نشان نمودند که نمودار کنترل CUSUM برنولی از سمت بالا با مقدار اولیه، با یک نمودار کنترل CUSUM هندسی از سمت بالا بدون مقدار اولیه، معادل است. چنگ و گن [۹] استراتژیهای مناسب در به کارگیری نمودار CUSUM در فرایندهای با کیفیت بالا را بررسی نمودند.

به منظور پایش یک فرایند با کیفیت بالا توسط نمودار CUSUM هندسی، همزمان از دو نمودار کنترل CUSUM بالا و پایین استفاده می شود.

آماره مورد استفاده در نمودار کنترل سمت بالا در زمان i که بهبود کیفیت فرایند را نشان می دهد از رابطه $H_i = \max\{0, H_{i-1} + k_H - X_i\}$ و آماره مورد استفاده در نمودار کنترل سمت پایین در زمان i که افت کیفیت فرایند را نشان می‌دهد از رابطه $L_i = \min\{0, L_{i-1} + k_L - X_i\}$ به دست می‌آید. اگر $H_i \ge h_H$ یا $L_i \le -h_L$ نمودار اعلام هشدار می نماید.

مقادیر آغازین به صورت $H_0 = u, 0 \le u < h_H$ و $L_0 = v, -h_L < v \le 0$ تعریف می‌شود. همچنین مقادیر k_H, k_L براساس رویکرد آزمونهای نسبت احتمال متوالی پی‌درپی[2] (SPRT)، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{CUSUM} &= \max\{i : H_i = 0\}, \\ \hat{\tau}_{CUSUM} &= \max\{i : L_i = 0\}. \end{aligned} \qquad (۷)$$

$$k = k_L = k_H = \frac{\log_e\{p_1(1-p_0)/p_0(1-p_1)\}}{\log_e\{(1-p_0)/(1-p_1)\}} \qquad (۸)$$

چنگ و گن [۹] نشان دادند که نمودار کنترل CUSUM برنولی از سمت بالا با پارامترهای $k_{ber} = 1/c, h_{ber} = h, u_{ber} = (w+c-1)/c$ با نمودار کنترل CUSUM هندسی از سمت بالا با پارامترهای $k_H = c, h_H = ch - c + 1, u = w$ معادل است.

پیج [۱۰] یک برآوردکننده ذاتی نقطه تغییر را در نمودارهای کنترل CUSUM معرفی نمود. وی آخرین مشاهده ای که قبل از اعلام هشدار توسط نمودار مقدار *صفر* گرفته است را به عنوان برآورد ذاتی نقطه تغییر پیشنهاد نمود. این برآورد کننده در نمودار CUSUM هندسی از سمت بالا و پایین معرفی شده به صورت زیر به دست می‌آید:

در قسمتهای بعدی، عملکرد $\hat{\tau}_{MLE}, \hat{\tau}_{CUSUM}$ در تشخیص دوره تغییر در حالتیکه نمودار کنترل CUSUM هندسی اعلام هشدار می نماید، مورد بررسی قرار می گیرد.

۳. نمودار کنترل EWMA هندسی

روبرتز [۱۱] برای نخستین بار نمودار کنترل EWMA را جهت کنترل میانگین توزیع نمایی پیشنهاد نمود. آماره این نمودار به صورت $Z_i = \lambda X_i + (1-\lambda) Z_{i-1}$ تعریف می شود که در آن X_i مشاهده در زمان i و $0 < \lambda \le 1$ ثابت هموارسازی بوده و مقدار اولیه (Z_0) هدف یا میانگین فرایند در نظر گرفته می‌شود. حدود کنترل این نمودار با استفاده از روابط $LCL_i = E(Z_i) - L\sqrt{Var(Z_i)}, UCL_i = E(Z_i) + L\sqrt{Var(Z_i)}$ محاسبه می شوند. که در آن $E(Z_i)$ و $Var(Z_i)$ به ترتیب امید ریاضی و واریانس آماره در زمان i و L ضریب ثابت باشد. زی و همکاران [۶] نمودار کنترل EWMA را برای کنترل فرایندهای با کیفیت بالا پیشنهاد نمودند. ایشان این نمودار را برای مشاهدات توزیع هندسی که با استفاده از تابع تبدیل $X^{0.25}$ به مشاهدات توزیع نرمال تبدیل شده اند ترسیم نمود. کوسنبری [۱۲] استفاده از نمودار EWMA را برای مشاهدات تبدیل شده توسط تابع تبدیل Q پیشنهاد نمود.

برور و همکاران [۱۳] مقاومت[3] نمودار کنترل EWMA را در برابر نقض فرض نرمال بودن مشاهدات بررسی نمودند و ایشان نشان دادند که با انتخاب مناسب پارامترهای نمودار کنترل EWMA می‌توان حتی برای توزیعهای چوله (توزیع نمایی) به ARL موردنظر نمودارهای کنترل شوهارت دست یافت. بنابراین با توجه به چولگی توزیع هندسی می توان با انتخاب مناسب مقادیر L, λ نمودار کنترل EWMA با ARL دلخواه را طراحی نمود. در این صورت برای این نمودار $Z_0 = 1/p_0$ و حدود کنترل به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned} UCL_i &= \frac{1}{p_0} + L\frac{1}{p_0}\left(\frac{1}{p_0}-1\right)\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \\ CL &= \frac{1}{p_0} \\ LCL_i &= \frac{1}{p_0} - L\frac{1}{p_0}\left(\frac{1}{p_0}-1\right)\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]} \end{aligned} \qquad (۹)$$

نیشنا [۱۴] یک برآوردکننده ذاتی نقطه تغییر را در نمودارهای کنترل EWMA معرفی نمود. وی آخرین مشاهده ای که قبل از

[1] *Corrected Diffusion*
[2] *Sequential Probability Ratio Tests*
[3] *Robustness*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

اعلام هشدار از سمت حد بالا (پایین) مقداری کمتر (بیشتر) از خط مرکز گرفته است، را به عنوان برآورد کننده پیشنهاد نمود. این برآورد کننده در نمودار EWMA هندسی معرفی شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\tau}_{EWMA} = \max\left\{i : Z_i \le \frac{1}{p_0}\right\} \quad if\ Z_i > UCL_i, \qquad \hat{\tau}_{EWMA} = \max\left\{i : Z_i \ge \frac{1}{p_0}\right\} \quad if\ Z_i < LCL_i. \qquad (۱۰)$$

در قسمت بعدی، عملکرد $\hat{\tau}_{MLE}, \hat{\tau}_{EWMA}$ در تشخیص دوره تغییر در حالتیکه نمودار کنترل EWMA هندسی اعلام هشدار می نماید، مورد بررسی قرار می گیرد.

۴. بررسی عملکرد و مقایسه برآوردکننده های دوره تغییر

در این بخش با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو به بررسی عملکرد و مقایسه برآورد کننده های دوره تغییر MLE ($\hat{\tau}_{MLE}$)، CUSUM ($\hat{\tau}_{CUSUM}$) و EWMA ($\hat{\tau}_{EWMA}$) پرداخته می‌شود. در تمامی مراحل انجام کار فرض بر آن است که یک دوره تغییر وجود داشته و تغییر به صورت تغییر سطح ماندگار است. در مقایسه بین $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{CUSUM}$ از نمودار کنترل CUSUM و در مقایسه بین $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{EWMA}$ از نمودار کنترل EWMA استفاده می‌شود.

از آنجاییکه مشاهدات هندسی مانند مشاهدات نرمال قابل استاندارد شدن نیستند، برای مقادیر مختلف ۰/۰۰۰۵ و ۰/۰۰۰۱، p_0 = ۰/۰۰۰۰۵ شبیه سازی و مقایسه صورت گرفته است.

۴-۱. رویه شبیه سازی و مقابله با خطای نوع اول

رویه شبیه سازی طوری اجرا می گردد که تغییر در دوره τ = ۱۰۰ به وجود آید. در ابتدا مشاهدات تصادفی i =۱، ۲، ... ، ۱۰۰ از یک توزیع هندسی با پارامتر p_0 (فرایند تحت کنترل) تولید شده و از مشاهده ۱۰۱ به بعد، مشاهدات تصادفی از یک فرایند خارج از کنترل با پارامتر p_1 تولید می‌شود، این روند آنقدر ادامه می‌یابد که اولین هشدار از نمودار کنترل مورد بررسی دریافت شود.

سپس با استفاده از این مشاهدات تصادفی برآورد کننده‌های $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{CUSUM}$ در نمودار کنترل *CUSUM* و برآورد کننده-های $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{EWMA}$ در نمودار کنترل *EWMA* محاسبه می‌گردد.

این رویه به تعداد N = ۱۰۰،۰۰۰ دفعه برای هر p_1 اجرا می‌شود. میانگین مقادیر برآوردهای حاصل از این ۱۰۰،۰۰۰ بار شبیه سازی ($\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$، $\bar{\hat{\tau}}_{CUSUM}$ و $\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$) به همراه مقادیر خطای استاندارد برآورد ($se\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$، $se\bar{\hat{\tau}}_{CUSUM}$ و $se\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$) محاسبه می‌شود. در هنگام دریافت هشدار قبل از دوره تغییر مورد نظر ($T \le \tau$)، این هشدار به عنوان خطای نوع اول در نظرگرفته شده و همان برخوردی که در واقعیت با یک هشدار اشتباهی انجام می شود، صورت می گیرد.

بدین صورت که هنگامیکه در واقعیت یک هشدار دریافت می‌شود، مهندسین فرایند آن فرایند را تحت کنترل در نظر گرفته و پایش را از ابتدا شروع می‌نماید. بنابراین در صورت دریافت هشدار اشتباهی در زمان T، نمودار کنترل از مشاهده $T+1$ مجدد شروع به کار نموده و اطلاعات قبلی در نظر گرفته نمی‌شود.

اما نقطه تغییر برنامه ریزی شده نیز تغییر نمی کند. در این صورت بدیهیست در اجراییکه یک هشدار اشتباهی دریافت می‌شود، تعداد مشاهدات تحت کنترل کمتر از مقدار τ خواهد بود. بعنوان مثال فرض کنید τ = ۱۰۰ و در یکی از اجراهای شبیه سازی در دوره T = ۶۰ هشدار دریافت شده است. در این صورت نمودار کنترل برای دوره ۶۱ مجدد شروع به کار نموده (اطلاعات مربوط به آمارهها حذف می‌شود) و مشاهدات قبلی در نظر گرفته نمی‌شود. در این حالت تعداد مشاهدات تحت کنترل در صورت عدم دریافت هشدار اشتباهی دیگر، ۴۰ مشاهده خواهد بود.

۴-۲. مقایسه برآورد کننده ها با استفاده از نمودار کنترل *CUSUM*

در این بخش عملکرد برآورد کننده های $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{CUSUM}$ با یکدیگر مقایسه می‌شود. نمودارهای مورد استفاده جهت پایش فرایند نمودارهای CUSUM بوده و این نمودارها به گونه‌ای طراحی می‌گردند که مقدار ARL تحت کنترل توام (از سمت بالا و پایین) با مقدار مرسوم ۳۷۰ تقریبا برابر شود. لازم به ذکر است که به منظور طراحی نمودارهای کنترل CUSUM از سمت بالا، در ابتدا با استفاده از روش انتشار تصحیح شده (CD) نمودار کنترل CUSUM برنولی از سمت بالا طراحی شده و سپس با استفاده از رابطه مطرح شده بین CUSUM برنولی و CUSUM هندسی، نمودار کنترل مناسب CUSUM هندسی طراحی شده است.

همچنین به علت ابعاد بسیار بزرگ ماتریس انتقال زنجیره مارکوف و پیچیدگی محاسبات، نمودارهای کنترل CUSUM هندسی از سمت پایین با استفاده از شبیه سازی طراحی شده است. جدول (۱) مشخصات نمودارهای CUSUM مورد استفاده در این مقایسه را نشان می دهد.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

جدول ۱. مشخصات نمودارهای CUSUM مورد استفاده در مقایسه برآورد کننده‌ها

p_0	CUSUM Type	p_1	u	k_H	h_H
0.00005	Lower-side	0.00003	*0*	*25541*	1.8940×10^5
0.00005	Upper-side	0.00007	-16822	16823	1.7506×10^5
0.0001	Lower-side	0.00006	0	12770	0.9510×10^5
0.0001	Upper-side	0.0003	-5491	5492	0.2523×10^5
0.0005	Lower-side	0.0003	0	2554	0.1900×10^5
0.0005	Upper-side	0.0007	-1681	1682	0.1749×10^5

در ابتدا شبیه سازی و مقایسه دو برآورد کننده $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{CUSUM}$ در حالتی صورت گرفته که مقدار تحت کنترل نسبت اقلام معیوب p_0 = ۰/۰۰۰۵ می‌باشد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در جدول (۲) نمایش داده شده است.

در این جدول مقادیر $\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$، $\bar{\hat{\tau}}_{CUSUM}$، $se\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$، $se\bar{\hat{\tau}}_{CUSUM}$ و $\hat{E}[T]$ که به عنوان متوسط تعداد دوره سپری شده تا اعلام یک هشدار صحیح از نمودار است، به ازای مقادیر مختلف p_1، ارایه شده است. $\hat{E}[T]$ نیز از مقدار شبیه سازی به دست آمده است و به صورت $\tau+$ ARL محاسبه می‌شود.

جدول ۲. مقادیر متوسط و خطای استاندارد برآوردکننده ها و $\hat{E}[T]$ (p_0= ۰/۰۰۰۵)

(PPM) p_1	$\hat{E}[T]$	$\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$	$se\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$	$\bar{\hat{\tau}}_{CUSUM}$	$se\bar{\hat{\tau}}_{CUSUM}$
100	103.54	99.83	0.015	96.82	0.026
150	105.54	100.10	0.020	97.33	0.026
200	108.47	100.70	0.028	98.09	0.028
250	113.18	102.40	0.038	99.82	0.032
300	121.48	106.25	0.058	104.45	0.048
350	139.25	116.66	0.100	118.71	0.099
400	185.32	149.42	0.217	164.04	0.249
450	310.51	270.33	0.606	290.25	0.656
550	314.30	265.69	0.614	266.97	0.640
600	210.59	162.35	0.277	157.51	0.290
650	168.26	128.15	0.161	116.33	0.151
700	148.84	114.30	0.111	100.81	0.095
750	138.29	107.50	0.085	94.53	0.072
800	132.01	103.94	0.070	91.97	0.062
850	127.86	101.77	0.060	90.55	0.058
900	124.86	100.40	0.052	89.81	0.056
950	122.62	99.52	0.047	89.21	0.055
1000	121.05	99.10	0.043	89.10	0.055

همانگونه که از نتایج نیز مشخص است، $\hat{\tau}_{CUSUM}$ به ازای تغییراتی که در نزدیکی مقدار نسبتهای اقلام معیوبی است که نمودار CUSUM به ازای آن نسبتها طراحی شده است (۰/۰۰۰۷ ، p_1= ۰/۰۰۰۳)، عملکرد نسبتًا بهتری را دارد، اما در سایر تغییرات، به خصوص زمانیکه تغییرات از مقدار طراحی شده CUSUM فاصله می‌گیرد عملکرد $\hat{\tau}_{MLE}$ بهتر است. مقدار مجموع مربعات خطای برآورد به ازای مقادیر مختلف p_1 برای $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{CUSUM}$ به ترتیب ۶۴۱۹۰ و ۷۲۶۶۲ است. همچنین مقدار $se\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$ و $se\bar{\hat{\tau}}_{CUSUM}$ تقریبا برابر بوده و در بیشترین حالت ۰/۶۶ می باشد.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

در مجموع با توجه مجموع مربعات خطای برآورد به ازای مقادیر مختلف p_1 می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{\tau}_{MLE}$ عملکرد بهتری نسبت به $\hat{\tau}_{CUSUM}$ دارا می باشد. شبیه سازی و مقایسه عملکرد این دو برآورد کننده به ازای سایر مقادیر تحت کنترل نسبت اقلام معیوب۰/۰۰۰۱ ، ۰/۰۰۰۰۵ = p_0 نیز موید نتایج حاصل از حالت قبل می باشد. به منظور بررسی میزان دقت دو برآورد کننده، با استفاده از نتایج شبیه‌سازی متوسط احتمال مشاهده شده هر برآورد کننده در محدوده های مشخص حول دوره تغییر واقعی محاسبه شده است. جدول (۳) دقت هر برآورد کننده را به ازای ۰/۰۰۰۵ =p_0 و مقادیر مختلف p_1 نشان می‌دهد. به عنوان نمونه زمانیکه نسبت اقلام معیوب فرایند به مقدار ۰/۰۰۰۹۵ =p_1 تغییر می کند، احتمال اینکه $\hat{\tau}_{MLE}$ در فاصله ۱۰ دوره ای مقدار واقعی باشد، ۰/۷۲۵ و احتمال اینکه $\hat{\tau}_{CUSUM}$ در فاصله ۱۰ دوره ای مقدار واقعی باشد، ۰/۶۴۴ است. دقت $\hat{\tau}_{CUSUM}$ به جز در محدوده مقادیر p_1 که نمودار CUSUM با ازای این مقادیر طراحی شده است، کمتر از دقت $\hat{\tau}_{MLE}$است. شبیه سازی و مقایسه دقت این دو برآورد کننده به ازای سایر مقادیر تحت کنترل نسبت اقلام معیوب ۰/۰۰۰۱، ۰/۰۰۰۰۵ = p_0 موید نتایج حاصل از حالت قبل می باشد.

جدول ۳. دقت برآورد شده $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{CUSUM}$ (p_0= ۰/۰۰۰۵)

	p_1 (PPM)																	
	100	150	200	250	300	350	400	450	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)=0$	0.459	0.326	0.224	0.146	0.087	0.046	0.019	0.006	0.005	0.012	0.025	0.038	0.053	0.071	0.090	0.104	0.124	0.137
	0.100	0.094	0.081	0.067	0.049	0.029	0.013	0.005	0.006	0.015	0.027	0.040	0.051	0.060	0.068	0.073	0.076	0.082
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 1$	0.704	0.555	0.414	0.293	0.188	0.108	0.049	0.017	0.015	0.035	0.064	0.095	0.128	0.164	0.199	0.230	0.261	0.288
	0.480	0.417	0.344	0.265	0.186	0.104	0.043	0.015	0.017	0.044	0.084	0.125	0.161	0.190	0.214	0.233	0.247	0.263
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 2$	0.818	0.685	0.540	0.398	0.267	0.159	0.076	0.027	0.025	0.055	0.098	0.142	0.190	0.237	0.283	0.322	0.362	0.393
	0.626	0.575	0.497	0.400	0.286	0.166	0.069	0.024	0.028	0.070	0.127	0.186	0.233	0.269	0.300	0.320	0.333	0.350
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 3$	0.881	0.770	0.630	0.480	0.332	0.204	0.099	0.036	0.034	0.074	0.128	0.184	0.242	0.298	0.350	0.395	0.439	0.475
	0.700	0.667	0.599	0.500	0.367	0.218	0.094	0.033	0.039	0.092	0.166	0.238	0.294	0.334	0.367	0.385	0.399	0.414
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 4$	0.917	0.826	0.698	0.546	0.388	0.242	0.121	0.044	0.042	0.092	0.155	0.221	0.288	0.350	0.407	0.454	0.502	0.540
	0.746	0.726	0.672	0.576	0.434	0.264	0.115	0.041	0.049	0.114	0.201	0.284	0.345	0.388	0.421	0.438	0.451	0.465
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 5$	0.939	0.866	0.751	0.602	0.436	0.277	0.140	0.052	0.051	0.109	0.180	0.255	0.329	0.395	0.454	0.506	0.555	0.594
	0.779	0.768	0.725	0.637	0.491	0.304	0.136	0.049	0.058	0.133	0.232	0.323	0.389	0.434	0.466	0.484	0.497	0.507
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 10$	0.977	0.953	0.893	0.779	0.610	0.417	0.224	0.090	0.090	0.182	0.289	0.389	0.481	0.559	0.624	0.681	0.725	0.762
	0.874	0.878	0.866	0.815	0.681	0.454	0.217	0.085	0.103	0.220	0.365	0.480	0.555	0.600	0.628	0.639	0.644	0.652
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 15$	0.987	0.977	0.948	0.871	0.723	0.519	0.293	0.123	0.125	0.244	0.372	0.487	0.588	0.668	0.731	0.783	0.822	0.850
	0.924	0.928	0.925	0.897	0.788	0.558	0.282	0.115	0.141	0.292	0.466	0.591	0.666	0.705	0.726	0.733	0.735	0.739
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 20$	0.992	0.986	0.971	0.923	0.801	0.601	0.354	0.153	0.157	0.297	0.443	0.566	0.670	0.747	0.805	0.851	0.883	0.905
	0.953	0.956	0.954	0.940	0.856	0.635	0.335	0.143	0.177	0.352	0.545	0.673	0.745	0.779	0.794	0.799	0.797	0.801
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 25$	0.995	0.990	0.981	0.952	0.856	0.667	0.407	0.181	0.186	0.345	0.504	0.632	0.735	0.808	0.860	0.897	0.922	0.939
	0.971	0.972	0.971	0.965	0.901	0.695	0.382	0.168	0.209	0.406	0.610	0.738	0.804	0.833	0.843	0.846	0.844	0.847
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 30$	0.996	0.993	0.986	0.969	0.896	0.723	0.456	0.207	0.214	0.388	0.556	0.690	0.787	0.855	0.900	0.930	0.948	0.960
	0.982	0.982	0.982	0.979	0.931	0.745	0.424	0.192	0.238	0.451	0.662	0.788	0.848	0.872	0.880	0.882	0.879	0.882
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 35$	0.997	0.994	0.989	0.979	0.925	0.769	0.498	0.231	0.238	0.428	0.604	0.738	0.831	0.892	0.928	0.952	0.964	0.972
	0.989	0.989	0.988	0.987	0.952	0.785	0.462	0.214	0.265	0.491	0.706	0.828	0.883	0.903	0.907	0.909	0.907	0.909
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 40$	0.998	0.996	0.992	0.985	0.945	0.806	0.538	0.254	0.262	0.465	0.646	0.779	0.866	0.919	0.948	0.966	0.975	0.980
	0.993	0.993	0.993	0.992	0.967	0.817	0.498	0.235	0.289	0.527	0.744	0.861	0.909	0.925	0.928	0.929	0.929	0.929

۳-۴. مقایسه برآورد کننده ها با استفاده از نمودار کنترل EWMA

در این بخش عملکرد برآورد کننده های $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{EWMA}$ با یکدیگر مقایسه می‌شود. نمودارهای مورد استفاده جهت پایش فرایند نمودارهای EWMA بوده و این نمودارها به گونه‌ای طراحی می‌گردند که مقدار ARL تحت کنترلشان با مقدار مرسوم ۳۷۰ تقریباً برابر شود.

لازم به ذکر است که به منظور طراحی نمودارهای کنترل EWMA از شبیه‌سازی با ۱۰۰،۰۰۰ بار تکرار استفاده شده است. جدول (۴) مشخصات نمودارهای EWMA مورد استفاده در این مقایسه را نشان می دهد. در ابتدا شبیه سازی و مقایسه دو برآورد کننده $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{EWMA}$در حالتی صورت گرفته است که ۰/۰۵ =λ و ۰/۰۰۰۵ = p_0 می‌باشد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در جدول (۵) نمایش داده شده است. در جدول (۵) مقادیر $\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$، $\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$، $se\,\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$، $se\,\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$ و $\hat{E}[T]$ که به عنوان متوسط تعداد دوره سپری شده تا اعلام یک هشدار صحیح از نمودار است، به ازای مقادیر مختلف p_1، ارایه شده است. $\hat{E}[T]$ نیز از مقدار شبیه‌سازی به دست آمده است و به صورت $\tau+$ ARL محاسبه می‌شود.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

جدول ۴. مشخصات نمودارهای EWMA مورد استفاده در مقایسه برآورد کننده‌ها

p_0	λ	L
0.00005	0.05	2.5427
0.00005	0.01	1.9905
0.0001	0.05	2.5426
0.0001	0.01	1.9885
0.0005	0.05	2.5427
0.0005	0.01	1.9905

همانگونه که از جدول (۵) مشخص است، $\hat{\tau}_{MLE}$ به غیر از محدوده‌ای از کاهش نسبت اقلام معیوب (بین ۲۵۰ الی ۴۵۰ PPM)، ویک مورد در افزایش نسبت اقلام معیوب (۷۵۰ PPM)، عملکرد مناسبتری نسبت به $\hat{\tau}_{EWMA}$ دارد. مقدار مجموع مربعات خطای برآورد به ازای مقادیر مختلف p_1 برای $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{EWMA}$ به ترتیب ۱۳۰۵۳۴ و ۴۲۰۸۶۲ است.

مقدار بسیار بد برآورد در p_1 = ۰/۰۰۰۵۵ به علت عملکرد نامناسب نمودار EWMA در تشخیص تغییر و بالتبع آن مقدار نامناسب $\hat{E}[T]$ است. همچنین مقدار $se\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$ در اکثر موارد کمتر از $se\bar{\hat{\tau}}_{CUSUM}$ بوده و این مقدار برای هر دو برآورد کننده در بیشترین حالت ۱/۹۶ می باشد.

در مجموع با توجه مجموع مربعات خطای برآورد به ازای مقادیر مختلف p_1 می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{\tau}_{MLE}$ عملکرد بهتری نسبت به $\hat{\tau}_{EWMA}$ دارا می‌باشد.

جدول (۶) نتایج حاصل از شبیه‌سازی در حالتی‌که $p_0 = 0.0005, \lambda = 0.01$ است را نشان می‌دهد. مقادیر $\hat{E}[T]$ بیانگر این موضوع است که نمودار کنترل EWMA با مقدار کم λ عملکرد به مراتب بهتری (مقادیر کوچکتر ARL) دارد. همچنین در این حالت صحت و دقت برآورد کننده MLE بسیار بهتر است. همچنین با مقایسه $\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$ و $\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$ می‌توان به این نکته پی‌برد که $\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$ در تشخیص دوره تغییر هنگامیکه تغییرات کم هستند و $\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$ در تشخیص دوره تغییر هنگامیکه تغییرات زیاد هستند، عملکرد بهتری را دارا می‌باشند. شبیه سازی و مقایسه عملکرد این دو برآورد کننده به ازای سایر مقادیر تحت کنترل نسبت اقلام معیوب p_0=۰/۰،۰۰۰۰۵/۰۰۰۱ ، موید نتایج حاصل از حالت قبل می باشد. به منظور بررسی میزان دقت دو برآورد کننده، با استفاده از شبیه‌سازی متوسط احتمال مشاهده شده هر برآورد کننده در محدوده‌های مشخص حول دوره تغییر واقعی محاسبه شده است. جدول (۷) دقت هر برآورد کننده را به ازای p_0 = ۰/۰۰۰۵ و مقادیر مختلف p_1 نشان می‌دهد. به عنوان نمونه زمانیکه نسبت اقلام معیوب فرایند به مقدار $p_1 = 0.0002$ تغییر می‌کند، احتمال اینکه $\hat{\tau}_{MLE}$ در فاصله ۵ دوره‌ای مقدار واقعی باشد، ۰/۷۵۶ و احتمال اینکه $\hat{\tau}_{EWMA}$ در فاصله ۵ دوره ای مقدار واقعی باشد، ۰/۶۵۱ است. نتایج بیانگر این موضوع است که در مجموع دقت $\hat{\tau}_{MLE}$ بیشتر از دقت $\hat{\tau}_{EWMA}$ است.

جدول ۵. مقادیر متوسط و خطای استاندارد برآوردکننده ها و $\hat{E}[T]$ ($p_0 = 0.0005, \lambda = 0.05$).

$p_{1\ (\text{PPM})}$	$\hat{E}[T]$	$\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$	$se\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$	$\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$	$se\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$
100	103.46	99.79	0.015	96.07	0.036
150	105.33	100.08	0.019	96.57	0.037
200	108.00	100.81	0.025	97.38	0.038
250	112.08	102.61	0.034	98.83	0.040
300	118.64	106.54	0.050	101.86	0.048
350	131.32	116.09	0.082	110.24	0.075
400	160.73	142.23	0.166	136.91	0.164
450	243.43	224.32	0.426	220.79	0.429
550	726.53	421.24	1.172	681.79	1.966
600	419.36	190.67	0.445	345.01	0.932
650	259.80	134.97	0.225	175.41	0.395
700	196.82	116.25	0.143	118.18	0.180
750	167.89	107.97	0.104	101.13	0.101
800	152.08	103.99	0.082	95.61	0.074
850	142.81	101.53	0.069	93.67	0.067
900	136.64	100.10	0.060	92.73	0.064
950	132.28	99.13	0.054	92.09	0.063
1000	129.17	98.61	0.049	91.74	0.063

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

جدول ۶. مقادیر متوسط و خطای استاندارد برآوردکننده ها و $\hat{E}[T]$ ($p_0 = 0.0005, \lambda = 0.01$).

p_1 (PPM)	$\hat{E}[T]$	$\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$	$se\,\bar{\hat{\tau}}_{MLE}$	$\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$	$se\,\bar{\hat{\tau}}_{EWMA}$
100	104.74	99.74	0.016	89.46	0.071
150	107.46	99.87	0.022	90.18	0.072
200	111.14	100.40	0.029	91.15	0.074
250	116.47	101.83	0.039	92.72	0.077
300	124.59	105.33	0.056	95.11	0.083
350	138.83	114.64	0.090	100.72	0.097
400	169.63	141.35	0.173	117.52	0.154
450	259.08	228.95	0.448	194.01	0.431
550	305.50	258.22	0.562	202.84	0.535
600	206.69	159.84	0.253	115.72	0.214
650	172.09	126.73	0.156	96.22	0.138
700	155.93	112.95	0.112	90.24	0.119
750	146.49	105.99	0.088	87.48	0.112
800	140.45	102.40	0.072	86.00	0.108
850	136.33	100.37	0.062	85.13	0.106
900	133.25	99.15	0.055	84.57	0.104
950	130.91	98.55	0.049	84.10	0.103
1000	129.14	98.09	0.045	84.12	0.102

جدول ۷. دقت برآورد شده $\hat{\tau}_{MLE}$ و $\hat{\tau}_{EWMA}$ ($p_0 = 0.0005$)..

	p_1 (PPM)																	
	100	**150**	**200**	**250**	**300**	**350**	**400**	**450**	**550**	**600**	**650**	**700**	**750**	**800**	**850**	**900**	**950**	**1000**
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)=0$	0.460 0.047	0.328 0.044	0.227 0.040	0.147 0.036	0.090 0.029	0.048 0.023	0.021 0.013	0.007 0.006	0.004 0.002	0.011 0.005	0.022 0.013	0.036 0.023	0.052 0.030	0.070 0.035	0.088 0.038	0.103 0.041	0.119 0.045	0.137 0.043
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 1$	0.705 0.383	0.557 0.299	0.420 0.233	0.296 0.179	0.195 0.131	0.111 0.086	0.053 0.047	0.020 0.019	0.010 0.006	0.030 0.015	0.058 0.040	0.088 0.070	0.123 0.094	0.160 0.110	0.193 0.121	0.225 0.130	0.256 0.139	0.285 0.141
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 2$	0.820 0.564	0.690 0.470	0.546 0.382	0.402 0.296	0.273 0.220	0.163 0.145	0.080 0.078	0.032 0.032	0.016 0.010	0.047 0.025	0.088 0.065	0.134 0.114	0.182 0.154	0.231 0.179	0.274 0.198	0.316 0.213	0.355 0.225	0.390 0.232
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 3$	0.882 0.661	0.773 0.585	0.636 0.497	0.486 0.396	0.339 0.300	0.209 0.201	0.106 0.107	0.042 0.044	0.023 0.014	0.063 0.036	0.115 0.089	0.172 0.155	0.232 0.210	0.290 0.243	0.341 0.271	0.387 0.288	0.432 0.304	0.470 0.317
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 4$	0.917 0.717	0.829 0.662	0.704 0.585	0.554 0.480	0.396 0.371	0.250 0.251	0.129 0.136	0.052 0.055	0.029 0.017	0.078 0.045	0.141 0.113	0.207 0.196	0.276 0.261	0.341 0.303	0.396 0.336	0.446 0.358	0.494 0.378	0.534 0.392
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 5$	0.939 0.751	0.870 0.714	0.756 0.651	0.610 0.552	0.445 0.434	0.287 0.299	0.150 0.162	0.062 0.067	0.034 0.021	0.092 0.055	0.163 0.136	0.238 0.234	0.313 0.310	0.384 0.359	0.443 0.396	0.495 0.422	0.545 0.442	0.587 0.457
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 10$	0.976 0.834	0.955 0.833	0.899 0.821	0.790 0.769	0.626 0.659	0.432 0.490	0.240 0.278	0.104 0.118	0.059 0.038	0.154 0.097	0.260 0.234	0.363 0.393	0.458 0.504	0.542 0.570	0.607 0.614	0.664 0.641	0.710 0.657	0.749 0.668
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 15$	0.986 0.884	0.978 0.885	0.953 0.884	0.882 0.864	0.745 0.789	0.541 0.620	0.315 0.369	0.141 0.161	0.083 0.054	0.204 0.133	0.336 0.309	0.455 0.504	0.557 0.628	0.644 0.696	0.710 0.730	0.761 0.749	0.802 0.756	0.836 0.760
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 20$	0.991 0.918	0.987 0.919	0.975 0.920	0.933 0.912	0.825 0.864	0.629 0.715	0.383 0.445	0.175 0.201	0.104 0.067	0.248 0.164	0.398 0.371	0.527 0.585	0.633 0.710	0.719 0.773	0.780 0.798	0.826 0.809	0.862 0.810	0.888 0.812
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 25$	0.994 0.942	0.991 0.942	0.984 0.943	0.961 0.940	0.881 0.910	0.700 0.781	0.442 0.507	0.209 0.236	0.123 0.080	0.287 0.190	0.452 0.420	0.587 0.644	0.693 0.768	0.775 0.823	0.832 0.843	0.872 0.850	0.901 0.849	0.921 0.850
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 30$	0.995 0.959	0.993 0.958	0.989 0.959	0.976 0.959	0.918 0.940	0.759 0.831	0.495 0.561	0.240 0.269	0.142 0.091	0.323 0.213	0.499 0.460	0.637 0.689	0.742 0.810	0.820 0.860	0.870 0.876	0.904 0.881	0.927 0.879	0.944 0.880
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 35$	0.997 0.971	0.995 0.970	0.992 0.971	0.985 0.972	0.945 0.960	0.806 0.869	0.543 0.606	0.269 0.298	0.159 0.101	0.357 0.233	0.540 0.494	0.681 0.727	0.782 0.843	0.854 0.887	0.899 0.902	0.928 0.904	0.946 0.902	0.958 0.903
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau}-\tau\rvert)\le 40$	0.998 0.980	0.996 0.979	0.994 0.980	0.990 0.981	0.963 0.973	0.843 0.897	0.588 0.647	0.297 0.326	0.175 0.110	0.387 0.252	0.577 0.523	0.719 0.757	0.818 0.869	0.883 0.909	0.922 0.921	0.945 0.923	0.959 0.921	0.968 0.922

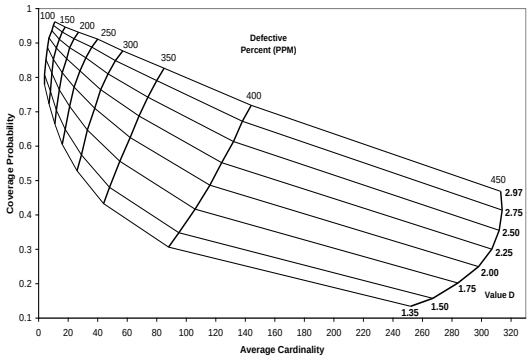
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

۵. مجموعه اطمینان براساس تابع احتمالی تغییر پله-ای ساده برای نسبت اقلام معیوب در فرآیندهای باکیفیت بالا

برآورد کننده‌هایی که تاکنون مطرح گردید، برآوردکننده های نقطه‌ای بوده و یک دوره را به عنوان دوره تغییر معرفی می نمود. وجود یک مجموعه اطمینان[1] که در آن پنجره‌ای از دوره‌های تغییر ممکن همراه با دوره تغییر واقعی با سطح اطمینان مشخص وجود دارد، می‌تواند برای کاربران بسیار مفید باشد. کاربران با در دسترس داشتن چنین مجموعه‌ای در حقیقت دوره‌های کاندید برای دوره تغییر را در اختیار داشته و با جستجوی این مجموعه می‌توانند قدرت و سرعت شناسایی انحراف بادلیل را افزایش دهند. باکس و کاکس [۱۵] روشی را برای ایجاد مجموعه‌های اطمینان برای برآوردهای درستنمایی بیشینه بر اساس تابع درستنمایی پیشنهاد می‌کنند. بر اساس روش پیشنهادی ایشان مجموعه اطمینان به صورت زیر تعریف می شود.

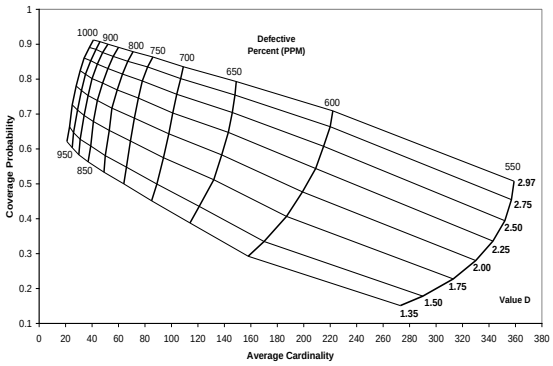
$$CS = \{t : \log_e L(t) > \log_e L(\hat{\tau}) - D\} \qquad (۱۱)$$

که در آن D یک مقدار ثابت مثبت بوده و $\log_e L(\hat{\tau})$ مقدار بیشینه لگاریتم تابع درستنمایی به ازای تمام دوره های تغییر ممکن τ می‌باشد. در حقیقت دوره‌ای که اختلاف لگاریتم تابع درستنمایی آن از مقدار بیشینه لگاریتم تابع درستنمایی کمتر از D باشد، درون این مجموعه اطمینان قرار می‌گیرد. با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و مطابق فرایندی که در قسمتهای قبل مطرح گردید، مجموعه‌های اطمینان به ازای مقادیر مختلف $D = 1.35, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50, 2.75, 2.97$ حاصل گردید. مقادیر ابتدایی و انتهایی D مقادیر پیشنهادی باکس و کاکس [۱۵] و سیگموند [۱۶] است. در هر مجموعه اطمینان دو آماره متوسط احتمال پوشش دوره تغییر توسط مجموعه اطمینان و متوسط تعداد اعضای مجموعه مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدیهی است که هر چه مقدار متوسط احتمال پوشش بیشتر و متوسط تعداد اعضای مجموعه کمتر باشد، مجموعه موردنظر مجموعه مناسبتری است. شکل (۱) و (۲) مقدار متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان را به ترتیب برای کاهش و افزایش نسبت اقلام معیوب به ازای مقادیر مختلف D و τ = ۱۰۰، p_0 = ۰/۰۰۰۵ نشان می‌دهد. همانگونه که از شکل (۲) نیز مشخص است، با افزایش میزان تغییر، همزمان متوسط احتمال پوشش افزایش و تعداد اعضای مجموعه اطمینان کاهش می یابد. همچنین با افزایش مقدار D، مقدار احتمال پوشش و متوسط اعداد مجموعه اطمینان افزایش می یابد. کاربران با استفاده از این اشکال می‌توانند مقدار مناسب D را که به ازای آن می‌توان به سطح قابل قبولی از متوسط احتمال پوشش و متوسط تعداد اعضای مجموعه دست یافت، تعیین نمایند.



شکل ۱. متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف D، $p_1 < p_0$ (نمودار کنترل CUSUM $p_0 = 500, \tau = 100$)

به عنوان مثال فرض کنید کاربری تمایل دارد که مجموعه اطمینان پریود تغییر در حالتی‌که p_1 = ۰/۰۰۰۲ دارای احتمال پوشش حداقل ۰/۸ و متوسط تعداد اعضای حداکثر ۲۰ باشد. در اینصورت با توجه به شکل (۱)، مقدار D موردنظر می‌بایست بین ۲/۰۰ و ۲/۲۵ انتخاب شود. هر مقدار خارج از این بازه منتج به متوسط احتمال پوشش کمتر یا متوسط تعداد اعضای بیشتر از مقدار مورد نظر می شود. نکته قابل توجه دیگر که در مقایسه دو شکل (۱) و (۲) نتیجه می‌شود این است که مقادیر احتمال پوشش و متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان به ازای تغییرات کاهشی نسبت اقلام معیوب بهتر از مقادیر متناظر به ازای تغییرات افزایشی نسبت اقلام معیوب است.

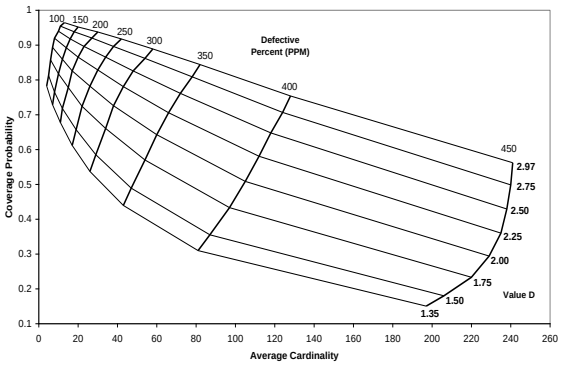


شکل ۲. متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف D، $p_1 > p_0$ (نمودار کنترل CUSUM $p_0 = 500, \tau = 100$)

[1] *Confidence Set*

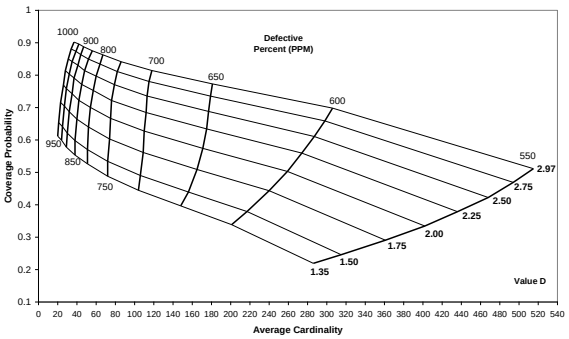
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

در ادامه با به کارگیری رابطه (۱۰) و شبیه‌سازی مونت کارلو و با استفاده از نمودار کنترل EWMA هندسی، مجموعه‌های اطمینان به‌ازای مقادیر مختلف $D=1.353,1.50,1.75,2.00,2.25,2.50,2.75,2.97$ تعیین می‌گردد. در هر مجموعه اطمینان دو آماره متوسط احتمال پوشش دوره تغییر توسط مجموعه اطمینان و متوسط تعداد اعضای مجموعه مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدیهی است که هر چه مقدار متوسط احتمال پوشش بیشتر و متوسط تعداد اعضای مجموعه کمتر باشد، مجموعه موردنظر مجموعه مناسبتری است.



شکل۳. متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف D ، $p_1 < p_0$ (نمودار کنترل EWMA) $p_0 = 500\text{PPM}, \tau = 100, \lambda = 0.05$

شکل (۳) و (۴) مقدار متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان را به ترتیب برای کاهش و افزایش نسبت اقلام معیوب به ازای مقادیر مختلف D و $p_0 = 0.0005, \tau = 100$ نشان می‌دهد. رفتار نمودارها مشابه حالتی است که از نمودار CUSUM هشدار دریافت می‌شود. نکته قابل توجه دیگر که در مقایسه دو شکل (۳) و (۴) نتیجه می‌شود این است که مقادیر احتمال پوشش و متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان به ازای تغییرات کاهشی نسبت اقلام معیوب بهتر از مقادیر متناظر به ازای تغییرات افزایشی نسبت اقلام معیوب است.



شکل ۴. متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف D ، $p_1 > p_0$ (نمودار کنترل EWMA) $p_0 = 500, \tau = 100, \lambda = 0.05$

۶ نتیجه گیری

چنانچه مهندسان قادر باشند زمان تغییر در فرآیندها را تعیین کنند، براحتی پارامتر تغییر یافته در فرآیند را شناسایی و در مدت زمان کوتاهتری علل ریشه‌ای را مشخص می‌کنند که این امر بهبود کیفیت در فرآیند و محصولات را تسریع خواهد کرد. همچنین برآورد زمان تغییر، احتمال شناسایی نادرست پارامتر تغییر یافته را کاهش داده و پس از اعلام هشدار نقطه‌ای آغازین برای جستجوی زمان و علت واقعی تغییر را در اختیار مهندسان فرآیند قرار می‌دهد.

در این مقاله برآورد کننده درستنمایی بیشینه برای تخمین زمان تغییر در پارامتر نسبت اقلام معیوب فرآیند باکیفیت مورد بررسی قرار گرفته است. عملکرد این برآوردکننده با عملکرد برآوردکننده‌های ذاتی نمودارهای کنترل جمع تجمعی و میانگین موزون درستنمایی هندسی مقایسه شده است. نشان دادیم که برآوردکننده درستنمایی بیشینه به ازای مقادیر مختلف اندازه تغییر، برآوردی دقیق‌تر ارائه می‌دهد. از آنجایی که نمودارهای کنترل جمع تجمعی و میانگین موزون درستنمایی به ازای مقدار خاصی تعیین می‌شوند، در این نقاط برآوردکننده‌های ذاتی عملکرد بهتری دارند ولی بطور کلی برآورد کننده درستنمایی بیشینه در حالیکه به ازای مقدار خاصی طراحی نشده، برآورد بهتری داشته است.

در پایان، مجموعه اطمینان برای نقطه تغییر بررسی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان دادند که به ازای مقادیر مختلف D و p_1، با افزایش احتمال پوشش، تعداد اعضای مجموعه اطمینان کاهش می یابد. کاربران با استفاده از این مجموعه می‌توانند مقدار مناسب D را که به ازای آن می‌توان به سطح قابل قبولی از متوسط احتمال پوشش و متوسط تعداد اعضای مجموعه دست یافت، تعیین نمایند.

مراجع

[1] Noorossana, R., Abdi, S., Saghaei, A., Paynabar, K., "*Identifying the Time of a Change in High Yield Processes*," Proceeding of 4th International Industrial Engineering Conference, Tehran, Iran, 2005.

[2] Noorossana, R., Saghaei, A., Peynabar, K., Abdi, S., "*Identifying the Period of a Step Change in High-Yield Processes*", Quality and Reliability Engineering International, 2009; 25: pp. 875-883.

[3] Pignatiello, J., Samuel, R., "*Estimation of the Change Point of a Normal Mean in SPC Applications*".

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

Quality Technology and Quantitative Management, 2006; 3(3): pp. 325-344.

[4] Perry, M.B., Pignatiello, J.J., JR., Simpson, R., "*Estimating the Change Point of a Poisson Rate Parameter for SPC Applications*," (under review).

[5] Perry M.B., Pignatiello, J.J., JR., "*Estimation of the Change Point of the Process Fraction Nonconforming in SPC Applications,"* International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, 2005; 12(2): pp. 95-110.

[6] Xie, M., Goh, T.N., Kuralmani, V., *Statistical Models and Control Charts for High-Quality Processes*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 2002.

[7] Brook, D., Evans, D.A., "*An approach to the probability distribution of CUSUM run length*." Biometrika, 1991; 59: 539-549

[8] Reynolds, M.R., Jr. Stoumbos, Z.G.. "*A CUSUM Chart for Monitoring a Proportion when Inspecting Continuously*". Journal of Quality Technology. 1999; 31: 87–108

[9] Chang, T.C., Gan F.F., *"Charting Techniques for Monitoring a Random Shock Process*," Quality and Reliability Engineering International, 1999; 15: pp. 295-301

[10] Page, E.S. "*Cumulative Sum Control Charts.*" Technometrics 1961; 3(1): 1-9.

[11] Roberts, S.V., "*Control Chart tests Based on Geometric Moving Averages*", Technometrics 1959; 1: pp. 239-250

[12] Quesenberry, C.P., "*Geometric Q Charts for High Quality Process*" Journal of Quality Technology, 1995; 27(4): pp. 333–343

[13] Borror, C.M., Montgomery, D.C., Runger, G.C., *"Robustness of the EWMA Control Cchart to Non-Normality*." Journal of Quality Technology, 1000;31(3): pp. 309-316.

[14] Nishina, K., "*A Comparison of Control Charts from the Veiwpoint of Change Point Estimation*," Quality and Reliability Engineering International, 1992; 8: pp. 537-541

[15] Box, G.E.P., Cox, D.R., "*An Analysis of Transformations*", Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodologigal), 1964; 26(2): pp. 211-252

[16] Seigmond, D., "*Boundary Crossing Probabilities and Statistical Applications*", The Analysis of Statistics, 1986; 14(2): pp. 361-404.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]