



A Novel Robust Model for Discrete Time-Cost Trade off Problem

S. Moghani Ghahremanlouie & K. Fathi Hafashjani*

Sepide Moghani Ghahremanlouie-M.A Student, Department of Industrial management, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran Iran
Kiamars Fathi Hafshajani-Assistance Professor, Department of Industrial management, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran

Keywords

Discrete Time-Cost Trade off Problem,
Robust Optimization,
Uncertainty,
Project Scheduling,
Genetic Algorithm

ABSTRACT

In project scheduling, the activity durations can often be reduced by dedicating additional resources. Time/Cost Trade-off Problem considers the compromise between the total cost and project duration. The discrete version of the problem assumes a number of time/cost pairs, so called modes, and selects a mode for each activity. In this paper, we consider the Discrete Time/Cost Trade-off Problem. We study the problem of minimizing total cost subject to a deadline on project duration so called Deadline problem. Projects are often subject to various sources of uncertainties that have a negative impact on activity durations and costs. Therefore, it is crucial to develop effective approaches to generate robust project schedules that are less vulnerable to disruptions caused by non-controllable factors. We propose a novel robust model for the DTCTP in which interval uncertainty is assumed for the unknown cost parameters. We use genetic algorithms to solve the proposed robust optimization model. Our computational results on large-sized problem instances have revealed the satisfactory behavior of our algorithms.

© 2014 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 25, No. 1, All Rights Reserved

*
Corresponding author: Kiyamars Fathi Hafshajani
Email: fathi@azad.ac.ir



مدل استوار نوین در مسئله‌ی موازنه‌ی زمان-هزینه گستته

سپیده مغانی قهرمانلوئی و کیامرت فتحی هفشنگانی*

چکیده:

یکی از مسائل مهم در کنترل پروژه، برآورد دقیق زمان اتمام و هزینه‌ی اجرایی و میزان منابع مصرفی در یک پروژه می‌باشد. به علت عدم قطعیت در کنترل پروژه‌هایی که در محیط بسیار متغیر اجرا می‌شوند، در مدیریت پروژه‌ها، اغلب ممکن است با صرف هزینه‌های اضافی طول زمان برخی از فعالیتها را کاهش دهیم تا زمان تکمیل پروژه را تسريع بخشیم. مسئله‌ی موازنه‌ی زمان-هزینه، روش‌های تعیین اقتصادی ترین زمان برای اجرای پروژه و بررسی میزان حساسیت تغییرات هزینه در مقابل تغییرات زمان می‌باشد. در این پژوهش، یک مدل ریاضی کارامد و استوار برای مسئله‌ی موازنه‌ی زمان-هزینه گستته، ارائه می‌گردد که در شرایط عدم قطعیت و غیر قابل پیش‌بینی همواره جوابهای نزدیک به بهینه داشته باشد. برای استوار کردن و حفظ کارایی مدل مفروض از روشن بینه سازی استوار و برای حل مدل از الگوریتم ژنتیک استفاده می‌کیم. با بررسی نتایج آزمایشات برروی پروژه‌های مختلف، به استواری، دقیق و کارایی روش پیشنهادی پی‌می‌بریم.

کلمات کلیدی

مسئله موازنه‌ی زمان-هزینه گستته، بهینه سازی استوار، عدم قطعیت، زمانبندی پروژه، الگوریتم ژنتیک

تحقیقاتی نیز بسیار حائز اهمیت است و در سال‌های اخیر تحقیقات بسیاری در این زمینه صورت گرفته است. به علت عدم قطعیت در ماهیت کنترل پروژه‌ها که در محیطی بسیار متغیر اجرا می‌شوند، تاخیر در اتمام به موقع یک پروژه سبب افزایش هزینه‌های اجرایی می‌شود. مدیریت پروژه، اغلب ممکن است با صرف هزینه‌های اضافه تر طول زمان برخی از فعالیتها را کاهش دهد تا زمان تکمیل پروژه را تسريع بخشند. بنابراین برآورد دقیق زمان اتمام و هزینه‌ی اجرایی و میزان منابع مصرفی در یک پروژه بسیار حائز اهمیت می‌باشد. مسئله‌ی موازنه‌ی زمان-هزینه، روش‌های تعیین اقتصادی ترین زمان برای اجرای پروژه و بررسی میزان حساسیت تغییرات هزینه در مقابل تغییرات زمان-هزینه از دیدگاه های مختلف وجود دارد. از دید روابط بین توابع زمان و هزینه در مساله، می‌توان مساله موازنه زمان-هزینه از دیدگاه های مختلف وجود دارد. از دید صنعتی صنعتی و اجرای آنها، جایگاه ویژه ای را به خود اختصاص داده است. زمانبندی پروژه علاوه بر بعد عملی، از بعد نظری و

۱. مقدمه

مبحث مدیریت پروژه، در دهه‌های اخیر از مهمترین و کاربردی ترین مقوله‌های مورد توجه بوده است. در دنیای رقابتی امروز، ارائه خدمات و محصولات با کیفیت هنگامی دارای ارزش است که، چارچوب زمانی و هزینه در آن رعایت شده باشد. در میان اجزای مدیریت پروژه، زمانبندی پروژه به جهت اهمیت و تأثیر بکارگیری آن در سطح مدیریت کلان، برنامه‌ریزی پروژه‌های واقعی صنعتی و اجرای آنها، جایگاه ویژه ای را به خود اختصاص داده است. زمانبندی پروژه علاوه بر بعد عملی، از بعد نظری و

تاریخ وصول: ۹۰/۴/۱۹

تاریخ تصویب: ۹۱/۴/۱۷

سپیده مغانی قهرمانلوئی، گروه مدیریت صنعتی دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، sepide_mgh_252@yahoo.com
نویسنده مسئول مقاله: دکتر کیامرت فتحی هفشنگانی، گروه مدیریت صنعتی دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، fathi@azad.ac.ir

شود و جواب بهینه به دست آمده برای مقادیر اسمی، دیگر بهینه و یا حتی موجه نباشد. هنگامی که داده‌های موجود در تابع هدف غیر قطعی باشند، با تغییر مقادیر اسمی بهینگی جواب به دست آمده برای مساله اسمی به خطر می‌افتد و موقعی که داده‌های مربوط به محدودیت‌ها قطعی نباشند، نگران موجه بودن جواب به دست آمده هستیم. در هنگام ارائه یک مدل غالباً پارامتر‌های ورودی در آینده مشخص می‌شوند یا مقدار دقیق آن در زمان مدل سازی مساله مشخص نیستند [۱۰].

برخوردهای کلاسیک با عدم قطعیت در پارامتر‌های مدل به روش‌های تحلیل حساسیت و برنامه ریزی احتمالی صورت می‌گرفته است. تحلیل حساسیت یک وسیله برای تحلیل میزان پایداری جواب تولید شده پس از بهینه سازی است. در واقع در این رویکرد، مدل‌سازان ابتدا از عدم قطعیت داده‌ها چشم پوشی می‌کنند و بعد از حل مدل به تحلیل آن می‌پردازند که این روش به ویژه برای تولید جواب‌هایی که در مقابل تغییرات داده‌ها استوار باشند، مفید نیست.

در برنامه ریزی احتمالی موجه بودن جواب را (با فرض معلوم بودن توزیع‌های احتمال پارامترهای ورودی) با استفاده از محدودیت‌های تصادفی بیان می‌کنند. مشکل اصلی این روش این است که به ندرت می‌توان توزیع‌های دقیق پارامترهای غیرقطعی را به دست آورد. بعلاوه، حتی اگر این توزیع‌ها مشخص باشند، ارزیابی محدودیت‌های تصادفی از نظر محاسباتی آسان نیست. بعلاوه وجود محدودیت‌های تصادفی می‌تواند ویرگی تحذب را از بین ببرد و پیچیدگی مساله اصلی را افزایش دهد [۱۱].

با توجه به مشکلات رویکردهای کلاسیک برخورد با عدم قطعیت، روش‌های نوینی برای حل مدل های بهینه سازی با پارامترهای غیرقطعی ارائه گردید. یکی از این روش‌ها روش بهینه سازی استوار می‌باشد. بهینه سازی استوار روشی برای برخورد با عدم قطعیت پارامترهای غیرقطعی مسائل بهینه سازی است که اخیراً بسیار توسعه یافته است. در این رویکرد بهینه سازی، بدترین حالت‌هایی را که ممکن است برای پارامترهای غیرقطعی تحقق یابند، بهینه می‌کنند.

هدف همه رویکردهای بهینه سازی استوار، تولید جواب‌هایی است که با تغییر پارامترهای غیرقطعی در مجموعه‌های عدم قطعیت، همچنان بهینه باقی بمانند. یکی از خصوصیات اصلی این روش که آنرا برای استفاده در این مسئله مناسب نموده، حساسیت کم آن به شرایط عدم قطعیت است [۱۲]. بهینه سازی استوار در سال ۱۹۷۳ توسط سویستر معرفی شد. مدل ارائه شده توسط سویستر به شدت محافظه کارانه عمل کرده و بدینانه ترین رویکرد می‌باشد [۱۳]. در چند دهه گذشته تلاشهای

فعالیت تابع گسسته از میزان منابع تجدید نشدنی است که مصرف می‌کند. تابع هدف و محدودیت‌های مساله موازنه زمان-هزینه گسسته از ۲ دیدگاه اصلی زیر قابل بررسی هستند [۱].

- مساله با زمان اتمام مورد نظر (Deadline Problem)
 - مساله با بودجه مورد نظر (Budget Problem)
- در مساله با زمان اتمام مورد نظر، یک حداکثر زمان تکمیل برای کل پروژه و همه‌ی فعالیت‌ها در نظر گرفته می‌شود. هدف مساله حداقل کردن کل هزینه‌های پروژه می‌باشد. در مساله با بودجه مورد نظر یک حداکثر برای مقدار بودجه تخصیص یافته در نظر گرفته می‌شود. هدف حداقل کردن طول زمان پروژه می‌باشد. دی و همکاران در ۱۹۹۷ نشان دادند که هر دو مساله NP-hard می‌باشند [۲].

ادبیات موضوع در مورد مسئله موازنه زمان-هزینه بسیار گسترده بوده و روش‌های متعددی طی سال‌های اخیر برای حل این مسئله توسط محققان ارائه شده اند. عمدۀ این روش‌ها با استفاده از روش‌های بهینه سازی معمول، سعی در حل این مسئله کاربردی دارند. به علت گستردگی دامنه ادبیات موضوع، در مقاله حاضر سعی بر آن شده است تا به جدیدترین روش‌های ارائه شده برای حل مسئله DTCTP-d با توجه به تاثیر عدم قطعیت و بهینه سازی استوار پرداخته شود، لذا به تحقیقات قبلی مهم ارائه شده با این دیدگاه، بیشتر پرداخته شده و از ذکر روش‌های دیگر پرهیز می‌گردد. برای مطالعه بیشتر درباره ای ادبیات موضوع مراجع [۱۱] اوصیه می‌گردد.

دللمیستر و همکاران [۳] از الگوریتم دقیق شاخه و کران برای حل مسئله استفاده کردند. اسکاتلا [۴]، آکان و همکاران. [۵]، ونهوک و همکاران [۶] و حافظ اوغلو [۷] از الگوریتم‌های تقریبی برای حل مسئله موازنه زمان-هزینه گسسته استفاده کردند. کوهن و همکاران یک مدل جدید برپایه روش AARC به عنوان یک ابزار برای تعیین راه حل‌های بهینه، تطبیقی و استوار برای حل مسئله موازنه زمان-هزینه پیوسته احتمالی (STCTP) ارائه نمودند [۸]. هاجیکانستانینو و همکاران از برنامه ریزی احتمالی برای مدل بندي عدم قطعیت زمان فعالیتها در حل مسئله استفاده کردند [۹].

یکی از شرایط حاکم بر زمانبندی پروژه‌ها، عدم قطعیت موجود در شرایط اجرای پروژه‌ها می‌باشد. این عدم قطعیت منجر به دشواری برآورد دقیق زمان و هزینه‌ی فعالیتها می‌گردد. عموماً در برنامه ریزی فرض می‌کنیم که داده‌های ورودی دقیقاً معلوم هستند و اثر عدم قطعیت داده‌ها بر روی بهینگی و موجه بودن مدل را نادیده می‌گیریم.

بنابراین به نظر می‌رسد که به محض اینکه داده‌ها مقادیری غیر از مقدار اسمی خود بگیرند، ممکن است چندین محدودیت نقض

پیاده سازی مدل پیشنهادی ارائه می‌گردد و نتایج حاصله با مدل‌های قبلی مقایسه می‌گردد.

۲. روش بهینه سازی استوار

بهینه سازی استوار روشنی برای برخورد با عدم قطعیت پارامترهای غیرقطعی مسائل بهینه سازی است. در این رویکرد بهینه سازی، بدترین حالت‌هایی را که ممکن است برای پارامترهای غیرقطعی تحقق یابد، بهینه می‌کنند. مجموعه‌های عدم قطعیت در واقع همان فضای تغییر پارامترهای غیرقطعی هستند که کلیه مقادیر ممکن برای پارامترهای غیرقطعی را شامل می‌شوند. رویکردهای بهینه سازی استوار اهمیت یکسانی را به کلیه مقادیر فضای پارامترهای غیرقطعی می‌دهند و جواب‌هایی تولید می‌کنند که با تحقق هر عضو متعلق به مجموعه‌های عدم قطعیت، بهینگی و شدنی بودن را حفظ نمایند. از نظر پیچیدگی مسائل، بهینه سازی استوار یک رویکرد متفاوت برای برخورد با عدم قطعیت داده‌ها ارائه می‌دهد. در طراحی چنین رویکردی دو معیار حائز اهمیت است:

۱. مهار شدن محاسباتی همتاهای استوار مسائل غیرقطعی؛ اگر مساله‌ای اسمی در زمان چند جمله‌ای حل گردد، از نظر تئوری مطلوب‌ترین مساله استوار نیز چنین باشد.
۲. ارائه مرزهای احتمالی؛ تا وقتی که پارامترهای احتمالی در مجموعه‌های عدم قطعیت تغییر می‌کنند، جواب‌های به دست آمده با احتمال مشخصی، شدنی باقی بمانند.

این معیارها همیشه در همه رویکردهای بهینه سازی استوار برآورده نمی‌شوند. اما برای این که یک جواب استوار هم از نظر تئوری و هم از نظر عملی مفید باشد، باید این معیارها را برقرار سازد [۱۰]. برتسیمس و سیم یک رویکرد متفاوتی برای کنترل سطح محافظه کاری راه حل‌ها برای مسائل بهینه سازی گسسته ارائه کردند که از نظر تئوری و عملی این رویکرد قابل پیگیری محاسباتی است. در واقع آنها با بیان اینکه همتای استوار یک مسئله برنامه ریزی خود یک مسئله برنامه ریزی خود است تحولی را در بهینه سازی استوار به وجود آورند. این مدل قابلیت اعمال بر روی مسائل بهینه سازی با متغیرهای گسسته را نیز دارد [۱۶]. در این تحقیق از این روش برای مدل‌بندی و استوار کردن مسئله موازنه زمان-هزینه گسسته استفاده خواهیم کرد بنابراین در ادامه به توضیح بیشتر آن می‌پردازیم. برنامه ریزی مخلوط با عدد صحیح اسمی (۱) را با مجموعه‌ای از n متغیر در نظر بگیرید که در آن c, l, u بردارهای n بعدی و A ماتریس $m \times n$ و b بردار m بعدی می‌باشد.

زیادی برای ارائه مدل‌های استوار مهارپذیر مناسب برای حل انواع مسائل بهینه سازی با داده‌های غیرقطعی بعمل آمده است. بن‌تال و نمیروفسکی مدل‌هایی را ارائه کرده اند که همتای استوار برنامه ریزی خطی، یک مدل برنامه ریزی مخروطی درجه دو شده است.

این مدل‌ها از محافظه کاری کمتری برخوردار بوده و جوابهای بهتری ارائه می‌کنند [۱۴]. ال-قاوی و همکاران نیز کارهای مشابهی انجام داده اند. ولی در این بین برتسیمس و سیم با ارائه مدلی که میزان محافظه کاری آن قابل تنظیم است و همتای استوار یک مساله خطی، خود یک مساله برنامه ریزی خطی است، تحولی در بهینه سازی استوار به وجود آورند. این مدل قابلیت اعمال بر روی مسائل بهینه سازی با متغیرهای گسسته را نیز دارد [۱۲].

با توجه به تحقیقات انجام شده، تنها پژوهش در مورد مسئله‌ی موازنه‌ی زمان-هزینه گسسته در شرایط عدم قطعیت با استفاده از بهینه سازی استوار، توسط هازیر و همکاران انجام شده است. هازیر و همکاران با در نظر گرفتن مدل ریاضی کلاسیک DTCTP_d از روش بهینه سازی استوار برای ارائه مدلی برای مسئله‌ی موازنه‌ی زمان-هزینه ی گسسته استفاده کردند. آنها ۳ مدل استوار با توجه به روش بهینه سازی استوار ارائه شده توسط برتسیمس و سیم ارائه نمودند، که برای حل مدل اول از الگوریتم دقیق تجزیه و برای مدل‌های بعدی از الگوریتم تقریبی جستجوی ممنوعه استفاده نمودند [۱۵].

مدل‌های ارائه شده دارای مشکلاتی درباره‌ی مفهوم مصرف زمان شناوری برای فعالیتهای غیر بحرانی هستند که منجر به بدینانه یا غیرواقعی شدن نتایج حاصل از آنها می‌شود. قابلیت مصرف شناوری برای جبران خرابی‌ها در فعالیتهای غیر بحرانی، قابلیت کلیدی است که با در نظر گرفتن آن می‌توان از انحرافات هزینه جلوگیری نمود.

در این پژوهش مدل نوین کامل تری که مکمل مدل‌های قبلی می‌باشد و در ضمن معایب مدل‌های قبل را پوشش می‌دهد برای مسئله موازنه زمان-هزینه گسسته با زمان اتمام مورد نظر (DTCTP_d) با استفاده از روش بهینه سازی استوار ارائه می‌گردد. همچنین از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل پیشنهادی استفاده می‌گردد.

در ادامه این مقاله در بخش ۲ روش بهینه سازی استوار مورد استفاده در این پژوهش به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۳ به بررسی مدل‌های استوار ارائه شده برای مسئله‌ی موازنه‌ی زمان-هزینه گسسته می‌پردازیم. مدل نوین پیشنهادی در بخش ۴ ارائه شده و روش حل آن با استفاده از الگوریتم ژنتیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۵ نتایج آزمایشاتی حاصل از

$i=1,2,\dots,m$ میزان محافظه کاری محدودیتها را کنترل می‌کند. Γ_i در بازه‌ی $[0, |J_i|]$ مقدار می‌گیرد که در آن $\hat{a}_{ij} = \{j \mid \text{زامی بر صحیح بودن مقدار } \Gamma_i \text{ وجود ندارد و می‌تواند مقادیر صحیح و یا غیر صحیح اختیار کند. مجموعه } \Gamma_i \text{ معرف عناصری از سطر } i \text{ ام ماتریس } A \text{ می‌باشد که دارای انحراف از مقدار اسمی میانگین می‌باشد}$

یا به عبارتی دارای عدم قطعیت هستند.

در صورتی که $\Gamma_i = 0$ باشد، تاثیر عدم قطعیت بر عناصر سطر i ماتریس A نادیده گرفته شده است و این خوشبینانه ترین برخورد با عدم قطعیت می‌باشد و در صورتی که $\Gamma_i = \Gamma_i^*$ تاثیر عدم قطعیت در بدیگرانه ترین حالت (مشابه روش سویستر) به طور کامل درنظر گرفته شده است. بنابراین با تغییر دادن Γ_i در بازه‌ی $[0, |J_i|]$ تنظیم استوار بودن در مقابل سطح محافظه کاری جواب تضمین می‌گردد. به نظر می‌رسد کمتر احتمال دارد که همه‌ی $a_{ij} \in J_i$ ها همزمان با هم تغییر کنند، برای کنترل میزان محافظه کاری هر محدودیت، حداقل $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ تا از عناصر غیرقطعی سطر i ماتریس A با بیشترین انحراف از مقدار میانگین اسمی شان مجاز به تغییر می‌باشند و یکی از عناصر غیرقطعی به صورت a_{ii} حداقل به مقدار $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ از مقدار \hat{a}_{ii} میانگین اسمی اش مجاز به تغییر می‌باشد، که در همه‌ی این حالات جواب باید موجه باقی بماند. پارامتر Γ_0 میزان استواری تابع هدف را کنترل می‌نماید که در آن عدم قطعیت بر عناصر هزینه (C) می‌باشد. Γ_0 در بازه‌ی $[0, |J_0|]$ مقدار می‌گیرد که در آن $\{j \mid d_j > 0\} \subset \{j \mid \Gamma_i = \Gamma_0\}$ همواره مقدار صحیح اختیار می‌کند [۱۲، ۱۶]. در نهایت همتای استوار مسئله‌ی (۱) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ & \text{st: } Ax \leq b \\ & \quad l \leq x \leq u \\ & \quad x_i \in Z \\ & \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (1)$$

۲ مدل برای عدم قطعیت داده‌ها در نظر گرفته می‌شود:

۱. عدم قطعیت روی ماتریس A : اگر $\{1,2,\dots,n\}$ باشد، هر عنصر ماتریس A به عنوان یک متغیر تصادفی محدود متقاضی مستقل به صورت (\tilde{a}_{ij}) که $\tilde{a}_{ij} \in j \in N$ و با یک توزیع ناشناخته مدل بندی می‌گردد. این متغیر در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ مقدار می‌گیرد. در این رابطه، a_{ij} مقدار تخمینی میانگین متغیر تصادفی متناظر با عنصر سطر i و ستون j ماتریس A می‌باشد و \hat{a}_{ij} بیانگر مقدار انحراف از مقدار اسمی a_{ij} می‌باشد.

۲. عدم قطعیت روی بردار هزینه C : هر $c_j \in N$ که در بازه‌ی $[c_j, c_j + d_j]$ مقدار می‌گیرد، که در آن d_j مقدار انحراف از ضریب هزینه اسمی c_j را نشان می‌دهد. [۱۲] هدف از استوار کردن مدل، حفظ بهینگی در شرایط عدم قطعیت می‌باشد. بسته به اینکه عدم قطعیت بر متغیرهای عناصر A یا C وارد شود، فرم مدل مسئله MIP تغییر می‌کند. به منظور حفظ تعادل بین میزان استواری روش ارائه شده در مقابل سطح محافظه کاری راه حل، نیاز به یک پارامتر برای ایجاد این توازن داریم. به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ، مقدار عددی Γ_i که بیانگر پارامتری است که میزان محافظه کاری تابع هدف را کنترل می‌کند در حالیکه Γ_0 همتای استوار مسئله‌ی (۱) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } c'x + \max_{\{S_0 \mid S_0 \subseteq J_0, |S_0| \leq \Gamma_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} d_j |x_j| \right\} \\ & \text{subject to } \sum_j a_{ij} x_j + \max_{\{S_i \cup \{t_i\} \mid S_i \subseteq J_i, |S_i| \leq \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} |x_{t_i}| \right\} \leq b_i, \quad \forall i \\ & \quad l \leq x \leq u \\ & \quad x_i \in Z, \quad \forall i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (2)$$

که متغیرهای اضافه شده در مدل استوار $(Z_i, Y_{ij}, P_{ij}, Z_0, Y_0)$ برای تنظیم استوار بودن جواب و اعمال سطوح حفاظت در مدل آورده شده اند و به عنوان رابط بین محدودیتها مقدار می‌گیرند.

برای بررسی نوع گسسته‌ی بهینه سازی استوار، مسئله‌ی بهینه سازی خطی (۲) به بهینه سازی گسسته توسعه می‌یابد، مدل زیر معادل مدل مسئله‌ی (۲) می‌باشد: لازم به ذکر است MIP

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && c'x + z_0\Gamma_0 + \sum_{j \in J_0} p_{0j} \\
 & \text{subject to} && \sum_j a_{ij}x_j + z_i\Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i \quad \forall i \\
 & && z_0 + p_{0j} \geq d_jy_j \quad \forall j \in J_0 \\
 & && z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij}y_j \quad \forall i \neq 0, j \in J_i \\
 & && p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in J_i \\
 & && y_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & && z_i \geq 0 \quad \forall i \\
 & && -y_j \leq x_j \leq y_j \quad \forall j \\
 & && l_j \leq x_j \leq u_j \quad \forall j \\
 & && x_i \in \mathcal{Z} \quad i = 1, \dots, k.
 \end{aligned} \tag{۳}$$

مجموعه‌ی یالها می‌باشد، در نظر می‌گیریم. N بیانگر n فعالیت شبکه و 2 گره مجازی $0, n+1$ است، که بیانگر گره آغازین و پایانی شبکه می‌باشد و $A \subseteq N \times N$ نشان دهنده‌ی الیت بندي محدودیت‌های بین فعالیت‌ها می‌باشد.

مجموعه‌ی حالات انجام فعالیت \mathcal{J} را نیز با $\{\cdot\}_j$ $M = \{1, 2, \dots, M\}$ نشان می‌دهیم که در آن $|M|$ بیانگر تعداد اعضای مجموعه \mathcal{J} است یا به عبارتی تعداد مد‌های هر فعالیت \mathcal{J} می‌باشد. هر مد $m \in M$ بیانگر زمان پردازش مخصوص آن فعالیت (p_{jm}) و هزینه مخصوص آن فعالیت (c_{jm}) می‌باشد. در مدل فوق C_j متغیر تصمیم‌گیری غیر صفر و پیوسته‌ای است که زمان اتمام فعالیت \mathcal{J} را نشان می‌دهد.

متغیر تصمیم‌گیری باینری X_{jm} بیانگر تخصیص مد j به فعالیت \mathcal{J} می‌باشد.تابع هدف بعد از تخصیص مد‌ها به فعالیت‌ها و شناسایی هزینه‌های کدام و با توجه به مسیر بحرانی و بهترین زمان انجام پروژه در پی حداقل کردن هزینه کل پروژه می‌باشد. محدودیت اول بیانگر تخصیص یک مد یکتا به ازای هر فعالیت i , i باشد. با توجه به محدودیت دوم به ازای هر دو فعالیت j , i , که به هم مرتبط‌اند، ترتیب و اولویت بندی محدودیت‌ها نباید نقض گردد و در انتها طول زمان اتمام پروژه در کل باید از زمان مورد نظر δ کوچکتر یا مساوی باشد [۱].

در بسیاری از پروژه‌های واقعی یک جریمه‌ی دیرکرد و یا یک هزینه‌ی فرصت از دست رفته‌ای، به ازای هر یک واحد زمانی اضافی که پروژه تاخیر می‌کند، تحمیل می‌گردد. زمانیکه در روند اصلی برنامه و پروژه انحرافات و یا خطاهایی مشاهده شود و تشخیص داده شود که زمان تکمیل به موقع این فعالیت‌ها را تهدید می‌کند، مدیران پروژه اغلب منابع بیشتری را به این فعالیت‌ها تخصیص می‌دهند مثلاً کارگران بیشتر و یا ماشین آلات اضافه تر تا این انحرافات را جبران نمایند. این امور غیر قابل پیش‌بینی، نوساناتی را در مقدار منابع تخصیص داده شده به هر

با توجه به اینکه مسئله‌ی اصلی (۱) شامل n متغیر و $2n+m+l$ محدودیت می‌باشد، همتای استوار آن (مسئله (۳)) شامل $2n+m+l$ متغیر و l تعداد ضرایب غیر قطعی می‌باشد. الگوریتم پیشنهادی برتسیمس و سیم دارای مزایای بسیاری از جمله خطی بودن مدل پایدار، امکان تنظیم سطوح حفاظت با توجه به میزان عدم قطعیت می‌باشد. تصمیم‌گیر قادر است با توجه به حساسیت مساله و میزان عدم قطعیت، به گونه‌ای سطوح حفاظت را تنظیم کند که به جواب موجه پایدار مناسب دست پیدا کند [۱۲].

۳. مسئله استوار موازنه زمان–هزینه گسسته با زمان اتمام مورد نظر (DTCTP-d)

با توجه به تعریف مسئله موازنه زمان–هزینه و انواع آن، مدل MIP مسئله DTCTP-d به صورت ذیل می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} && \sum_{j=1}^n \sum_{m \in M_j} c_{jm}x_{jm} \\
 & \text{Subject to} && \sum_{m \in M_j} x_{jm} = 1, \quad j = 1, \dots, n \\
 & && C_j - C_i - \sum_{m \in M_j} p_{jm}x_{jm} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \\
 & && C_{n+1} \leq \delta \\
 & && C_j \geq 0 \quad \forall j \in N \\
 & && x_{jm} \in \{0, 1\} \quad \forall m \in M_j, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{۴}$$

در این مدل یک پروژه با مجموعه‌ی از n فعالیت در یک گراف $G=(N,A)$ شبکه گرهی که در آن N مجموعه‌ی گره‌ها و

مدل ۱

فرض می‌کنیم که حداقل $n \leq \gamma \leq 0$ تا فعالیت، مقدار هزینه ای برابر با حد بالای بازه شان ($\overline{C_{jm}}$) را می‌گیرند و بقیه ($n - \gamma$ فعالیت) مقدار اسمی هزینه شان (c_{jm}) را می‌گیرند. مقدار اسمی هزینه مناسب ترین و محتمل ترین مقدار هزینه ای است که مدیر پروژه به هر فعالیت تخصیص می‌دهد. مقدار اسمی هر فعالیت ما بین حد بالا و پایین هزینه هر فعالیت در هر مرحله است. حداقل انحراف از هزینه ای فعالیت j را d_{jm} می‌نامیم که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$d_{jm} = \text{Max} \left\{ \overline{C_{jm}} - c_{jm}, c_{jm} - \underline{C_{jm}} \right\}$$

بنابراین d_{jm} حداقل میزان انحراف از هزینه ای اسمی فعالیت j است که در طی مراحل برنامه‌ریزی می‌توان برای جبران خرابی‌های پیش آمده در روند پروژه در نظر گرفت. در نهایت با این تعاریف، ساده ترین مدل غیر خطی استوار برای مدل MIP مسئله (۴) به صورت زیر تحت عنوان مدل (۱) ارائه می‌گردد:

$$\text{Min} \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{m \in M_j} c_{jm} x_{jm} + \text{Max}_{S \subset N, |S| \leq \gamma} \left\{ \sum_{j \in S} \sum_{m \in M_j} d_{jm} x_{jm} \right\} \right\} \quad (5)$$

در این مدل S یک زیر مجموعه از N می‌باشد ($S \subseteq N$) به طوریکه فعالیت‌های درون مجموعه S مقدار هزینه برابر با حد بالای هزینه شان را دارند و اینکه حداقل تعداد اعضای این مجموعه γ می‌باشد ($\gamma \leq |S|$). γ نشان دهنده‌ی سطح بدینی می‌باشد. مسئله (۵) را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$f(\gamma) = \text{Min} \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{m \in M_j} c_{jm} x_{jm} + \text{Max} \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{m \in M_j} d_{jm} x_{jm} u_j : \sum_{j=1}^n u_j \leq \gamma, u \in B^n \right\} ; x \in X^D \right\} \quad (6)$$

مدل ۲

در مدل (۱) فرض می‌گردد که احتمال انحراف از هزینه ای اسمی همه‌ی فعالیت‌ها برابر است و γ تا از این n تا فعالیت را فقط با توجه به حداقل انحراف از مقدار اسمی هزینه انتخاب می‌گردد. اما در دنیای واقعی پروژه‌ها فعالیت‌های بحرانی در شبکه پروژه بسیار مهم و تاثیر گزارند. در پروژه‌ها زمان و هزینه‌ی انجام فعالیت‌ها به هم وابسته و برهم موثرند و همچنین هر دو به مقدار

فعالیت ایجاد می‌کنند و در نهایت منجر به غیر قطعی شدن هزینه‌ی فعالیت‌ها در روند پروژه می‌گردند. علاوه بر این نوسان در نرخ مبادلات و قیمت عوامل و ... بر غیر قطعی بودن هزینه تاثیر گزارند. از این رو در این پژوهش عدم قطعیت هزینه به صورت بازه ای در نظر گرفته می‌شود. در واقع به ازای هر مرحله ای فعالیت یک مقدار ثابت طول زمان فعالیت (p_{jm}) و یک بازه ای مقادیر ممکن هزینه فعالیت (c_{jm}) به صورت زیر داریم.

$$[c_{jm}, \overline{c_{jm}}] \quad c_{jm} \leq \underline{c_{jm}} \leq \overline{c_{jm}}$$

بنابراین، با در نظر گرفتن عدم قطعیت بازه ای برای هزینه در مسئله‌ی DTCTP-d، طبق روش (B&S) تنها یک زیر مجموعه ای از پارامترهای غیر قطعی اجازه ای انحراف از مقدار تخمینی شان را دارد، به عبارت دیگر تنها γ تا از پارامترهای هزینه ای هر فعالیت از n تا فعالیت رفتار تصادفی دارند.

اگر $\gamma = 0$ باشد تاثیر انحراف هزینه‌ها رد شده و مسئله با ارزش هزینه‌ی اسمی تعیین می‌شود و این خوبی‌بینانه ترین برخورد با عدم قطعیت است ولی اگر $\gamma = n$ باشد بیشترین انحراف هزینه در نظر گرفته می‌شود و این بدینانه ترین برخورد با عدم قطعیت هزینه‌ها می‌باشد.

با توجه به این مطالب می‌توان γ را به عنوان پارامتری در نظر گرفت که سطح بدینی تصمیم‌گیرنده را نسبت به پارامتر غیر قطعی منعکس می‌کند. [۱۵]. در ادامه مدل‌های استوار ارائه شده توسط هازیر و همکاران برای مسئله DTCTP-d با استفاده از رویکرد (B&S) را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم و پس از بررسی ۳ مدل ارائه شده و مشاهده‌ی مزایا و معایب هر یک از آنها، به منظور فائق آمدن بر مشکلات مدل‌های قبلی ارائه شده، مدل استوار نوینی برای این مسئله ارائه می‌دهیم.

در این مدل بندی X^D نشان دهنده‌ی فضای امکان مسئله DTCTP-d می‌باشد که با محدودیت‌هاییش بیان می‌گردد. Max سازی داخلی مسئله (۶) بیانگر اعضای مجموعه S می‌باشد. مجموعه فعالیتهایی که دچار انحراف از هزینه ای اسمی خود می‌شوند، توسط بردار دودویی n بعدی z_j تعیین می‌شوند. B^n نشان دهنده‌ی فضای دودویی n بعدی می‌باشد. در مسئله (۶)، $u_j = 1$ اگر و تنها اگر فعالیت متناظرش به اندازه‌ی d_{jm} از هزینه‌ی اسمی اش انحراف داشته باشد [۱۵].

با توجه به این توضیحات از نسبت Slack/Duration برای ارزیابی بحرانی بودن فعالیت‌ها استفاده می‌کنیم. فعالیت‌های که مقدار شناوری‌شان کمتر از ۱۰۰% طول مدت فعالیت‌شان می‌باشند را به عنوان فعالیت‌های بحرانی بالقوه تعریف می‌کنیم:

$$CR = \{j = 1, 2, \dots, n : \frac{TS_j}{P_j} \leq \varepsilon\}$$

در رابطه‌ی فوق j و P_j به ترتیب بیانگر شناوری کل و طول مدت فعالیت j می‌باشند. ε آستانه‌ی طول مدت شناوری^۱ (SDT) می‌باشد. در این پژوهش به پارامتر SDT مقدار ۰.۲۵٪ می‌باشد. در تخصیص داده شده، از این رو $\varepsilon = 0.25\%$ می‌باشد. با این تعریف در واقع تعداد اعضای مجموعه‌ی فعالیت‌های بحرانی بیشتر می‌گردد [۱۵].

مدل (۱) به طور غیر واقعی بدینانه است، به طوریکه در آن زمان شناوری فعالیت‌ها نادیده گرفته شده است و بنابراین ممکن است حداکثر هزینه یا به عبارتی هزینه‌های بدترین حالت به فعالیت‌هایی تخصیص یابند که شناوری فراوانی دارند و اصولاً نیازی به تخصیص هزینه و منابع ندارند و با توجه به زمان شناوری شان فعالیت‌های انعطاف پذیری هستند. برای برطرف کردن این بدینی بیش از حد، فعالیت‌های با حداقل مقدار هزینه (γ) تا فعالیت غیر قطعی) از میان فعالیت‌های بحرانی انتخاب می‌گردند. در مدل (۱) تنها پارامتر γ کنترل کننده‌ی سطح بدینی مدل بود اما در مدل (۲) مجموعه‌ی فعالیت‌های بحرانی و γ کنترل کننده‌ی سطح بدینی می‌باشد. مدل (۲) بر مبنای مجموعه‌ی فعالیت‌های بحرانی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$f(\gamma_{CR}) = \min \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{m \in m_j} C_{jm} x_{jm} + \max \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{m \in m_j} d_{jm} x_{jm} u_j : \sum_{j \in CR} u_j \leq \gamma, u \in B^n \right\} : x \in X^D \right\} \quad (7)$$

اگر سناریوی بدترین حالت را در نظر بگیریم، فعالیت‌های با مقدار انحراف زیادتر در محاسبه‌ی حداقل انحراف در ترکیب حالات داده شده، اولویت دارند [۱۵].

- .۱
- .۲
- .۳

تخصیص منابع نیز وابسته‌اند. فعالیت‌هایی که شناوری‌های بزرگی دارند (فعالیت‌های غیر بحرانی) در تخصیص منابع انعطاف پذیری ایجاد می‌کنند، از این رو داشتن تأخیر در زمان شروع فعالیت‌های غیر بحرانی و یا افزایش دادن زمان انجام آنها با کاستن مقدار تخصیص منابع ممکن می‌باشد.

به عبارت دیگر، فعالیت‌های غیر بحرانی با تأخیر موجه در روند اجرا، نیاز به تخصیص هزینه‌های اضافی ندارند و خرایی‌های به وجود آمده در روند اجرا را با مصرف زمان شناوری شان جبران می‌کنند. به علت این انعطاف پذیری این فعالیت‌ها برای کسب اهداف هزینه‌ای ریسک کمتری نسبت به فعالیت‌های بحرانی دارند. در مورد شکست ها یا خرایی‌ها معمولاً مدیران، منابع بیشتری را به فعالیت‌های بحرانی تخصیص می‌دهند و این هزینه‌ی زیادی را تحمیل می‌کند.

یک معیار مرسوم برای تعیین فعالیت‌های بحرانی شناوری کل می‌باشد و آن مقدار زمانی است که زمان تکمیل فعالیت می‌تواند از زودترین زمان تکمیلش تجاوز کند به طوریکه تأخیری در زمان تکمیل کل پروژه ایجاد نکند. این یک معیار غیر حساس به کارایی زمان بندی با توجه به زمان تأخیر فعالیت‌ها می‌باشد. در کل می‌توان بیان کرد که فعالیت‌های بدون زمان شناوری فعالیت‌های بحرانی می‌باشند.

در پروژه‌های واقعی ارزیابی شناوری فعالیت‌ها با توجه به طول مدت فعالیت‌ها، بسیار حساس و ضروری است. در واقع افزایش نسبت شناوری به طول زمان انجام فعالیت (Slack/Activity Time) منجر به افزایش احتمال جبران کردن تأخیر می‌گردد. علت این است که، اگر طول مدت فعالیت افزایش یابد، احتمال مشاهده شدن تعداد زیادی از وقفه‌ها در حالیکه فعالیت در حال اجرای افزایش می‌یابد.

۳ مدل

در این مدل مجموعه‌ی انحرافات ممکن محدود به مجموعه‌ی فعالیت‌های بحرانی نیست، بلکه فعالیت‌های بحرانی بر فعالیت‌های غیر بحرانی در انحرافات هزینه‌ای مقدم هستند. در این مدل، γ تا فعالیت که مقدار هزینه برابر با حد بالای هزینه شان را دارند، ابتدا از مجموعه‌ی فعالیت‌های بحرانی انتخاب می‌گردند، اما اگر تعداد اعضای مجموعه‌ی فعالیت‌های بحرانی کمتر از γ باشد واحد های باقیمانده از مجموعه‌ی فعالیت‌های غیر بحرانی انتخاب می‌شوند.

^۱Slack Duration Threshold

قابلیت مصرف شناوری برای جبران خرابی‌ها در فعالیتهای غیر بحرانی، قابلیت کلیدی است که با در نظر گرفتن آن می‌توان از انحرافات هزینه جلوگیری نمود. با توجه به مفهوم شناوری کل که در این مدلها استفاده شده است، با مصرف شناوری در یک فعالیت غیر بحرانی، میزان زمان شناوری دیگر فعالیتهای مابعد آن در پروژه کاهش می‌یابد و حتی ممکن است به دلیل کاهش مقدار زمان شناوری فعالیتهای مابعد، یک فعالیت غیر بحرانی به فعالیت بحرانی تبدیل شود.

این مفهوم در مدل (۲) ارائه شده توسط هازیر و همکاران نادیده گرفته شده است و تمامی فعالیتهای غیر بحرانی پروژه با مصرف زمان شناوری خود، خرابی پیش آمده را جبران می‌نمایند.

- .۱
- .۲
- .۳
- .۴

۱-۴. مدل نوین پیشنهادی

در این بخش مدل نوین برای برطرف کردن مشکلات مدل‌های قبلی با توجه دقیق تر به مسئله‌ی مصرف زمان شناوری ارائه می‌گردد. هدف این مدل ارائه‌ی یک مدل استوار واقع بینانه برای مسئله‌ی DTCTP-d با در نظر گرفتن مفاهیم اساسی کنترل پروژه می‌باشد.

این مدل نیز مشابه مدل‌های قبلی به فعالیتهای بحرانی اولویت بیشتری برای انتخاب می‌دهد. در شرایطی که تعداد فعالیتهای بحرانی بزرگتر یا مساوی با تعداد فعالیتهای انتخابی (۱) باشد، تمام فعالیتها از بین فعالیتهای بحرانی انتخاب شده و مشابه مدل‌های قبلی، با توجه به نداشتن زمان شناوری، حداکثر هزینه‌ی ممکن برای جبران وقفه به آنها تخصیص داده می‌شود. در این حالت اولویت انتخاب با فعالیتی است که مقدار انحراف از هزینه اسمی اش بزرگتر باشد.

در شرایطی که تعداد فعالیتهای بحرانی کوچکتر از تعداد فعالیتهای انتخابی (۱) باشد، پس از انتخاب فعالیتهای بحرانی، مابقی انتخابها از میان فعالیتهای غیربحرانی انجام می‌شود. در این مدل استراتژی برخورد با فعالیتهای غیر بحرانی، مصرف زمان شناوری می‌باشد. نوآوری‌های اصلی در این پژوهش نحوی برخورد با زمان شناوری فعالیتهای غیربحرانی در شرایط انتخاب می‌باشد. مدل MIP نوین پیشنهادی به صورت زیر می‌باشد:

۱-۳. نتیجه گیری مدل‌های ارائه شده

در بخش‌های قبلی ۳ مدل ارائه شده توسط هازیر و همکاران برای مسئله‌ی DTCTP-d به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت. مدل (۱) بدون در نظر گرفتن اولویت فعالیتهای بحرانی نسبت به غیربحرانی و تنها با توجه به حداکثر انحراف هزینه به عنوان اولویت انتخاب فعالیتها، به طور کاملاً بدینانه عمل کرده و نتایج آن غیرواقعی می‌باشد. در مدل (۲)، فعالیتهای غیر بحرانی عملاً در نظر گرفته نمی‌شوند و میزان انحراف از هزینه‌ی اسمی برای تمامی فعالیتهای غیر بحرانی همواره برابر با صفر است. در این مدل فرض بر این است که در صورتی که فعالیتهای غیر بحرانی دچار خرابی یا وقفه شوند، با تأخیر به ازای زمان شناوری شان بر خرابی‌ها فائق آمده و نیازی به تخصیص هزینه‌های اضافی وجود ندارد. این فرض عملاً در پروژه‌های واقعی، غیر واقع بینانه است چون با تأخیر فعالیتها و به عبارت دیگر مصرف زمان شناوری، امکان تغییر میزان شناوری فعالیتهای غیر بحرانی مابعد آن و بحرانی شدن فعالیتهای غیر بحرانی وجود دارد.

در مدل (۳)، مصرف زمان شناوری برای فعالیتهای غیر بحرانی در نظر گرفته نمی‌شود و خرابی پیش آمده برای این فعالیتها با در نظر گرفتن حداکثر انحراف از هزینه جبران می‌گردد. این فرض باعث می‌شود نتایج حاصل از این مدل بدینانه شود. در عمل در مورد برخی فعالیتها، می‌توان با مصرف شناوری از تحمیل هزینه‌ی اضافی در شرایط خرابی جلوگیری کرد.

قابلیت مصرف شناوری برای جبران خرابی‌ها در فعالیتهای غیر بحرانی، قابلیت کلیدی است که با در نظر گرفتن آن می‌توان از انحرافات هزینه جلوگیری نمود و در نهایت به تخمین استوار واقع بینانه و بهینه‌ای برای هزینه‌ی کل پروژه دست پیدا کرد. برای رفع مشکلات ذکر شده و نزدیک کردن هزینه‌های پروژه به واقعیت، مدل نوین برای مسئله‌ی DTCTP-d ارائه می‌نماییم. در بخش بعدی به معرفی مدل نوین و بیان جزئیات مربوط به آن می‌پردازیم.

۴. مدل نوین مسئله موازنۀ زمان-هزینه گستته

استوار و حل آن

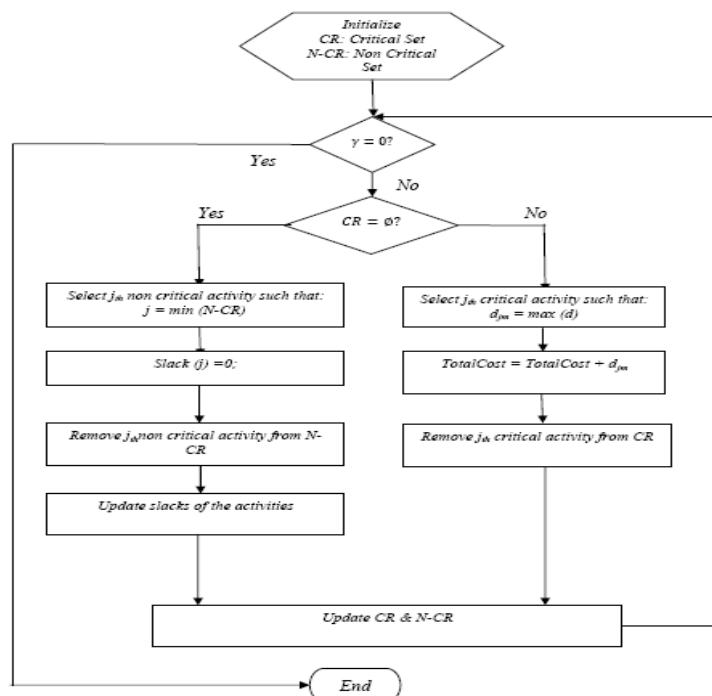
در این بخش درصد ارائه‌ی مدل استوار نوینی برای مسئله‌ی موازنۀ زمان-هزینه گستته هستیم که مشکلات مدل‌های ارائه شده‌ی قبلی را مرتفع نماید. مدل‌های ارائه شده‌ی قبلی دارای مشکلاتی درباره‌ی مفهوم مصرف زمان شناوری برای فعالیتهای غیر بحرانی هستند که منجر به بدینانه یا غیرواقعی شدن نتایج حاصل از آنها می‌شود.

غیربحرانی است که بیشترین تاثیر را بر روی فعالیتهای مابعد خود داشته باشد.

بنابراین فعالیتهای آغازین یا نزدیکتر به آغاز پروژه از اولویت بیشتری در بین فعالیتهای غیر بحرانی برخوردارند. این امر بدین علت است که مصرف شناوری در این فعالیتها، بر روی مقدار شناوری تعداد بیشتری از فعالیتهای پروژه تاثیر خواهد گذاشت.

با انتخاب اولین فعالیت غیر بحرانی، زمان شناوری آن فعالیت برای جبران خرابی پیش آمده مصرف شده و هزینه‌ی اضافی برای آن صرف نخواهد شد. سپس مقدار زمان شناوری تمامی فعالیتهای مابعد فعالیت انتخاب شده، می‌بایست مجددًا محاسبه شده و به روز رسانی شوند. لازم به تذکر است که مقدار زمان شناوری فعالیتهای غیر بحرانی مابعد فعالیت انتخابی، کاهش یافته‌ی یا بدون تغییر باقی خواهد ماند. براساس این تغییرات ممکن است تعدادی از فعالیتهای غیربحرانی، با کاهش زمان شناوری شان بحaranی گردد. در صورتی که فعالیتهای بحaranی در این مرحله به وجود آیند آنگاه مابقی انتخابها از میان این فعالیتهای بحaranی صورت می‌گیرد و اولویت در بین آنها با فعالیتی است که مقدار انحراف از هزینه‌ی اسمی اش بزرگتر باشد. در غیر اینصورت مراحل فوق مجددًا تکرار خواهد شد.

فلوچارت مربوط به الگوریتم حل این مدل به صورت زیر می‌باشد:



نمودار ۱. فرآیند حل مدل جدید

الگوریتم ژنتیک بدون شک مهمترین روش پردازش تکاملی بوده که در بسیاری از مسائل بهینه سازی کاربردهای فراوانی دارد. ویژگی‌های اصلی این الگوریتم سرعت همگرایی بالا و ارائه‌ی

$$f(\gamma) = \text{Min} \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{m \in m_j} C_{jm} x_{jm} + \sum_{i=1}^{\gamma} f_i \right\}: x \in X^D \quad (\text{A})$$

$$f = \begin{cases} \max_{j \in CR} (d_{jm}), & CR \neq \emptyset \\ 0, & CR = \emptyset \end{cases}$$

در مدل فوق، CR بیانگر مجموعه‌ی فعالیتهای بحaranی، X^D فضای امکان مسئله‌ی می‌باشد. در این مدل، f بیانگر تابعی است که حداقل انحراف از هزینه‌ی اسمی را با توجه به مقاومیت جدید مصرف شناوری و مجموعه‌ی فعالیتهای بحaranی مسئله به تعداد ۲۰ بار محاسبه می‌کند. در این مدل، در صورتی که فعالیتهای غیر بحaranی در اولویت انتخاب قرار گیرند، با صرف زمان شناوری شان خرابی‌های پیش آمده را جبران می‌نمایند. با توجه به تاثیرگذاری مصرف شناوری یک فعالیت بر دیگر فعالیتها، در صورتی که یک فعالیت غیر بحaranی از زمان شناوری خود استفاده نمود، می‌بایست زمان شناوری مابقی فعالیتها مجددًا محاسبه شده و به هنگام سازی گردد. چه بسا که با مصرف زمان شناوری یک فعالیت، زمان شناوری برخی از فعالیتهای مابعد آن صفر شده و آن فعالیتها بحaranی گردد. از آنجاییکه در مدل استوار به دنبال ایجاد بدترین شرایط برای مسئله هستیم، لذا اولویت انتخاب با فعالیت

۴-۴. حل مدل نوین با استفاده از الگوریتم ژنتیک

در این بخش با استفاده از الگوریتم ژنتیک مدل پیشنهادی برای مسئله‌ی موازنه‌ی زمان-هزینه گسسته استوار را حل می‌نماییم

می باشد. در پیاده سازی الگوریتم ابتدا مقادیر ورودی ها که شامل ماتریس AON بروزه و ماتریس حالت‌های زمان و هزینه‌ی فعالیتها می باشد، از ورودی باخوانی می شوند. سپس به بررسی تابع برازش تعریف شده برای الگوریتم ژنتیک می پردازم. در مراحل اجرای الگوریتم ژنتیک، کروموزومهای تصادفی به عنوان ورودی به این تابع برازش ارائه می شوند و مقادیر متناظر توسط این تابع به منظور امتیازدهی به کروموزومها، محاسبه می شوند. در صورت قابل قبول بودن کروموزوم، گراف شبکه به ازای این حالات تصادفی ایجاد شده و زمان شروع، زمان پایان، زمان شناوری، هزینه‌ی اسمی و انحراف از هزینه برای هر یک از فعالیتها محاسبه می شود. در مرحله‌ی بعد هزینه‌ی اسمی کل پروزه محاسبه می گردد. بعد از این مرحله با توجه به مفروضات مدل پیشنهادی، فعالیتها بحرانی می باشند مشخص شوند. در نهایت با توجه به فعالیتها بحرانی و غیر بحرانی، در هر مرحله از خوابای های مفروض، انحراف از هزینه یا زمان شناوری صرف می شود. در صورت صرف زمان شناوری، با توجه به مدل نوین پیشنهادی، در هر مرحله، زمان شناوری فعالیتها تغییر کرده و به روز رسانی می شوند.

۵. مطالعه موردی

به منظور بررسی مدل، الگوریتم حل و صحت نتایج آن، و همچنین مقایسه‌ی بین مدل‌های قبلی و مدل جدید پیشنهادی یک پروزه عمرانی با ۷ فعالیت انتخاب شده است. این مثال پیشتر توسط Feng و همکاران در سال ۲۰۰۰ و همچنین Kuang و Xiong در سال ۲۰۰۸ و Zheng و همکاران در سال ۲۰۰۴ و Daisy و همکاران در سال ۲۰۰۴ با روش‌های دیگر به عنوان یک مسئله موازنه زمان - هزینه گستته حل شده است [۱۷]. جدول ۱ احالت‌های فعالیت موجود و پیش نیازها و مدت زمان‌ها و هزینه‌های متناظر شبکه را نشان می دهد.

جدول ۱. اطلاعات پروزه عمرانی

هزینه هسته‌ای (هزار دلار)	زمان (روز)	گزینه‌ها	پیش‌بازارها	شماره تعابرات	نوع فعالیت
۲۴	۱۵	۱	-	-	تغییرات کارگاه
۱۸	۲۰	۲	-	-	
۱۲	۲۴	۳	-	-	
۳	۱۰	۱	-	-	
۲۶	۱۲	۲	-	-	
۱۸	۱۵	۳	-	-	
۱۵	۱۵	۴	-	-	
۱	۲۰	۵	-	-	
۹۵	۱۰	۱	-	-	
۴	۱۰	۲	-	-	
۲۷	۱۰	۳	-	-	
۷۰	۱۵	۱	-	-	
۷۰	۱۵	۲	-	-	
۳۰	۱۵	۳	-	-	
۴۰	۱۰	۱	-	-	
۱۷۵	۱۰	۲	-	-	
۱۰	۱۰	۳	-	-	
۱۰	۱۰	۴	-	-	
۴۰	۱۰	۱	-	-	
۲۲	۱۰	۲	-	-	
۱۸	۱۰	۳	-	-	
۳۰	۱۰	۱	-	-	
۴۰	۱۰	۲	-	-	
۲۲	۱۰	۳	-	-	
۱۰	۱۰	۴	-	-	
۱۰	۱۰	۵	-	-	
۴۰	۱۰	۱	-	-	
۲۲	۱۰	۲	-	-	
۱۸	۱۰	۳	-	-	
۳۰	۱۰	۱	-	-	
۴۰	۱۰	۲	-	-	
۲۲	۱۰	۳	-	-	
۱۰	۱۰	۴	-	-	
۱۰	۱۰	۵	-	-	
۴۰	۱۰	۱	-	-	
۲۲	۱۰	۲	-	-	
۱۸	۱۰	۳	-	-	
۳۰	۱۰	۱	-	-	
۴۰	۱۰	۲	-	-	
۲۲	۱۰	۳	-	-	

جوابهای نزدیک به بهینه می باشد. به همین دلیل از این الگوریتم برای حل مدل پیشنهادی بهره می گیریم. استفاده از الگوریتم ژنتیک امکان دستیابی به جوابهای بهینه برای پروزه های با ابعاد بسیار بزرگ و پیچیده در زمانی بسیار کمتر از دیگر الگوریتم های فرا ابتکاری را فراهم می نماید. در اینجا ما از الگوریتم ژنتیک برای یافتن جایگشتی از مدهای فعالیتها که منجر به کمترین هزینه می شود، استفاده می کنیم. برای پیاده سازی الگوریتم ژنتیک در حل مسئله بهینه سازی به طور کلی می بایست مراحل زیر را طی کنیم:

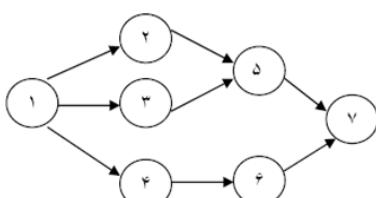
- ۱) تعیین تابع هدف
- ۲) تعیین مکانیسم کدگذاری جوابهای مسئله
- ۳) تعیین مقدار اولیه برای پارامترهای الگوریتم مانند جمعیت اولیه و شرط خاتمه
- ۴) ارزیابی قابلیت‌های جوابهای موجود در جمعیت
- ۵) انتخاب جوابهای بهینه برای تولید نسل بعد
- ۶) ترکیب
- ۷) جهش
- ۸) تولید جمعیت جدید
- ۹) بررسی شرط خاتمه و در صورت براورده نشدن آن تکرار مراحل ۸-۴

در اینجا استفاده از الگوریتم ژنتیک، به منظور یافتن ترکیبی از مدهای انتخابی برای فعالیتها می باشد که در صورت استفاده از مدل استوار ارائه شده و با توجه به قیود مسئله، منجر به کمترین هزینه می ممکن برای اجرای پروزه گردد. بنابراین مقدار تابع هدف بر طبق مدل نوین پیشنهادی در این پژوهش، مجموع هزینه های تمامی فعالیتها پروزه و بیشینه هزینه های انحرافات تحمیلی به منظور استوار کردن مدل می باشد. در الگوریتم ژنتیک تعیین نمایش هر کروموزوم از n ژن تشکیل شده است که n بیانگر تعداد فعالیتها پروزه می باشد. در هر کروموزوم مدهای انتخاب شده برای هر یک از فعالیت های پروزه به ترتیب در هر ژن قرار می گیرند. در واقع هر حالت برای هر فعالیت نماینده یک زمان و یک بازه هزینه برای فعالیت مورد نظر می باشد. به طور مثال در صورتی که شبکه پروزه دارای 4 فعالیت بوده و هر یک از فعالیتها ۲ مد داشته باشند، آنگاه شکل کروموزوم به صورت شکل بردار ۱ می باشد:

۲	۲	۱	۲
۱	۲	۳	۴

شکل ۱. قالب کروموزوم

در شکل ۱ اعداد سطر اول بیانگر مدهای تصادفی انتخاب شده برای فعالیتها می باشد و سطر دوم بیانگر ترتیب فعالیتها پروزه



شکل ۲. نمودار پروژه عمرانی

نتایج حاصل از حل مدل نوین و دو مدل ارائه شده توسط هازیر برای مقایسه در جدول ۳ آمده است. این آزمایشات به ازای مقادیر مختلف λ و δ که به ترتیب بیانگر سطح بدینی و زمان مورد نظر اتمام پروژه می‌باشند، انجام شده است و هزینه پروژه به ازای پارامترهای ذکر شده محاسبه شده است.

در جدول ۳ ستون متناظر با $\lambda = 0$ بیانگر عدم ایجاد وقفه یا انحراف در روند اجرای پروژه بوده که این خوبشینانه ترین حالت می‌باشد. در نتیجه در این حالت عملاً مقادیر هزینه محاسبه شده در هر ۳ مدل ثابت می‌باشد. همچنین ستون متناظر با $\lambda = 7$ بیانگر حداکثر وقفه یا انحراف در روند اجرای پروژه بوده که در آن تمامی فعالیتهای پروژه دچار انحراف شده‌اند.

این حالت بدینانه ترین حالت می‌باشد. با بررسی جدول در هر ۳ مدل، به ازای هر مقدار λ ، با افزایش مقدار زمان مورد نظر پروژه، مشاهده می‌کنیم که مقادیر هزینه محاسبه شده کاهش می‌یابند. در واقع هر چه زمان مورد نیاز اجرای پروژه فشرده‌تر باشد، هزینه بیشتری در روند اجرای پروژه تحمیل می‌گردد.

هزینه غیر مستقیم برای همه فعالیت‌ها برابر با ۰ دلار در نظر گرفته شده است. با توجه به فرض عدم قطعیت، هزینه‌ی فعالیتها در این پژوهش به صورت بازه‌ای در نظر گرفته شده است. لذا برای مثال فوق، می‌بایست دو کران بالا و پایین به ازای بازه‌ی هزینه‌ی هر مدل در نظر گرفته شود. این دو مقدار را طوری تعیین می‌کنیم که میانگین این دو مقدار برابر با هزینه‌ی مستقیم داده شده در مثال فوق گردد تا خللی در مفروضات مسئله ایجاد نکند. به عبارت دیگر هزینه‌ی مستقیم داده شده در مثال به عنوان هزینه‌ی اسمی هر مدل در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۲ مقادیر بازه‌ای هزینه محاسبه شده است. نمودار فعالیت‌های پروژه عمرانی ۷ فعالیت‌هه به صورت شکل ۲ می‌باشد.

جدول ۲. مقادیر بازه‌ای هزینه محاسبه شده

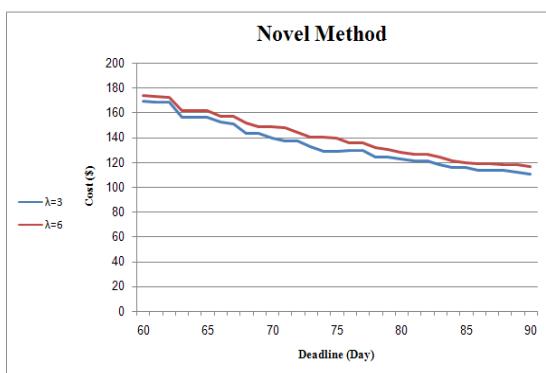
شماره فعالیت	حالات	کران بالا هزینه	میانگین هزینه	کران پایین هزینه
۱	۱	۳۸	۲۷	۲۳
	۲	۲۵	۱۸	۱۱
	۳	۱۶	۱۳	۸
	۴	۴	۳	۲
	۵	۲۸	۲۴	۲۰
	۶	۲۴	۱۸	۱۳
	۷	۲۴	۱۸	۱۳
۲	۱	۲	۱	۰
	۲	۵	۴	۳
	۳	۵	۴	۳
	۴	۵	۴	۳
	۵	۵	۴	۳
	۶	۵	۴	۳
	۷	۵	۴	۳
۳	۱	۱	۰	۰
	۲	۱	۰	۰
	۳	۱	۰	۰
	۴	۱	۰	۰
	۵	۱	۰	۰
	۶	۱	۰	۰
	۷	۱	۰	۰
۴	۱	۱	۰	۰
	۲	۱	۰	۰
	۳	۱	۰	۰
	۴	۱	۰	۰
	۵	۱	۰	۰
	۶	۱	۰	۰
	۷	۱	۰	۰
۵	۱	۱	۰	۰
	۲	۱	۰	۰
	۳	۱	۰	۰
	۴	۱	۰	۰
	۵	۱	۰	۰
	۶	۱	۰	۰
	۷	۱	۰	۰
۶	۱	۱	۰	۰
	۲	۱	۰	۰
	۳	۱	۰	۰
	۴	۱	۰	۰
	۵	۱	۰	۰
	۶	۱	۰	۰
	۷	۱	۰	۰
۷	۱	۱	۰	۰
	۲	۱	۰	۰
	۳	۱	۰	۰
	۴	۱	۰	۰
	۵	۱	۰	۰
	۶	۱	۰	۰
	۷	۱	۰	۰

جدول ۳. نتایج حل ۳ مدل

	$\lambda = 0$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$			$\lambda = 7$		
	$\delta = 65$	$\delta = 75$	$\delta = 85$	$\delta = 65$	$\delta = 75$	$\delta = 85$	$\delta = 65$	$\delta = 75$	$\delta = 85$	$\delta = 65$	$\delta = 75$	$\delta = 85$
مدل نوین	۱۳۵.۴	۱۱۳.۵	۱۰۱.۵	۱۵۶.۳	۱۴۸.۷	۱۱۶.۱	۱۶۰.۵	۱۳۸.۵	۱۱۶.۵	۱۶۲.۱	۱۴۰.۱	۱۲۳.۴
مدل ۲ Hazir	۱۳۵.۴	۱۱۳.۵	۱۰۱.۵	۱۵۴.۵	۱۲۶.۳	۱۱۰.۵	۱۵۴.۵	۱۲۶.۳	۱۱۰.۵	۱۵۴.۵	۱۲۶.۳	۱۱۰.۵
مدل ۳ Hazir	۱۳۵.۴	۱۱۳.۵	۱۰۱.۵	۱۵۶.۳	۱۲۳.۵	۱۱۴.۳	۱۵۹.۳	۱۳۷.۳	۱۱۹.۴	۱۶۲.۱	۱۴۰.۱	۱۲۳.۴

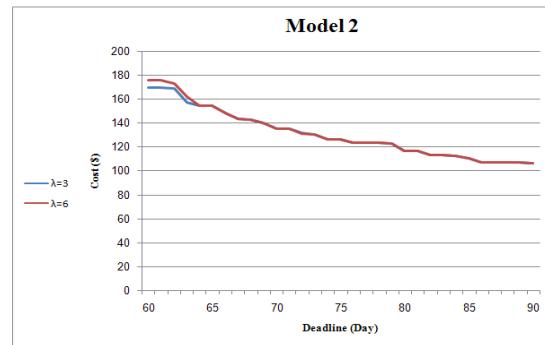
مفروضات مدل ۲ می‌باشد. شکل ۳ بیانگر رابطه‌ی زمان اتمام مورد نظر پروژه و هزینه‌ی بودست آمده با استفاده از مدل استوار ۲ به ازای $\lambda = 3, 6$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده شده می‌گردد، به ازای مقادیر مختلف λ و افزایش سطح بدینی عملاً نمودارها برهم منطبق شده و تغییری در هزینه‌ی محاسبه شده ایجاد نمی‌گردد. با توجه به جدول ۳، نتایج حاصل از حل مسئله با استفاده از مدل پیشنهادی و مدل ۳ به هم نزدیکتر بوده و واقعی تر هستند. در مدل ۳ هازیر مصرف زمان شناوری برای فعالیتهای

با توجه به جدول ۳، مشاهده می‌کنیم هزینه‌ی محاسبه شده با استفاده از مدل ۲، به ازای $\lambda = 3, 5, 7$ تغییر نمی‌کند. این امر بدین علت است که تعداد فعالیتهای بحرانی در این حالت کمتر یا مساوی با ۳ می‌باشد. بنابراین با افزایش سطح بدینی (به ازای $\lambda > 3$) و این فرض که تمامی فعالیتهای غیر بحرانی در زمان خرایی با مصرف زمان شناوری شان جبران وقفه می‌کنند و نیازی به تخصیص هزینه اضافی ندارند، هزینه‌ی محاسبه شده در این مدل تغییر نمی‌کند. این موضوع بیانگر غیرواقعی بودن



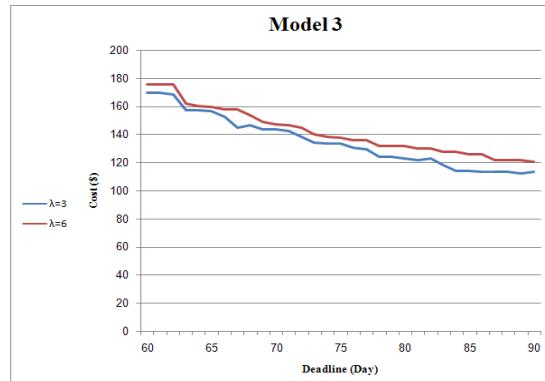
شکل ۵. نمودار زمان اتمام-هزینه در مدل نوین

غیر بحرانی در نظر گرفته نمی‌شود و خرابی پیش آمده برای این فعالیتها با در نظر گرفتن حداکثر انحراف از هزینه و در واقع با تخصیص هزینه اضافی جبران می‌گردد. در نتیجه هزینه‌های محاسبه شده در این مدل به صورت بدینانه ای بالاست.



شکل ۳. نمودار زمان اتمام-هزینه در مدل ۲

در کل مدل ۳ بدینانه تراز مدل پیشنهادی در این پژوهش عمل می‌کند که این مورد در جدول ۳ به ازای $\lambda = 3 = 75$ و $\lambda = 5 = 85$ مشخص است. در حالیکه در عمل در مورد برخی فعالیتها، می‌توان با مصرف شناوری از تحمیل هزینه اضافی در شرایط خرابی جلوگیری کرد. در واقع مدل نوین با توجه به مفهوم مصرف زمان شناوری برای جبران خرابی‌ها در فعالیتها غیر بحرانی، از افزایش بی‌مورد هزینه جلوگیری نموده و در نهایت تخمین استوار واقع بینانه و بهینه ای برای هزینه‌ی کل پروژه ارائه کرده است. شکل ۴ و ۵ بیانگر رابطه‌ی زمان اتمام مورد نظر پروژه و هزینه بدست آمده با استفاده از مدل استوار ۳ و مدل نوین پیشنهادی به ازای $\lambda = 3, 6 = 3, 6$ می‌باشند. نتایج حاصل از مدل نوین با توجه به مفاهیم اصولی و واقعی محیط پروژه در مسائل با تعداد فعالیت‌ها و تعداد مد‌های بیشتر کارانه و دقیق تر می‌باشد و در کل تفاوت عمدۀ‌ی این دو مدل در پروژه‌های پیچیده تر و با تعداد فعالیتها بیشتر، به طور واضح تری نمایان خواهد شد.



شکل ۴. نمودار زمان اتمام-هزینه در مدل ۳

با توجه به محیط‌های غیر قطعی پروژه‌ها لزوم توسعه‌ی مدل‌ها و الگوریتم‌هایی برای تولید زمان بندی استوار پروژه که حساسیت کمتری به خطاهای خرابی‌ها و وقایه‌ها در طی روند پروژه داشته باشد ضروری است. در این پژوهش با ارائه مدل بهینه‌سازی استوار برای مسئله‌ی موازنۀ زمان-هزینه گستته، سعی در به دست آوردن زمان بندی موجه و بهینه‌ای داریم که با تغییرات و عدم قطعیت‌های پیش روی محیط پروژه همواره استوار باشد و در عین حال کمترین هزینه را نیز در برگیرد. مدل‌های ارائه شده‌ی قبلی دارای مشکلاتی درباره‌ی مفهوم مصرف زمان شناوری برای فعالیتها غیر بحرانی هستند که منجر به بدینانه یا غیرواقعي شدن نتایج حاصل از آنها می‌شود. قابلیت مصرف شناوری برای جبران خرابی‌ها در فعالیتها غیر بحرانی، قابلیت کلیدی است که با در نظر گرفتن آن می‌شود. با بررسی دقیق مدل‌های ارائه شده، مدل نوینی با توجه دقیق تر به مسئله‌ی مصرف زمان شناوری و با استفاده از رویکرد (B&S) برای حل مسئله‌ی DTCTP-d به صورت استوار ارائه کردیم که کاستی‌های مدل‌های قبلی را پوشش می‌دهد. در نهایت با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مدل پیشنهادی برای مسئله‌ی موازنۀ زمان-هزینه گستته استوار را حل نمودیم.

با بررسی نتایج حاصل از آزمایشات در می‌باییم در مدل (۲)، فعالیتها غیر بحرانی عملاً در نظر گرفته نمی‌شوند و با افزایش سطح بدینانه در پروژه‌ها هزینه‌ی محاسبه شده تغییری نمی‌کنند و این بیانگر غیر واقعی بودن مدل می‌باشد.

در مدل (۳)، مصرف زمان شناوری برای فعالیتها غیر بحرانی در نظر گرفته نمی‌شود و خرابی‌ای پیش آمده برای این فعالیتها با در نظر گرفتن حداکثر انحراف از هزینه جبران می‌گردد، این امر موجب افزایش بدینانه هزینه‌ها نسبت به مدل پیشنهادی

- [8] Cohen, I., Golany, B., Shtub, A., "The Stochastic Time/Cost Trade-off Problem: a Robust Optimization Approach", Networks 49, 2007, 175–188.
- [9] Klerides, E., Hadjiconstantinou, E., "A Decomposition-Based Stochastic Programming Approach for the Project Scheduling Problem under Time/Cost Trade-off Settings and Uncertain Durations", Computers and Operations Research, 37 (12), 2010 , 2131–2140.
- [10] Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., Nemirovski, A., "Robust Optimization ", Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008.
- [11] Herroelen, W., Leus, R., "Project Scheduling Under Uncertainty—Survey and Research Potentials", European Journal of Operational Research 165, 2005, 289–306.
- [12] Bertsimas, D., Sim, M., "Robust Discrete Optimization and Network Flows", Mathematical Programming, 98, 2003, 49–71.
- [13] Soyster, A.L., "Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming", Operation Research, 21, 1973, 1154-1157.
- [14] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., "Robust Solutions to Uncertain Programs", Operations Research Letters, 25, 1999 , 1-13.
- [15] Hazir, O., Erdal, E., Yavuz, G., "Robust Optimization Models for the Discrete Time - Cost Trade-off Problem", International Journal of Production Economics , 130 , 2011, 87–95.
- [16] Bertsimas, D., Brown, D., Caramanis, C., " Theory and Applications of Robust Optimization ", 2007.
- [17] Xiong, Y., Kuang, Y., "Applying an Ant Colony Optimization Algorithm-Based Multi Objective Approach for Time-Cost Trade-Off ", Journal of Construction Engineering and Management, 134(2), 2008, 153-156.

می‌گردد. روش نوین پیشنهادی با توجه به مقایم ذکر شده، همواره جواب نزدیک به بهینه‌ی استوار و هزینه‌ی محاسبه شده ی معقول تری نسبت به مدل‌های قبلی ارائه می‌دهد. همچنین کارایی این روش از نظر هزینه‌ی پیاده سازی و اجرا نیز قابل قبول و مناسب است. با توجه به جدید بودن این موضوع و عدم انجام پژوهش‌های کافی در این زمینه، امکان انجام نوآوری و تحقیقات بیشتر در این زمینه وجود دارد. درنظر گرفتن انواع مختلف عدم قطعیت ، ارائه می‌نماید مدل استوار برای مسئله‌ی (DTCTP-b)، حل مسئله با الگوریتم‌های فرالبتکاری دیگر را می‌توان به عنوان راهکارهایی برای پژوهش‌های آتی در نظر گرفت.

مراجع

- [1] Hafizoğlu, A.B., "Discrete Time/Cost Trade-Off Problem In Project Scheduling", A Thesis Submitted To The Graduate School Of Natural And Applied Sciences Of Middle East Technical University, 2007.
- [2] De, .P.E., Dunne, J., Ghosh, J.B., Wells, C.E., "Complexity of the Discrete Time/Cost Trade off Problem for Project Networks" , Operations Research, 45, 1997, 302–306.
- [3] Demeulemeester, E., De Reyck, B., Fouert, B., Herroelen, W., Vanhoucke, M., "New Computational Results for the Discrete Time/Cost Trade-off Problem in Project Networks" , Journal of the Operational Research Society 49, 1998, 1153–1163.
- [4] Skutella, M., "Approximation Algorithms for the Discrete Time-Cost Trade-off Problem", Mathematics of Operations Research, 23, 1998, 195–203.
- [5] Akkan, C., Drexl, A., Kimms, A., "Network Decomposition-Based Benchmark Results for the Discrete Time-Cost Trade-off Problem ", European Journal of Operational Research, 165, 2005, 339–358.
- [6] Vanhoucke, M., Debels, D., "The Discrete Time/Cost Trade-off Problem Under Various Assumptions Exact and Heuristic Procedures ", Journal of Scheduling, 10, 2007, 311–326.
- [7] Hafizoglu, A.B., Azizoglu, M., "Linear Programming Based Approaches for the Discrete Time/Cost Trade-off Problem in Project Networks", Journal of the Operational Research Society 61 (4), 2010, 676–685.