International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2013)

August 2013, Volume 24, Number 2
pp. 203-214

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

Minimizing the Weighted Number of Tardy Jobs with Group Due Date Assignment and Capacity-Constrained Deliveries

M. Rasti-Barzoki & S. R. Hejazi *

Morteza Rasti-Barzoki, *Assistance professor of Industrial Eng., Department of Industrial and Systems Engineering, Isfahan University of Technology,*
Seyed Reza Hejazi, *Associate professor of Industrial Eng., Department of Industrial and Systems Engineering, Isfahan University of Technology,*

Keywords

Supply chain,
Due date assignment,
Scheduling and tardy job

ABSTRACT

In this paper, an integrated due date assignment, and delivery scheduling of order for multi customer for make to order production system in supply chain has been survered. One manufacture received n orders from K customers. The due date of orders for each customer is common and manufacture can assign the due dates with a related cost. Orders must be process by one machine and send to customers by vehicles sending several jobs with one vehicle lead to less transportation cost but may increase the number of tardy jobs. The objective is determining the due dates and production and delivery scheduling so that the related costs is minimized. We present an MINLP model for this problem and a heuristic algorithm for solving it. Computational test is performed for evaluation of these two methods. The obtained results show that the heuristic algorithm is efficient.

© 2013 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 24, No. 2, All Rights Reserved

* **Corresponding author. Seyed Reza Hejazi**
Email: *rehejazi@cc.iut.ac.ir*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــــریت تولیـــد

شمـــــاره ۲، جلـــد ۲۴، شهـــریور ۱۳۹۲
صفحـــــه ۲۱۴-۲۰۴

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

کمینه کردن مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری با درنظر گرفتن مجموع هزینه‌های تخصیص موعد تحویل گروهی و هزینه‌های ارسال

مرتضی راستی برزکی، سید رضا حجازی* و محمد مهدوی مزده

کلمات کلیدی

زنجیره تامین،
تخصیص موعد تحویل،
تخصیص منابع و زمان های پردازش
قابل کنترل،
زمانبندی،
کارهای دارای تاخیر

چکیده:

در این مقاله مساله یکپارچه تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع و زمانبندی تولید و ارسال سفارش‌ها در حالت تک مشتری در یک زنجیره تامین بررسی شده است. برای کل سفارشات یک موعد تحویل اولیه‌ای در نظر گرفته می شود که افزایش آن از طرف تولید کننده دارای هزینه می باشد. سفارشات لازم است توسط یک ماشین پردازش و در قالب دسته‌هایی توسط وسایلی با ظرفیت محدود به مشتری ارسال شود. زمان پردازش کارها با اختصاص منابع قابل کنترل است. هدف تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، تعیین توالی پردازش کارها و تعیین دسته‌بندی ارسال است به طوری که مجموع هزینه های تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری و هزینه‌های ارسال به طور همزمان کمینه شود. در این مقاله، یک روش برنامه ریزی پویای شبه چند جمله ای، یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح و یک الگوریتم تقریبی با زمان چندجمله‌ای کامل برای مساله مذکور ارایه شده است.

۱. مقدمه

مدیریت زنجیره تامین یکی از موضوعات بسیار مهمی است که هم از نظر تئوری و هم از جنبه کاربردی سال ها مورد توجه محققین قرار گرفته است و با توجه به گستردگی و تنوع موضوع هم اکنون نیز تحقیقات بسیاری را به خود اختصاص داده است. اما موضوع زمانبندی زنجیره تامین از موضوعات نسبتاً جدیدی است که اهم تحقیقات آن مربوط به سالهای بعد از سال ۲۰۰۰ میلادی می باشد. به طور خاص موضوع زمانبندی یکپارچه تولید و توزیع نیز یکی از موضوعات مهمی است که پس از ارایه مقاله هال و پاتس در سال ۲۰۰۳ [۱] تحقیقات زیادی را به خود اختصاص داده است. تولید و توزیع دو جز مهم یک زنجیره تامین را شامل می شوند؛ بنابراین هماهنگی برنامه ریزی تولید و ارسال یکی از مسائل مهم زمانبندی زنجیره تامین می‌باشد. مسائل کلاسیک زمانبندی به هماهنگی با واحد حمل و نقل و در نظر گرفتن هزینه‌های ارسال توجهی ندارند که در نظر گرفتن هزینه‌های ارسال در مسائل زمانبندی باعث توجه محققین به رویکرد نوین زمانبندی در زنجیره تامین شده است. مدل های یکپارچه زمانبندی تولید و توزیع با توجه به هزینه های تاخیر و هزینه های زیاد لجستیک بسیار حائز اهمیت می باشند. اسلوتنیک و سوبل اشاره کرده اند که هزینه های مرتبط با تاخیر در صنعت هوافضا می تواند تا نزدیک یک میلیون دلار در روز برای تامین کنندگان قطعات هواپیماسازی باشد [۲]. همچنین بررسی توماس و گریفین نشان داده است که بیش از ٪۱۱ تولید خالص ملی آمریکا صرف هزینه های حمل و نقل می شود و هزینه های لجستیک بیش از ٪۳۰ هزینه کالاهای فروخته شده را تشکیل می دهد [۳]. جهت بررسی مدل های یکپارچه تولید و توزیع که به اختصار IPODS[۲] نامیده می شود مطالعه مقاله مروری چن در سال ۲۰۱۰ [۴] پیشنهاد می شود. از طرف دیگر موضوع تخصیص موعد تحویل و زمانبندی تولید یکی از مسائل مهم تئوری و کاربردی می باشد که سالها مورد توجه محققین قرار گرفته و تاکنون تحقیقات بسیار زیادی در این زمینه انجام شده است. در مدل های کلاسیک

تاریخ وصول: ۹۰/۱۰/۱۳
تاریخ تصویب: ۹۰/۱۲/۸

مرتضی راستی برزکی، استادیار دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، rasti@cc.iut.ac.ir
*نویسنده مسئول مقاله: **دکتر سیدرضا حجازی**، دانشیار، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، rehejazi@cc.iut.ac.ir
محمد مهدوی مزده، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت، تهران ، mazdeh@iust.ac.ir

[2] *Integrated Production and Outbound Distribution Scheduling*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

زمانبندی، موعد تحویل سفارشات ثابت و مشخص (ورودی مساله) فرض می شوند. در یک مدل یکپارچه زنجیره تامین به منظور اجتناب از جریمه های دیرکرد، موعدهای تحویل می تواند بر اساس میزان توان دستیابی به موعدهای تحویل تخصیص داده شده در فرایند زمانبندی تعیین شود [۵].

امکان کنترل موعدهای تحویل می تواند عاملی اصلی در بهبود عملکرد سیستم باشد. البته افزایش موعد تحویل برای یک سفارش یا مجموعه ای از سفارشات همراه با هزینه می باشد که در ادبیات موضوع به هزینه تخصیص موعد تحویل[1] مشهور است. این هزینه برای مثال از تخفیف هایی که تامین کننده برای حفظ مشتری باید در نظر بگیرد ناشی می شود. از یک طرف کوچک بودن موعد تحویل ها موجب هزینه های مرتبط با دیرکرد می شود و از طرف دیگر تعیین دیرهنگام موعد تحویل منجر به هزینه های زیاد تخصیص موعد تحویل می شود؛ بنابراین تعیین بهینه موعد تحویل سفارشات می تواند از جمله تصمیمات مهم در زنجیره تامین باشد. برای تعیین موعد تحویل سفارشات رویکردهای متفاوتی در نظر گرفته می شود که مهمترین و پرکاربردترین آنها تخصیص موعد تحویل های مشترک (یکسان) می باشد که در ادبیات موضوع نیز به همین عنوان (تخصیص موعد تحویل مشترک[2]) مشهور شده است. موعد تحویل مشترک در مواردی نظیر تعدد مشتریان، تعدد دوره های زمانی برنامه ریزی و ... کاربرد دارد. بررسی ها نشان می دهد آخرین مقاله مروری در زمینه مدل های تخصیص موعد تحویل در سال ۲۰۰۲ انجام شده است [۶]. در ادامه به عنوان نمونه، به چند مورد از تحقیقات مرتبط با موضوع مقاله اشاره می شود:

اخیراً لی و همکارانش [۷] تخصیص موعد تحویل را در مسئله مجموع وزنی کل زودکردها و دیرکردها در حالت تک ماشین در حالت احتمالی بررسی نموده اند؛ البته آنها به موضوع ارسال توجهی نکرده اند و تابع هدف آنها شامل دو جز هزینه تخصیص موعد تحویل و مجموع وزنی زودکردها و دیرکردها می باشد. کولاماس در سال ۲۰۱۱ [۸] موضوع تخصیص موعد تحویل را با تابع هدف زمانبندی تولید تعداد کارهای تاخیری برای تعدادی از حالت های تک ماشین و ماشین های موازی بررسی و برای آنها روش های چند جمله ای مبتنی بر برنامه ریزی پویا ارایه نموده است. وی نیز به موضوع ارسال توجهی نداشته است. وانگ و وانگ نیز در همان سال (۲۰۱۱) [۹] و زو[۱۰] مساله تخصیص موعد تحویل را در حالت تک ماشین و با در نظر گرفتن یادگیری و زوال کارها مورد بررسی قرار داده اند اما آنها نیز ارسال را در مدلهای خود در نظر نگرفته اند. لی و همکارانش [۱۱] نیز در سال ۲۰۱۱ تخصیص موعد تحویل را در حالت تک ماشین برای سیستم های مبتنی بر تکنولوژی گروهی با در نظر گرفتن زمان های آماده سازی مرتبط با محصولات مشابه (خانواده های محصول) بررسی و یک روش چند جمله ای برای حل آن ارایه نموده اند؛ آنها مسئله مشابهی را نیز با در نظر گرفتن زوال کارها بررسی نموده اند [۱۲]. اما در این تحقیقات نیز موضوع ارسال مورد توجه قرار نگرفته است. در سال ۲۰۱۰ نیز لی و همکارانش مساله تخصیص موعد تحویل را با در نظر گرفتن زمان های پردازش فازی بررسی و یک روش چند جمله ای برای حل ان ارایه نموده اند [۱۳]. با توجه به تنوع بکارگیری مساله تخصیص موعد تحویل در انواع موضوعات (نظیر تحقیقاتی که در این پاراگراف به آنها اشاره شد) می توان گفت که این موضوع بسیار مورد توجه محققین می باشد. یکی دیگر از موضوعات مهمی که سال ها مورد توجه محقیق بوده است مساله انتخاب مقدار منابع اختصاص داده شده جهت انجام عملیات مربوط به پردازش هر سفارش می باشد. این موضوع در تحقیقات تحت عناوین تخصیص منابع یا زمان های پردازش قابل کنترل آورده شده است. واقعیت این است که زمان های پردازش کارها بر اساس میزان منابعی که به آنها اختصاص داده می شود قابل تغییر می باشد. به عبارت دیگر، در بسیاری از سیستم‌های واقعی، زمان پردازش عملیات (همان ظرفیت ماشین‌الات) از طریق تخصیص منابع بیشتری همچون منابع مالی، اضافه‌کاری، انرژی، سوخت و یا نیروی انسانی بیشتر قابل کنترل است. در مسائل کلاسیک زمانبندی تولید، میزان ظرفیت ماشین‌الات (ایستگاه‌های کاری) جهت پردازش کارها ثابت فرض شده است. از دیدگاه زنجیره تامین در این مدل‌ها، برنامه‌ریزی ظرفیت و تخصیص منابع تولیدی که جایگاه آن در سطح تاکتیکی یک زنجیره می باشد بصورت مستقل انجام شده و نتایج آن به عنوان ظرفیت ماشین‌الات به عنوان ورودی مدل زمانبندی، مورد استفاده قرار می گیرد. مدل یکپارچه تخصیص منابع و زمانبندی تولید که ما آنرا به اختصار IRAPS[3] می نامیم به مدل هایی اشاره دارد که دو نوع تصمیم برنامه ریزی ظرفیت و زمانبندی تولید وابسته به هم را به صورت یکپارچه و منسجم مد نظر قرار می دهد. جانیک (۱۹۸۹) یک کاربرد از این نوع مسائل را در صنایع تولید فولاد مطرح می‌نماید [۱۴]. همچنین کاربرد دیگری از این مسائل در محیط های ماشین‌کاری که در آن‌ها زمان پردازش کارها تابعی از نرخ تغذیه و سرعت محور دستگاه است، رخ می‌دهد. ویکسون (۱۹۸۰) اولین محققی بود که مسأله برنامه‌ریزی ظرفیت را با زمان‌های پردازش مختلف به عنوان تابعی از میزان منابع تخصیص داده شده به عملیات، ارائه نمود [۱۵]. در

[1] *due date assignment cost*
[2] *common due date assignment*
[3] *Integrated Resource Allocation and Production Scheduling*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

ایـن مقالـه، مسـئله تخصـیص موعـد تحویـل، تخصـیص منـابع، زمانبندی سفارشات بر روی یک ماشین و دسته بندی و زمانبندی ارسال سفارشات برای یک سیستم تولیدی "تولید برای سفارش" یا MTO[1] با هدف کمینه‌سازی کـل هزینـه هـای تخصـیص موعـد تحویل، مجموع وزنی تعداد تاخیرهـا و هزینـه‌هـای ارسـال مـورد بررسی قرار گرفته است و مدل برنامه ریاضی مساله مذکور شـامل یک مدل عدد صحیح یا IP[2]، یک الگوریتم شـبه چنـد جملـه ای برنامـه ریـزی پویـا (DP[3]) و یـک الگـوریتم تقریبـی بـا زمـان چندجمله‌ای کامل (FPTAS[4]) معرفی شده است. به طور خلاصه سیر تکاملی مساله مورد نظر در ایـن مقالـه بـا محوریـت مجمـوع وزنی تعداد کارهای تاخیری به شرح زیر می باشد:

مسئله کمینه سازی تعداد کارهای تاخیری یکی از مسـائل بسـیار قدیمی زمانبندی می باشد. این مسئله (یعنی $1//\sum U_j$) توسـط الگـوریتم چنـد جملـه‌ای مـور [۱۶] حـل مـی‌شـود. مسـئله $1//\sum w_j U_j$ در لیست مسائل سـخت قـرار دارد [۱۷] کـه سـانی [۱۸] یک روش مبتنی بر DP و یـک الگـوریتم تقریبـی بـا زمـان چندجمله‌ای کامل (FPTAS) برای حل آن ارایه نمـوده و گنـز و لـونر[۱۹-۲۰] آنـرا دو بـار بهبـود داده‌انـد. همچنـین هلـه و بولفین[۲۲-۲۱] روش‌هایی مبتنی بر تکنیک B&B برای مسـئله مجموع وزنی تعداد کارهای تـاخیری در دو حـالتی کـه زمـان در دسترس کارها صفر یا غیر صفر است توسعه داده‌اند. جنبـه دیگـر توسعه مجموع وزنی کارهای تاخیری دسته‌بندی می‌باشد که هـاچ بام و لانـدی [۲۳] یـک الگـوریتم شـبه چندجملـه‌ای مبتنـی بـر تکنیک DP برای مسئله مجموع وزنی تعداد کارهـای تـاخیری در حالت تک ماشین با وجود زمان آماده سازی برای هر دسته ارایه و براکـر و کووالیـو [۲۴] آنـرا بهبـود داده‌انـد. آنهـا همچنـین یـک FPTAS برای حل مسئله مذکور معرفی کرده‌اند؛ اما به هـر حـال آنهـا هزینـه هـای تخصـیص موعـد تحویـل، تخصـیص منـابع و هزینه‌های ارسال را در نظر نگرفته‌اند. چن و کوالیو مسئله کمینـه سازی تعداد کارهای تاخیری با زمان آماده سازی و موعد تحویـل مشترک قابل تخصیص را بررسـی نمـوده و یـک الگـوریتم برنامـه ریزی پویا و یک FPTAS برای حل آن ارایه کـرده انـد. در مـدل آنها به مساله ارسال و زمان های پردازش قابل کنترل توجه نشـده است. از طرف دیگر؛ استینر و ژانگ[۲۵-۲۶] مسئله کمینه سازی مجموع وزنی تعداد کارهای تـاخیری و هزینـه هـای ارسـال را بـا وجود زمان آماده سازی برای حالـت هـای تـک مشـتری و چنـد مشتری بررسی نموده انـد. آنهـا یـک روش DP و یـک FPTAS برای مسئله مذکور ارایه نموده اند. در این دو تحقیق اخیر مسـاله تخصیص موعد تحویل و تخصیص منابع وجود ندارد. اخیرا استینر و ژانگ مساله یکپارچه تخصیص موعد تحویل و زمانبندی تولید و ارسال را برای حالت تک مشتری مـورد بررسـی قـرار داده و یـک روش DP و یک FPTAS برای آن ارایـه نمـوده انـد. مـا در ایـن مقاله به تعمیم تحقیق استینر و ژانگ با در نظر گرفتن تخصـیص منابع (یعنی مدل یکپارچه تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع و زمانبندی تولید و ارسال) می پردازیم. پس از معرفی علائـم، در بخش دوم تعریف مساله و ویژگی های جـواب بهینـه و در بخـش سوم مدل برنامه ریزی عدد صـحیح آورده شـده اسـت. در بخـش چهارم یک روش برنامه ریزی پویا و در بخش پنجم یک FPTAS برای مساله ارایه می شود. جمع بندی به همراه ارایه پیشـنهاداتی جهت کارهای آتی بخش پایانی مقاله می‌باشد.

علایم اصلی

n	تعداد کارها
s	زمان آماده سازی هر دسته
θ	هزینه هر بار ارسال
A	موعد تحویل پیش فرض کارها
α	جریمه افزایش هر واحد موعد تحویل
w_j	وزن کار jام
p_{jh}	hامین امکان برای انتخاب زمان پردازش کار jام
v_{jh}	هزینه اختصاص منابع به کار jام
cap	ظرفیت هر وسیله
E	مجموعه کارهای به موقع
T	مجموعه کارهای تاخیری
p_j	زمان پردازش واقعی کار jام (متغیر تصمیم)
B^E	تعداد دسته های به موقع (متغیر تصمیم)
B^T	تعداد دسته های تاخیری (متغیر تصمیم)
d	موعد تحویل تخصیص داده‌شده به مشتری (متغیر تصمیم)
z_{jh}	یک اگر زمان پردازش hام به کار jام تخصیص یابد؛ صفر در غیر اینصورت
B	تعداد کل دسته ها

۲. تعریف مسئله

یک مساله زمانبندی زنجیره تامین (SCS[5]) را در نظر بگیرید که در آن n کار توسط یک مشتری جهت پردازش به یک تولید کننده سفارش داده می شود. انقطاع در پردازش کارها مجاز نیست. جهت پردازش هر کار مقداری منابع صرف می شود. برای مدت زمان پردازش کار J_j، H امکان ($h=1,...,H$) وجود دارد که به میزان منابع صرف شده برای آن کار بستگی دارد

[1] *Make to Order*
[2] *Integer Programming*
[3] *Dynamic Programming*
[4] *Fully Polynomial Time Approximation Scheme*
[5] *Supply Chain Scheduling*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

$p_j \in \{p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jH}\}$ که در آن p_j زمان واقعی پردازش کار J_j می‌باشد)؛ به عبارت دقیق تر می توان با افزایش منابع اختصاص داده شده به هر کار مدت زمان پردازش آنرا کاهش داد ($p_{j1} > p_{j2} > \dots > p_{jH}$). با توجه به میزان منابع مورد نیاز، برای هر مدت زمان پردازش (p_{jh}) یک هزینه پردازش v_{jh} وجود دارد؛ بنابراین یک هزینه تخصیص منابع به میزان $v_j = v_{jh}$ باید در نظر گرفته شود اگر مدت زمان پردازش واقعی $p_j = p_{jh}$ لحاظ شود. به منظور کاهش هزینه های ارسال، کارهای پردازش شده (سفارشات آماده) در قالب دسته برای مشتری مربوطه ارسال می‌شوند.

ارسال همزمان چند سفارش در قالب یک دسته به منظور کاهش هزینه‌های ارسال که ممکن است منجر به افزایش تعداد کارهای تاخیری شود صورت می‌گیرد. تعداد وسایل به اندازه کافی فرض می شود اما برای هر وسیله ظرفیت cap در نظر گرفته می شود که بیانگر حداکثر تعداد کارهایی است که هر وسیله می تواند حمل نماید. موعد تحویل پیش فرض (قرارداد اولیه) همه سفارشات A ($A>0$) می باشد. ارسال یک دسته برای مشتری دارای هزینه θ می باشد که مستقل از حجم دسته فرض می‌شود. تولیدکننده می‌تواند با پرداخت هزینه $\alpha \max(0, d-A)$ موعد تحویل جدیدی در نظر بگیرد. کار jام (J_j) دارای ضریب اهمیت w_jمی باشد. اگر کاری بعد از موعد تحویل اختصاص داده شده (d) تحویل شود هزینه ای معادل w برای تولید کننده منظور می شود. بنابراین، یک کار تاخیری است اگر بعد از موعد تحویل تخصیص داده شده به مشتری ارسال شود در غیر اینصورت به موقع نامیده می شود. زمان تکمیل و ارسال هر دسته برابر زمان تکمیل آخرین کار آن دسته می باشد. یک دسته به موقع است اگر تمام کارهای آن دسته موعد تحویل بزرگتر از زمان ارسال آن دسته یا مساوی با آن داشته باشند. همچنین فرض می شود پردازش هر دسته نیاز به زمان آماده سازی دارد که مستقل از توالی دسته ها است.

بنابراین؛ موعدهای تحویل، انتخاب زمان پردازش برای هر سفارش، زمانبندی تولید و تعداد دسته ها، چهار نوع متغیر تصمیم برای مساله مذکور می باشند. هدف کمینه سازی مجموع هزینه های تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری و ارسال می باشد. با توجه به علائمی‌که چن برای مسائل زمانبندی با در نظر گرفتن ارسال در نظر گرفته است نمایش اختصاری مسئله مورد نظر در این مقاله به صورت زیر می باشد:

$$1/s/V\ (\infty, cap)\ , direct/1/\alpha\ \max(0, d-A) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H} v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^{n} w_j U_j + \theta B$$

که منظور کمینه سازی مجموع هزینه های تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری و هزینه‌های ارسال در حالت تک ماشین با وجود یک مشتری، ارسال مستقیم دسته‌ها (direct) و وجود تعداد کافی وسیله حمل و نقل با محدودیت ظرفیت برای هریک و نیز عدم وجود محدودیت و شرایط خاص می‌باشد. منظور از ارسال مستقیم، ارسال تعدادی از سفارشات توسط یک وسیله به مشتری بدون وجود مسئله مسیریابی می باشد.

استینر و ژانگ نشان داده‌اند که مسئله مورد نظر بدون وجود زمان‌های پردازش قابل کنترل (یعنی مساله $(1/s/V\ (\infty,cap)\ , direct/1/\alpha\ \ \max(0, d-A) + \sum_{j=1}^{n} w_j U_j + \theta B$ به طور معمولی NP-hard است. بنابراین مساله فوق الذکر نیز NP-hard می باشد.

۱-۲. ویژگی‌های جواب بهینه

قبل از مدل سازی بهتر است به بررسی ویژگی های جواب بهینه بپردازیم. بررسی ساختار جواب بهینه باعث کاهش فضای جستجو و ارایه روش های کاراتری اعم از روش های دقیق و ابتکاری برای مساله می شود. با توجه به ساختار مساله و تابع هدف، مشابه بسیاری از مسائل زمانبندی از جمله ویژگی‌های بدیهی جواب بهینه برای مساله مذکور عدم وجود بیکاری عمدی می‌باشد. با توجه به اینکه (طبق فرض) همه کارها موعد تحویل یکسانی دارند، هر نوع دسته بندی صرفا شامل کارهای به موقع یا کارهای تاخیری می باشد (یعنی دسته ای وجود ندارد که هم شامل کارهای به موقع و هم شامل کارهای تاخیری باشد). ویژگی های زیر ساختار مساله مذکور را نشان می دهند:

ویژگی ۱:

برای مساله

$$1/s/V\ (\infty,cap)\ , direct/1/\alpha\ \max(0, d-A) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H} v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^{n} w_j U_j + \theta B$$

ترتیب پردازش کارها در دسته های به موقع و نیز دسته های تاخیری تاثیری در مقدار تابع هدف ندارد.

اثبات: جوابی را در نظر بگیرید که دسته بندی و زمانبندی کارهای به موقع و تاخیری مشخص است؛ اگر دو سفارش به موقع جابجا شوند؛ از آنجاییکه همه سفارشات موعد تحویل یکسانی

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

دارند مقدار هیچکدام از اجزا تابع هدف تغییری نمی کند بنابراین ترتیب پردازش کارها در دسته های به موقع در مقدار تابع هدف تاثیری ندارد. به طور مشابه نیز می توان نشان داد جابجایی سفارشات در دسته های تاخیری تاثیری در تابع هدف ندارد.

ویژگی ۲ (مشابه ویژگی ۳,۱ استینر و ژانگ):

برای مساله

$1/s/V\ (\infty,cap)\ ,direct/1/\alpha\ max(0,d-A) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H} v_{jh}z_{jh} + \sum_{j=1}^{n} w_j U_j + \theta B$

جواب بهینه ای وجود دارد که در آن کارهای تاخیری بعد از کارهای به موقع زمانبندی و ارسال می‌شود.

اثبات: زمانبندی و ارسال دسته های تاخیری پس از دسته های به موقع باعث ذخیره زمان برای انجام کارهای به موقع می‌شود.

براساس ویژگی های یک و دو می توان تمام دسته های به موقع را به عنوان مجموعه E و تمام دسته های تاخیری را به عنوان مجموعه T در نظر گرفت؛ بنابراین E قبل از T زمانبندی می‌شود.

ویژگی ۳:

برای مساله

$1/s/V\ (\infty,cap)\ ,direct/1/\alpha\ max(0,d-A) \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H} v_{jh}z_{jh} + \sum_{j=1}^{n} w_j U_j + \theta B$

جواب بهینه ای وجود دارد که در آن کارهای تاخیری در زمان نرمال پردازش می شوند.

اثبات: پردازش کارهای تاخیری در زمان غیر نرمال صرفاً باعث افزایش هزینه های تخصیص زمان های پردازش می شود.

۳. مدل برنامه ریزی عدد صحیح

در این بخش مدل برنامه ریاضی مساله مذکور آورده می شود. با توجه به ساختار مساله و ویژگی های بیان شده، جهت مدل سازی مساله از این حقیقت کمک می گیریم که کلیه کارها به دو مجموعه اصلی E (شامل کارهای به موقع) و T (شامل کارهای تاخیری) تفکیک می شوند. به منظور کاهش تعداد محدودیت ها و متغیرهای مساله می توان از این ایده استفاده کرد که اختصاص هر سفارش به مجموعه های E یا T دارای هزینه ای (شامل هزینه های تخصیص منابع و هزینه های دیرکرد) به صورت زیر می باشد ($i = 1, \dots, H+1$).

$$c_{ji} = \begin{cases} v_{ji} & i = 1, \dots, H, J_j \in E \\ w_j + v_{j1} & J_j \in T \end{cases}$$

با این رویکرد مدل برنامه ریاضی مساله مذکور که یک مدل عدد صحیح است به صورت زیر می باشد:

minimize

$$TC = \alpha(d-A) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{H+1} c_{ji}x_{ji} + \theta(B^E + B^T) \quad (۱)$$

Subject to:

$$d \geq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{H} c_{ji}x_{ji} + sB^E \quad (۲)$$

$$d \geq A \quad (۳)$$

$$B^E \geq \left(n - \sum_{j=1}^{n} x_{j,H+1}\right)/cap \quad (۴)$$

$$B^T \geq \left(\sum_{j=1}^{n} x_{j,H+1}\right)/cap \quad (۵)$$

$$\sum_{i=1}^{H+1} x_{ji} = 1 \qquad j = 1, \dots, n \quad (۶)$$

$$x_{ji} \geq 0 \ integer \\ B^E \geq 0, integer \\ B^T \geq 0, integer \\ d \geq 0, integer \qquad j = 1, \dots, n;\ i = 1, \dots, H+1 \quad (۷)$$

رابطه ۱ تابع هدف شامل کمینه کردن مجموع هزینه ها می باشد را نشان می دهد. رابطه ۲، محدودیت محاسبه زمان ختم دسته های به موقع و موعد تحویل تخصیص داده شده را نشان می دهد که بر اساس مجموع زمان های پردازش و زمان های آماده سازی کارهای به موقع مشتری محاسبه شده است. موعد تحویل تخصیص داده شده حداقل به اندازه موعد تحویل پیش فرض می باشد که در رابطه ۳ آورده شده است. روابط ۴ و ۵ محدودیت های مربوط به تعداد دسته های به موقع و تاخیری می باشد. رابطه ۶ نشان می دهد که هر کار باید به موقع یا تاخیری باشد. روابط ۷ نیز وضعیت متغیرها را نشان می دهند.

۴. روش برنامه ریزی پویا

در این بخش یک الگوریتم برنامه ریزی پویای روبه جلو برای مساله بیان شده ارایه می شود. الگوریتم با ایجاد همزمان دسته

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

های به موقع و تاخیری اجرا می شود. آخرین دسته های به موقع و تاخیری، دسته های به موقع و تاخیری جاری نامیده می شوند. همچنین در هر مرحله در مورد یک کار تصمیم گیری می شود که ما آنرا کار جاری می نامیم. $\{m,t,n^T,TC\}$ نمایش یک زمانبندی جزئی روی مجموعه کارهای $\{1,\dots,m\}$ با کل هزینه TC و زمان تکمیل t برای کارهای به موقع و n^T تعداد کارهای تاخیری در مجموعه T می باشد. حالت های تولید شده برای $\{1,\dots,m\}$ $(m = 0,1,\dots,n)$ در مجموعه $S^{(m)}$ ذخیره می شود. برای هر توالی جزئی $\{m,t,n^T,TC\}$ توالی های جزئی با زمانبندی کار $m+1$ به طرق زیر انجام می شود:

- اگر تعداد کارهای دسته جاری کمتر از cap است کار $m+1$ را به عنوان کار به موقع در دسته جاری زمانبندی نمایید و در غیر اینصورت دسته جاری را ببندید و کار جاری را شروع یک دسته جاری به موقع در نظر بگیرید. در هر مورد H حالت برای زمان پردازش کار جاری در نظر بگیرید.
- کار $m+1$ را به عنوان کار تاخیری در مجموعه T با زمان نرمال زمانبندی نمایید.

اصل غلبه ۱:

برای هر دو حالت $\{m,t,n^T,TC\}$ و $\{m,t',n^T,TC'\}$ که در آن $t \le t'$ و $TC \le TC'$ باشد حالت شامل TC' را حذف نمایید.

Dynamic Programming Algorithm

(Initializing) Set: $S^{(0)} = \{0,0,0,0\}$.

(Generation) Generate set $S^{(m)}$ from $S^{(m-1)}$:

For each job (i.e. J_j)

Set $\mathbb{S} \leftarrow \emptyset$

For each state $\{m-1,t,n^T,TC\}$ in $S^{(m-1)}$

(Operation) Schedule next job (i.e. J_j):

/Schedule job J_j in E:

For each processing time of job J_j (i.e. for $h = 1$ to H)

$\mathbb{S} \leftarrow \mathbb{S} \cup \{j,t',n^T,TC'\}$

where:

$$t' = t + p_{jh} + \left(\left\lceil\frac{j-n^T}{cap}\right\rceil - \left\lceil\frac{j-n^T-1}{cap}\right\rceil\right)s$$

$$TC' = TC + \alpha\, max(0,min(t'-t,t'-A)) + \left(\left|\frac{j-n^T}{cap}\right| - \left|\frac{j-n^T-1}{cap}\right|\right)\theta + v_{jh}$$

End for

/Schedule job J_j in T:

$\mathbb{S} \leftarrow \mathbb{S} \cup \{j,t,n^T+1,TC'\}$

where:

$$TC' = TC + w_j + \left(\left\lceil\frac{n^T+1}{cap}\right\rceil - \left\lceil\frac{n^T}{cap}\right\rceil\right)\theta + v_{j1}$$

(Elimination)

For any two states $\{m,t,n^T,TC\}$ and $\{m,t',n^T,TC'\}$ with $t \le t'$ and $TC \le TC'$, eliminate the one with TC' from set $\mathbb{S}$.

(Update $S^{(m)}$) set $S^{(m)} = \mathbb{S}$.

End for

End for

(Result) Select the best state from the final stage (state with the smallest v in the set $S^{(K)}$) and trace back to obtain the optimal schedule.

قضیه ۱:

الگوریتم DP جواب بهینه مساله

$$1/s/V(\infty,cap),direct/1/\alpha\, max(0,d-A) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H} v_{jh}z_{jh} + \sum_{j=1}^{n} w_jU_j + \theta B$$

را در زمان $O(n^2 min\{P,\Lambda+v_H+W+\vartheta\})$ پیدا می‌کند که در آن:

$$P = ns + \sum_{,}^{n} p_{j1}$$

$$\Lambda = \alpha\left(ns + \sum_{,}^{n} p_{j1} - A\right)$$

$$v_H = \sum_{,}^{n} v_{jH}$$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

$$W = \sum_{j}^{n} w_j$$

$$\vartheta = \lceil n/cap \rceil \theta$$

اثبات:

واضح است که رویه Generation وقت گیرترین بخش الگوریتم است. در شروع هر تکرار کل حالت های امکان پذیر برای $\{t, n^T, TC\}$ دارای حد بالایی است که به شرح زیر تعیین می‌شود:

حداکثر $(P+1)$ مقدار مختلف برای t، حداکثر $n+1$ حالت مختلف برای n^T و حداکثر $\Lambda + v_H + W + \vartheta$ مقدار مختلف برای TC قابل تصور است. با توجه به قاعده حذف حداکثر $min\{(P+1), \Lambda + v_H + W + \vartheta\}$ حالت برای $\{t, n^T, TC\}$ با کار و n^T یکسان ولی t و TC مختلف امکان پذیر است. بنابراین تعداد کل حالت ها در ابتدای هر مرحله حداکثر $(n+1)min\{(P+1), \Lambda + v_H + W + \vartheta\}$ می باشد. در هر تکرار تعداد عملیات های برای تولید حالت های جدید $O(H+1)$ است؛ بنابراین از آنجایی که حداکثر $n+1$ مرحله وجود دارد الگوریتم فوق در زمان $O(Hn^2 min\{P, \Lambda + v_H + W + \vartheta\})$ قابل اجرا است که برای مقدار ثابت H، $O(n^2 min\{P, \Lambda + v_H + W + \vartheta\})$ می شود. با توجه به اینکه پیچیدگی مساله شبه چند جمله ای است مساله به طور معمولی NP-hard است.

۵. ارایه الگوریتم تقریبی کامل چند جمله ای

در این بخش یک FPTAS مبتنی بر DP با رویکرد بخش بندی ثابت فاصله ها[1] که توسط ساهنی [۲۷] پیشنهاد داده شد است ارایه می شود. ما برای توسعه FPTAS سه گام به شرح زیر استفاده می نماییم:

با استفاده از تکنیک LP relaxation و روش گرد کردن (Rounding) حدود اولیه ای برای جواب بهینه مساله مذکور به صورت زیر به دست می آید:

$$OPT^{LP} \le TC^* \le OPT^{LP} + 2max\, max\{v_{jH}, v_{j1} + w_j\} + \theta$$

$$OPT^{LP} \le TC^* \le OPT^{LP} + 2max\, max\{v_{jH}, v_{j1} + w_j\} + \theta$$

که در آن OPT^{LP} جواب بهینه مساله اصلی می باشد که متغیرهای آن از حالت صحیح خارج شده اند و TC^* جواب بهینه مساله اصلی می باشد.

۱- با استفاده از رویه بهبود حدود (BIP) حدود فوق به $v \le TC^* \le 3v$ بهبود می یابد که در آن v خروجی BIP می باشد.

۲- با استفاده از حدود فوق، الگوریتم تقریبی به صورت FPTAS برای مساله مذکور توسعه می یابد.

۵-۱.حدود اولیه

به منظور تدوین FPTAS با رویکرد مذکور نیاز به حدود اولیه ای داریم که در زمان چند جمله ای قابل محاسبه باشند. یک امکان برای یافتن حدود اولیه استفاده از مدل IP با آزاد سازی متغیرها از حالت عدد صحیح می باشد. با آزاد سازی متغیرها از حالت عدد صحیح مدل IP به مدل LP تبدیل می شود که توسط روش های بیضی و نقاط داخلی در زمان چند جمله ای قابل حل می باشد. واضح است که جواب بهینه مساله LP حد پایینی برای مساله IP (مساله اصلی) می باشد.

قضیه ۲:

مدل LP relaxation (مدل IP ارایه شده در بخش ۳ که در آن متغیرها به صورت متغیرهای مثبت از حالت صحیح بودن خارج شده اند) حدپایینی برای مساله ارایه می کند به طوری که:

$$OPT^{LP} \le TC^* \le OPT^{LP} + 2max\, max\{v_{jH}, v_{j1} + w_j\} + \theta$$

این فرایند به زمان$O(Ln^3/ln(n))$ نیاز دارد که در آن L تعداد بیت های مورد نیاز برای ثبت کلیه ضرایب مساله است.

اثبات:

همانطور که اشاره شد واضح است که $OPT^{LP} \le TC^*$ یک جواب پایه LP دارای این ویژگی است که تعداد متغیرهایی که مقدار مثبت می گیرند حداکثر به تعداد سطرهای ماتریس محدودیت (تعداد محدودیت‌ها) است. تعداد محدودیت های مدل LP، $n+4$ می باشد؛ بنابراین در یک جواب پایه حداکثر $n+4$ تا از متغیرهای مساله مثبت می شوند.

از آنجایی که d مثبت است از بین متغیرهای x_{ji} $(i=1,...,H+1_j=1,...,n)$، حداکثر $n+3$ عدد از B^T و B^E از آنها مثبت است. همچنین با توجه به اینکه حداقل یکی از متغیرهای B^T و B^E مثبت است؛ حداکثر $n+2$ عدد از متغیرهای x_{ji}, $i=1,...,H+1$ و $j=1,...,n$ مثبت است. با توجه به رابطه ۶ هر کار (J_j) حداقل یک متغیر مثبت از بین متغیرهای x_{ji}, $i=1,...,$

[1] *Static Partitioning Interval*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

$H+1$دارد؛ بنابراین حداکثر ۴ متغیر از متغیرهای x_{ji} عددی بین صفر و یک (و نه خود صفر یا یک) می گیرند که این نشان می‌دهد برای حداکثر دو کار، مقدار x_{ji} عددی بین صفر و یک است.

در مورد هر یک از این کارها، یکی از متغیرهای x_{ji} با اندیس بزرگتر i را به یک گرد می کنیم و سایر متغیرهای x_{ji} آن کار را صفر در نظر می گیریم؛ در اینصورت تغییرات هریک از اجزاء هزینه به این شرح می باشد:

با توجه به اینکه گرد کردن به یک در متغیر با اندیس i بالاتر انجام می شود زمان پردازش مربوط به آن کار یا کاهش می یابد (اگر $i\varepsilon 1,\ldots,H$) یا از بین مجموعه کارهای به موقع حذف می شود (اگر $i=H+1$) که در هر صورت هزینه های تخصیص موعد تحویل افزایش نمی یابد. همچنین از آنجاییکه گرد کردن به یک برای حداکثر دو کار اتفاق می افتد؛ هزینه های تخصیص منابع و تعداد کارهای تاخیری حداکثر به اندازه $2max$ $max\{v_{jH},v_{j1}+w_j\}$ افزایش می‌یابد. در خصوص هزینه های ارسال می توان گفت از مجموع روابط ۴ و ۵ در مدل LP مربوطه داریم:

$B^E+B^T\geq(n/cap)$ بنابراین در جواب بهینه LP، تعداد ارسال ها حداقل به اندازه n/cap است. از آنجایی که در جواب IP (یعنی مساله اصلی) تعداد ارسال ها $[n/cap]$ است و $[n/cap]\leq(n/cap)$ بنابراین با تبدیل جواب LP به عدد صحیح حداکثر هزینه یک ارسال به هزینه LP افزوده می شود. بنابراین رابطه فوق (یعنی $OPT^{LP}\leq TC^*\leq OPT^{LP}+2max\ max\{v_{jH},\ v_{j1}+w_j\}+\theta$) بین حدود مساله اصلی و مدل LP برقرار است. روش نقطه داخلی برای حل LP به زمان $O(Ln^3/ln(n))$ [۲۸] نیاز دارد که در آن n تعداد متغیرهای مساله و L اندازه مساله بر اساس بیت های دستگاه دودویی می باشد؛ بنابراین پیچیدگی زمانی مدل فوق $O(H^3Ln^3/ln(n))$ است که برای مقدار ثابت H، $O(Ln^3/ln(n))$ می شود.

۲-۵. بهبود حدود اولیه

در این بخش یک الگوریتم به نام "الگوریتم بهبود حدود" یا BIP برای بهبود حدود اولیه به نام معرفی می شود. این الگوریتم در حین اجرا از الگوریتم دیگری به نام الگوریتم دامنه یا $R(u,\ \varepsilon)$ استفاده می کند. الگوریتم های مذکور حدود اولیه را می گیرند و مقداری مانند v را ارایه می‌دهند به طوری که $v<TC^*<3v$. فرض کنید u مقداری بین OPT^{LP} و $OPT^{LP}+2max\ max\{v_{jH},\ v_{j1}+w_j\}+\theta$ باشد. ما در ابتدا الگوریتم دامنه $R(u,\ \varepsilon)$ را معرفی می کنیم که در آن u و ε (با مقدار اختیاری $\varepsilon=0.25$) ورودی های الگوریتم می باشد. این الگوریتم مشخص می کند که آیا مساله اصلی دارای جواب بهینه ای به صورت $TC^*\leq u$ است یا اینکه تضمین می‌کند: $TC^*>(1-\varepsilon)u$.

الگوریتم دامنه ($R(u,\varepsilon)$)

Range Algorithm $R(u,\varepsilon)$

(Initializing) Set: $S^{(0)}=\{0,0,0,0\}$.

(Partitioning) Partition the interval $[0,u]$ into $\lceil n/\varepsilon\rceil$ equal intervals of size $u\varepsilon/n$, with the last one being possibly smaller.

(Generation) Generate set $S^{(m)}$ from $S^{(m-1)}$:

For each job *(*i.e. J_j*)*

Set $\mathbb{S}\leftarrow\emptyset$

For each state $\{m-1,t,n^T,TC\}$ in $S^{(m-1)}$

(Operation) The same as those in DP

(Elimination):

1. Eliminate any state $\{t,n^T,TC\}$ if $TC\ >u$.
2. If more than one state has a TC value that falls into the same subinterval of $[0,u]$, then discard all but one of these states, keeping only the representative state with the smallest t coordinate for each interval.
3. For any two states $\{m,t,n^T,TC\}$ and $\{m,t',n^T,TC'\}$ with $t\leq t'$ and $TC\leq TC'$, eliminate the one with TC' from set $\mathbb{S}$.

(Update $S^{(m)}$***)*** set $S^{(m)}=\mathbb{S}$.

End for

End for

(Result) If $S^{(n)}=\emptyset$, report $TC^*>(1-\varepsilon)u$; otherwise report $TC^*\leq u$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

قضیه ۳:

اگر $S^{(n)}=\acute{O}$ باشد آنگاه $TC^*>(1-\varepsilon)u$ ؛ در غیر اینصورت $TC^*\leq u$. پیچیدگی زمان RA، $O(n^2/\varepsilon)$ می باشد.

اثبات:

اگر $S^{(n)}\neq\acute{O}$ باشد حداقل یک حالت وجود دارد که حذف نشده است و TC برای این حالت در یکی از بازه های $[0,u]$ قرار گرفته است و داریم: $TC^*\leq TC\leq u$. $S^{(n)}=\acute{O}$ به این معنا است که با توجه به قاعده حذف ۱ جوابی وجود ندارد که کمتر از u باشد؛ همچنین با در نظر گرفتن خطای ε که در قاعده حذف ۲ وجود دارد جوابی وجود ندارد که کمتر از $(1-\varepsilon)u$ باشد.با توجه به قاعده حذف ۲، در ابتدای هر مرحله حداکثر $n/\varepsilon+1$ حالت وجود دارد. تعداد عملیاتی که در هر مرحله انجام می شود $O(H)$ است؛ بنابراین با توجه به اینکه $n+1$ مرحله وجود دارد پیچیدگی زمانی الگوریتم $O(Hn^2/\varepsilon)$ است که برای مقدار ثابت H، $O(n^2/\varepsilon)$ می باشد.

الگوریتم بهبود حدود (BIP)

Bound Improvement Procedure (BIP)

1) Set $LB=OPT^{LP}$, $UB=OPT^{LP}+2max\,max\{v_{jH},v_{j1}+w_j\}+\theta$
2) If $UB\leq 3LB$ go to Step 5
3) Set $u=LB$ and $\varepsilon=0.25$
4) While $R(u,\varepsilon)$ reports that $TC^*>u(1-\varepsilon)$
   Let $u=2u$
   End

Set $v=u$

قضیه ۴:

BIP حد پایینی (v) برای مساله اصلی ارایه می کند به طوری که $v<TC^*<3v$ ین الگوریتم به $O\left(n^2 log\left(\frac{1}{n}\left(Cap\ \max\max\{v_{jH},v_{j1}+w_j\}/\theta\right)\right)\right)$ زمان نیاز دارد.

اثبات:

صحت الگوریتم از قضیه ۱ کوالیو [۱] قابل استخراج است. همچنین در مورد پیچیدگی الگوریتم، کوالیو نشان داده است که پیچیدگی BIP، $O\left(P(L)\ log\ \frac{UB}{LB}\right)$ می باشد که در آن $P(L)$ مرتبط با پیچیدگی الگورتیم دامنه می‌باشد.

بنابراین: $O\left(n^2 log\left(\frac{\max\max\{v_{jH},v_{j1}+w_j\}+\theta}{OPT^{LP}}\right)\right)$

پیچیدگی الگوریتم BIP در این مقاله می‌باشد.

قبلا اشاره شد که $B^E+B^T\geq(n/cap)$ با توجه به اینکه $OPT^{LP}\geq(B^E+B^T)\theta$، که در $OPT^{LP}\geq n\theta/cap$ است بنابراین این صورت می توان پیچیدگی BIP را به صورت

$$O\left(n^2 log\left(\frac{1}{n}\left(Cap\ \max\max\{v_{jH},v_{j1}+w_j\}/\theta\right)\right)\right)$$

ساده نمود:

۳-۵. الگوریتم تقریبی مبتنی بر DP

تاکنون با استفاده از حدود اولیه و BIP یک 3-approximation برای مساله توسعه داده شده است. در نهایت برای ارایه FPTAS، الگوریتمی به نام DPAA مبتنی بر DP معرفی می شود که حدود $v<TC^*<3v$ را می‌گیرد و یک FPTAS برای مساله اصلی ارایه می کند.

DP-based Approximation Algorithm (DPAA)

(Initializing) Set: $S^{(0)}=\{0,0,0,0\}$.

(Partitioning) Partition the interval $[0,(1+\varepsilon/3)3v]$ into $\lceil 3/\varepsilon+1\rceil n$ equal intervals of size $v\varepsilon/n$, with the last one being possibly smaller.

(Generation) Generate set $S^{(m)}$ from $S^{(m-1)}$:

For each job (i.e. J_j)

Set $\mathbb{S}\leftarrow\emptyset$

For each state $\{m-1,t,n^T,TC\}$ in $S^{(m-1)}$

(Operation) The same as those in DP

(Elimination):

1. Eliminate any state $\{t,n^T,TC\}$ if $TC>u$.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

2. If more than one state has a TC value that falls into the same subinterval of $[0,(1+\varepsilon/3)3v]$, then discard all but one of these states, keeping only the representative state with the smallest t coordinate for each interval.
3. For any two states $\{m,t,n^T,TC\}$ and $\{m,t',n^T,TC'\}$ with $t \leq t'$ and $TC \leq TC'$, eliminate the one with TC' from set $\mathbb{S}$.

(Update $\mathcal{S}^{(m)}$) set $\mathcal{S}^{(m)} = \mathbb{S}$.

End for

End for

(Result) Select the state with the smallest v in the set $\mathcal{S}^{(n)}$ and track back to obtain the final schedule

قضیه ۵:

برای هر $\varepsilon \geq 0$ ، DPAA یک جواب $(1+\varepsilon)$تقریبی برای مساله

$$\frac{\frac{1}{s}}{\frac{V}{\alpha}}(\infty, cap), \frac{direct}{1} \max(0, d-A) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H} v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^{n} w_j U_j + \theta B$$

در زمان $O(n^2/\varepsilon)$ پیدا می کند.

اثبات:

مشابه اثبات قضیه ۳.

۴-۵. الگوریتم اصلی (MA)

۱- حل مدل IP و به دست آوردن حدود اولیه برای جواب بهینه مساله اصلی.

۲- اجرای الگوریتم BIP به منظور بهبود حدود اولیه به صورت $v \leq TC^* \leq 3v$.

۳- اجرای DPA با به کار گیری حدود $v \leq TC^* \leq 3v$.

قضیه ۶:

الگوریتم اصلی (MA) یک FPTAS برای مساله

$$\frac{\frac{1}{s}}{\frac{V}{\alpha}}(\infty, cap), \frac{direct}{1} \max(0, d-A) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H} v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^{n} w_j U_j + \theta B$$

ارایه می دهد که پیچیدگی زمانی آن برابر است با:

$$O\left(n^2\left(\frac{n}{ln(n)}L + log\left(\frac{1}{n}\left(Cap \max\max\{v_{jH}, v_{j1}+w_j\}/\theta\right)\right) + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

اثبات:

صحت الگوریتم و پیچیدگی زمانی آن از اجزاء الگوریتم منتج است.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله، مساله تصمیم گیری همزمان (یکپارچه) تخصیص موعد تحویل گروهی، تخصیص منابع، زمانبندی تولید و دسته بندی و زمانبندی ارسال با هدف کمینه سازی مجموع هزینه های مربوطه

$$\frac{\frac{1}{s}}{\frac{V}{\alpha}}(\infty, cap), \frac{direct}{1} \max(0, d-A)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{H} v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^{n} w_j U_j + \theta B)$$

مورد بررسی قرار گرفت و پس از معرفی و ارایه ساختار جواب بهینه، یک مدل IP و یک روش DP برای مساله مذکور ارایه شد.

همچنین با استفاده از DP مذکور و روش های BIP یک FPTAS برای مساله ارایه شد. می‌توان به منظور انجام فعالیت های آتی به ارایه یک FPTAS با پیچیدگی زمانی Strongly Polynomial و توسعه روش های دقیق (نظیر شاخه و کران) یا روش های فرابتکاری اشاره نمود همچنین می‌توان به تغییر تابع هدف زمانبندی یا تکمیل آن (نظیر مجموع وزنی دیرکردها و زودکردها) اشاره نمود. در این مقاله، تخصیص موعد تحویل گروهی برای کلیه سفارشات مشتری در نظر گرفته شد که به عنوان فعالیت آتی می توان برای هر کار یک موعد تحویل پیش فرض و یک مقدار بهینه در نظر گرفت و مدل را توسعه داد. تعمیم مساله به حالت چند مشتری نیز از جمله فعالیت های آتی گسترش این تحقیق می باشد.

۷. مراجع

[1] Hall, N.G., Potts, C.N., *Supply Chain Scheduling*: Batching And Delivery, Operations Research, 51 (4), 2003, pp. 566-584.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]

[2] Slotnick, S.A., Sobel, M.J., *Manufacturing Lead-Time Rules: Customer Retention Versus Tardiness Costs*. European Journal of Operational Research, 169, 2005, pp. 825–85.

[3] Thomas, D.J., Griffin, P.M., *Coordinated Supply Chain Management.* European Journal of Operational Research, 94, 1996, pp.1–15.

[4] Chen, Z-L., *Integrated Production and Outbound Distribution Scheduling: Review and Extensions*, Operations Research, 58 (1), 2010, pp. 130-148.

[5] Steiner, G., Zhang, R., *Minimizing the Weighted Number of Tardy Jobs with Ddue Date Assignment and Capacity-Constrained Deliveries*, Annals of Operations Research, 191(1), 2011, pp. 171-181.

[6] Gordon, V., Proth, J.-M., Chu, C. , A survey of the state-of-the-art of common due date assignment and scheduling research. European Journal of Operational Research 139 (1), 2002, pp.1-25.

[7] Li, J., Yuan, X., Lee, E.S., Xu, D., *Setting Due Dates to Minimize the Total Weighted Possibilistic Mean Value of the Weighted Earliness–Tardiness Costs on a Single Machine*. Computers and Mathematics with Applications 62, 2011, pp. 4126–4139.

[8] Koulamas, C., *A Unified Solution Approach for the Due Date Assignment Problem with Tardy Jobs*, Int. J. Production Economics 132, 2011, pp. 292–295.

[9] Wang, J.B., Wang, C., *Single-Machine Due-Window Assignment Problem with Learning Effect and Deteriorating Jobs*, Applied Mathematical Modelling 35 (8) , 2011, pp. 4017-4022.

[10] Zhu, Z., Sun, L., Chu, F., Liu, M., *Due-Window Assignment and Scheduling with Multiple Rate-Modifying Activities Under the Effects of Deterioration and Learning Mathematical Problems in Engineering*, art. 2011, No. 151563.

[11] Li, S., Ng, C.T., Yuan, J., *Group Scheduling and Due Date Assignment on a Single Machine*, International Journal of Production Economics 130 (2) , 2011, pp. 230-235.

[12] Li, S., Ng, C.T., Yuan, J., *Scheduling Deteriorating Jobs with CON/SLK Due Date Assignment on a Single Machine*, International Journal of Production Economics 131 (2) , 2011, pp. 747-751.

[13] Li, J., Sun, K., Xu, D., Li, H., *Single Machine Due Date Assignment Scheduling Problem with Customer Service Level in Fuzzy Environment*, Applied Soft Computing, 10 (3) 2010, pp. 849–858.

[14] Janiak, A., *Minimization of the Blooming mill Standstills-Mathematical Model*, suboptimal algorithms. Mechanika, 8 (2), 1989, pp. 37–49.

[15] Vickson, R.G., *Two Single Machine Sequencing Problems Involving Controllable Job Processing Times.* AIIE Trans., 12 (3), 1980, pp. 258–262.

[16] Moore, J.M., *An n Job, one Machine Sequencing Algorithm for Minimizing the Number of Late Jobs*, Management Science, 15, 1968, 102-109.

[17] Karp, R.M., *Reducibility Among Combinatorial Problems*. R. E. Miller, J. W. Thatcher, Eds. Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 1972, 85-103.

[18] Sahni, S.K., *Algorithms For Scheduling Independent Tasks.* Journal of the ACM, 23 (1), 1976, 116-127.

[19] Gens, G.V., Levner, E.V., *Discrete Optimization Problems and Efficient Approximate Algorithms*, Engineering Cybernetics, 17 (6), 1979, 1-11.

[20] Gens, G.V., Levner, E.V., *Fast Approximation Algorithm for Job Sequencing With Deadlines*. Discrete Applied Mathematics, 3 (4), 1981, pp. 313-318.

[21] Hallah R.M., Bulfin R.L., *Minimizing the Weighted Number of Tardy Jobs on a Single Machine with Release Dates*, European Journal of Operational Research 176, 2007, pp. 727–744.

[22] Hallah, R.M., Bulfin, R.L., *Minimizing the Weighted Number of Tardy Jobs on a Single Machine*, European Journal of Operational Research 145, 2003, 45-56.

[23] Hochbaum, D.S., Landy, D., *Scheduling with Batching: Minimizing The Weighted Number of Tardy Jobs*, Operations Research Letters, 16, 1994, 79-86.

[24] Brucker, P., Kovalyov, M.Y., *Single Machine Batch Scheduling to Minimize The Weighted Number of Late Jobs*, Mathematical Methods of Operation Research, 43, 1996, 1-8.

[25] Steiner, G., Zhang, R., *Minimizing the Weighted Number of Late Jobs with Batch Setup Times and Delivery Costs on a Single Machine* , Multiprocessor Scheduling: Theory and Applications, Book edited by Eugene Levner, Itech Education and Publishing, Vienna, Austria, 2007.

[26] Steiner, G., Zhang, R., *Approximation Algorithms for Minimizing the Total Weighted Number of Late Jobs with Late Deliveries in Two-Level Supply Chains*. Journal of Scheduling, 12(6), 2009, pp. 565–574.

[27] Sahni, S.K., *Algorithms for Scheduling Independent Tasks.* Journal of the ACM, 23(1), 1976, pp. 116–127.

[28] Anstreicher, K.M., *Linear Programming in* $O([n^3/\ln(n)]L)$ *Operations*. SIAM J. Optim., 9(4), 1999, pp. 803–812.

[29] Kovalyov, M.Y., *Improving the Complexities of Approximation Algorithms for Optimization Problems*. Oper. Res. Lett. 17, 1995, pp. 85–87.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-10]