



Minimizing the Weighted Number of Tardy Jobs with Group Due Date Assignment and Capacity-Constrained Deliveries

M. Rasti-Barzoki & S. R. Hejazi*

*Morteza Rasti-Barzoki, Assistance professor of Industrial Eng., Department of Industrial and Systems Engineering, Isfahan University of Technology,
Seyed Reza Hejazi, Associate professor of Industrial Eng., Department of Industrial and Systems Engineering, Isfahan University of Technology,*

Keywords

Supply chain,
Due date assignment,
Scheduling and tardy job

ABSTRACT

In this paper, an integrated due date assignment, and delivery scheduling of order for multi customer for make to order production system in supply chain has been survered. One manufacture received n orders from K customers. The due date of orders for each customer is common and manufacture can assign the due dates with a related cost. Orders must be process by one machine and send to customers by vehicles sending several jobs with one vehicle lead to less transportation cost but may increase the number of tardy jobs. The objective is determining the due dates and production and delivery scheduling so that the related costs is minimized. We present an MINLP model for this problem and a heuristic algorithm for solving it. Computational test is performed for evaluation of these two methods. The obtained results show that the heuristic algorithm is efficient.

© 2013 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 24, No. 2, All Rights Reserved



کمینه کردن مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری با درنظر گرفتن مجموع هزینه‌های تخصیص موعد تحویل گروهی و هزینه‌های ارسال

مرتضی راستی برزکی^{*}، سید رضا حجازی^{*} و محمد مهدوی مزده

چکیده:

در این مقاله مساله یکپارچه تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع و زمانبندی تولید و ارسال سفارش‌ها در حالت تک مشتری در یک زنجیره تامین بررسی شده است. برای کل سفارشات یک موعد تحویل اولیه‌ای در نظر گرفته می‌شود که افزایش آن از طرف تولید کننده دارای هزینه می‌باشد. سفارشات لازم است توسط یک ماشین پردازش و در قالب دسته‌هایی توسط وسایلی با ظرفیت محدود به مشتری ارسال شود. زمان پردازش کارها با اختصاص منابع قابل کنترل است. هدف تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، تعیین توالی پردازش کارها و تعیین دسته‌بندی ارسال است به طوری که مجموع هزینه‌های تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری و هزینه‌های ارسال به طور همزمان کمینه شود. در این مقاله، یک روش برنامه ریزی پویای شبه چند جمله‌ای، یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح و یک الگوریتم تقریبی با زمان چندجمله‌ای کامل برای مساله مذکور ارایه شده است.

کلمات کلیدی:

زنجیره تامین،
تخصیص موعد تحویل،
تخصیص منابع و زمان‌های پردازش
قابل کنترل،
زمانبندی،
کارهای دارای تاخیر

۱. مقدمه

مدیریت زنجیره تامین یکی از موضوعات بسیار مهمی است که هم از نظر تئوری و هم از جنبه کاربردی سال‌ها مورد توجه محققین قرار گرفته است و با توجه به گستردگی و تنوع موضوع هم اکنون نیز تحقیقات بسیاری را به خود اختصاص داده است. اما موضوع زمانبندی زنجیره تامین از موضوعات نسبتاً جدیدی است که اهم تحقیقات آن مربوط به سالهای بعد از سال ۲۰۰۰ میلادی می‌باشد. به طور خاص موضوع زمانبندی یکپارچه تولید و توزیع نیز یکی از موضوعات مهمی است که پس از ارایه مقاله هال و پاتس در سال ۲۰۰۳ [۱] تحقیقات زیادی را به خود اختصاص داده است. تولید و توزیع دو جز مهم یک زنجیره تامین را شامل می‌شوند؛ بنابراین هماهنگی برنامه ریزی تولید و ارسال یکی از مسائل

تاریخ وصول: ۹۰/۱۰/۱۳

تاریخ تصویب: ۹۰/۱۲/۸

مرتضی راستی برزکی^{*}، استادیار دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها،
دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، rasti@cc.iut.ac.ir

^{*}تویینده مسئول مقاله: دکتر سید رضا حجازی، دانشیار، دانشکده مهندسی

صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، rehejazi@cc.iut.ac.ir

محمد مهدوی مزده، استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت،

تهران، mazdeh@iust.ac.ir

مهم زمانبندی زنجیره تامین می‌باشد. مسائل کلاسیک زمانبندی به هماهنگی با واحد حمل و نقل و در نظر گرفتن هزینه‌های ارسال توجهی ندارند که در نظر گرفتن هزینه‌های ارسال در مسائل زمانبندی باعث توجه محققین به رویکرد نوین زمانبندی در زنجیره تامین شده است. مدل‌های یکپارچه زمانبندی تولید و توزیع با توجه به هزینه‌های تاخیر و هزینه‌های زیاد لجستیک بسیار حائز اهمیت می‌باشند. اسلوتوتیک و سوبیل اشاره کرده اند که هزینه‌های مرتبه با تاخیر در صنعت هوافضا می‌تواند تا نزدیک یک میلیون دلار در روز برای تامین کنندگان قطعات هوایپیماسازی باشد [۲]. همچنین بررسی توماس و گریفین نشان داده است که بیش از ۱۱٪ تولید خالص ملی آمریکا صرف هزینه‌های حمل و نقل می‌شود و هزینه‌های لجستیک بیش از ۳۰٪ هزینه کالاهای فروخته شده را تشکیل می‌دهد [۳]. جهت بررسی مدل‌های یکپارچه تولید و توزیع که به اختصار^۳ IPODS نامیده می‌شود مطالعه مقاله مروری چن در سال [۴] ۲۰۱۰ پیشنهاد می‌شود. از طرف دیگر موضوع تخصیص موعد تحویل و زمانبندی تولید یکی از مسائل مهم تئوری و کاربردی می‌باشد که سالها مورد توجه محققین قرار گرفته و تاکنون تحقیقات بسیار زیادی در این زمینه انجام شده است. در مدل‌های کلاسیک

^۲ Integrated Production and Outbound Distribution Scheduling

تخصیص موعد تحويل را در حالت تک ماشین برای سیستم های مبتنی بر تکنولوژی گروهی با در نظر گرفتن زمان های آماده سازی مرتبط با محصولات مشابه (خانواده های محصول) بررسی و یک روش چند جمله ای برای حل آن ارایه نموده اند؛ آنها مسئله مشابهی را نیز با در نظر گرفتن زوال کارها بررسی نموده اند [۱۲]. اما در این تحقیقات نیز موضوع ارسال مورد توجه قرار نگرفته است. در سال ۲۰۱۰ نیز لی و همکارانش مساله تخصیص موعد تحويل را با در نظر گرفتن زمان های پردازش فازی بررسی و یک روش چند جمله ای برای حل آن ارایه نموده اند [۱۳]. با توجه به تنوع بکارگیری مساله تخصیص موعد تحويل در انواع موضوعات (نظیر تحقیقاتی که در این پاراگراف به آنها اشاره شد) می توان گفت که این موضوع سیار مورد توجه محققین می باشد. یکی دیگر از موضوعات مهمی که سال ها مورد توجه محققین می باشد. یکی دیگر از موضوعات مهمی که در این پاراگراف به آنها اشاره شده می باشد. یکی دیگر از موضوعات مهمی که به سال ها مربوط به پردازش هر سفارش می باشد. این جهت انجام عملیات مربوط به پردازش هر سفارش می باشد. این موضوع در تحقیقات تحت عنوانی تخصیص منابع یا زمان های پردازش قابل کنترل آورده شده است. واقعیت این است که زمان های پردازش کارها بر اساس میزان منابعی که به آنها اختصاص داده می شود قابل تغییر می باشد. به عبارت دیگر، در بسیاری از سیستم های واقعی، زمان پردازش عملیات (همان ظرفیت ماشین الات) از طریق تخصیص منابع بیشتری همچون منابع مالی، اضافه کاری، انرژی، سوت و یا نیروی انسانی بیشتر قابل کنترل است. در مسائل کلاسیک زمانبندی تولید، میزان ظرفیت ماشین الات (ایستگاه های کاری) جهت پردازش کارها ثابت فرض شده است. از دیدگاه زنجیره تامین در این مدل ها، برنامه ریزی ظرفیت و تخصیص منابع تولیدی که جایگاه آن در سطح تاکتیکی یک زنجیره می باشد بصورت مستقل انجام شده و نتایج آن به عنوان ظرفیت ماشین الات به عنوان ورودی مدل زمانبندی، مورد استفاده قرار می گیرد. مدل یکپارچه تخصیص منابع و زمانبندی تولید که ما آنرا به اختصار^۳ IRAPS می نامیم به مدل های اشاره دارد که دو نوع تصمیم برنامه ریزی ظرفیت و زمانبندی تولید وابسته به هم را به صورت یکپارچه و منسجم مد نظر قرار می دهد. جانیک (۱۹۸۹) یک کاربرد از این نوع مسائل را در صنایع تولید فولاد مطرح می نماید [۱۴]. همچنین کاربرد دیگری از این مسائل در محیط های ماشین کاری که در آن ها زمان پردازش کارها تابعی از نرخ تغذیه و سرعت محور دستگاه است، رخ می دهد. ویکسون (۱۹۸۰) اولین محققی بود که مسئله برنامه ریزی ظرفیت را با زمان های پردازش مختلف به عنوان تابعی از میزان منابع تخصیص داده شده به عملیات، ارائه نمود [۱۵]. در

زمانبندی، موعد تحويل سفارشات ثابت و مشخص (ورودی مساله) فرض می شوند. در یک مدل یکپارچه زنجیره تامین به منظور اجتناب از جریمه های دیرکرد، موعدهای تحويل می تواند بر اساس میزان توان دستیابی به موعدهای تحويل تخصیص داده شده در فرایند زمانبندی تعیین شود [۱۵].

امکان کنترل موعدهای تحويل می تواند عاملی اصلی در بهبود عملکرد سیستم باشد. البته افزایش موعد تحويل برای یک سفارش یا مجموعه ای از سفارشات همراه با هزینه می باشد که در ادبیات موضوع به هزینه تخصیص موعد تحويل^۱ مشهور است. این هزینه برای مثال از تخفیف هایی که تامین کننده برای حفظ مشتری باید در نظر بگیرد ناشی می شود. از یک طرف کوچک بودن موعد تحويل ها موجب هزینه های مرتبط با دیرکرد می شود و از طرف دیگر تعیین دیرهنگام موعد تحويل منجر به هزینه های زیاد تخصیص موعد تحويل می شود؛ بنابراین تعیین بهینه موعد تحويل سفارشات می تواند از جمله تضمیمات مهم در زنجیره تامین باشد. برای تعیین موعد تحويل سفارشات رویکردهای متفاوتی در نظر گرفته می شود که مهمترین و پرکاربردترین آنها تخصیص موعد تحويل های مشترک (یکسان) می باشد که در ادبیات موضوع نیز به همین عنوان (تخصیص موعد تحويل مشترک^۲) مشهور شده است. موعد تحويل مشترک در مواردی نظری تعدی مشریان، تعدد دوره های زمانی برنامه ریزی و ... کاربرد دارد. بررسی ها نشان می دهد آخرین مقاله موروری در زمینه مدل های تخصیص موعد تحويل در سال ۲۰۰۲ انجام شده است [۶]. در ادامه به عنوان نمونه، به چند مورد از تحقیقات مرتبط با موضوع مقاله اشاره می شود:

اخیراً لی و همکارانش [۷] تخصیص موعد تحويل را در مسئله مجموع وزنی کل زودکردها و دیرکردها در حالت تک ماشین در حالت احتمالی بررسی نموده اند؛ البته آنها به موضوع ارسال توجهی نکرده اند و تابع هدف آنها شامل دو جز هزینه تخصیص موعد تحويل و مجموع وزنی زودکردها و دیرکردها می باشد. کولاماس در سال ۲۰۱۱ [۸] موضوع تخصیص موعد تحويل را با تابع هدف زمانبندی تولید تعداد کارهای تاخیری برای تعدادی از حالت های تک ماشین و ماشین های موازی بررسی و برای آنها روش های چند جمله ای مبتنی بر برنامه ریزی پویا ارایه نموده است. وی نیز به موضوع ارسال توجهی نداشته است. وانگ و وانگ نیز در همان سال (۲۰۱۱) [۹] و زو [۱۰] مسئله تخصیص موعد تحويل را در حالت تک ماشین و مدل های زمانبندی تولید کارهای تاخیری و زوال کارها مورد بررسی قرار داده اند اما آنها نیز ارسال را در مدل های خود در نظر نگرفته اند. لی و همکارانش [۱۱] نیز در سال ۲۰۱۱

¹ due date assignment cost² common due date assignment³ Integrated Resource Allocation and Production Scheduling

تخصیص موعد تحویل و تخصیص منابع وجود ندارد. اخیرا استینر و ژانگ مساله یکپارچه تخصیص موعد تحویل و زمانبندی تولید و ارسال را برای حالت تک مشتری مورد بررسی قرار داده و یک روش DP و یک FPTAS برای آن ارایه نموده اند. ما در این مقاله به تعیین تحقیق استینر و ژانگ با در نظر گرفتن تخصیص منابع (یعنی مدل یکپارچه تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع و زمانبندی تولید و ارسال) می پردازیم. پس از معرفی علاشم، در بخش دوم تعریف مساله و ویژگی های جواب بهینه و در بخش سوم مدل برنامه ریزی عدد صحیح آورده شده است. در بخش چهارم یک روش برنامه ریزی پویا و در بخش پنجم یک FPTAS برای مساله ارایه می شود. جمع بندی به همراه ارایه پیشنهاداتی چهت کارهای آتی بخش پایانی مقاله می باشد.

علایم اصلی

n	تعداد کارها
s	زمان آماده سازی هر دسته
θ	هزینه هر بار ارسال
A	موعد تحویل پیش فرض کارها
α	جریمه افزایش هر واحد موعد تحویل
w_j	وزن کار زام
p_{jh}	امین امکان برای انتخاب زمان پردازش کار زام
v_{jh}	هزینه اختصاص منابع به کار زام
cap	ظرفیت هر وسیله
E	مجموعه کارهای به موقع
T	مجموعه کارهای تاخیری
p_j	زمان پردازش واقعی کار زام (متغیر تصمیم)
B^E	تعداد دسته های به موقع (متغیر تصمیم)
B^T	تعداد دسته های تاخیری (متغیر تصمیم)
d	موعد تحویل تخصیص داده شده به مشتری (متغیر تصمیم)
Z_{jh}	یک اگر زمان پردازش h ام به کار زام تخصیص یابد؛ صفر در غیر اینصورت
B	تعداد کل دسته ها

۲. تعریف مسئله

یک مساله زمانبندی زنجیره تامین (SCS^4) را در نظر بگیرید که در آن n کار توسط یک مشتری چهت پردازش به یک تولید کننده سفارش داده می شود. انقطاع در پردازش کارها مجاز نیست. چهت پردازش هر کار مقداری منابع صرف می شود. برای مدت زمان پردازش کار j H امکان ($h=1, \dots, H$) وجود دارد که به میزان منابع صرف شده برای آن کار بستگی دارد

⁵ Supply Chain Scheduling

این مقاله، مسئله تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، زمانبندی سفارشات بر روی یک ماشین و دسته بندی و زمانبندی ارسال سفارشات برای یک سیستم تولیدی "تولید برای سفارش" یا MTO¹ با هدف کمینه سازی کل هزینه های تخصیص موعد تحویل، مجموع وزنی تعداد تاخیرها و هزینه های ارسال مورد بررسی قرار گرفته است و مدل برنامه ریاضی مساله مذکور شامل یک مدل عدد صحیح یا IP²، یک الگوریتم شبیه چند جمله ای برنامه ریزی پویا (DP³) و یک الگوریتم تقریبی با زمان چند جمله ای کامل (FPTAS⁴) معرفی شده است. به طور خلاصه سیر تکاملی مساله مورد نظر در این مقاله با محوریت مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری به شرح زیر می باشد:

مسئله کمینه سازی تعداد کارهای تاخیری یکی از مسائل سیار قدیمی زمانبندی می باشد. این مسئله (یعنی $\sum_{j=1}^n U_j$) توسط الگوریتم چند جمله ای مور [۱۶] حل می شود. مسئله [۱۷] که سانی [۱۸] یک روش مبتنی بر DP و یک الگوریتم تقریبی با زمان چند جمله ای کامل (FPTAS) برای حل آن ارایه نموده و گز و لونر [۲۰-۱۹] آنرا دو بار بهبود داده اند. همچنین هله و بولفین [۲۱-۲۲] روش هایی مبتنی بر تکنیک B&B برای مسئله مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری در دو حالتی که زمان در دسترس کارها صفر یا غیر صفر است توسعه داده اند. جنبه دیگر توسعه مجموع وزنی کارهای تاخیری دسته بندی می باشد که هاج بام و لاندی [۲۳] یک الگوریتم شبیه چند جمله ای مبتنی بر تکنیک DP برای مسئله مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری در حالت تک ماشین با وجود زمان آماده سازی برای هر دسته ارایه و برآکر و کوالیو [۲۴] آنرا بهبود داده اند. آنها همچنین یک FPTAS برای حل مسئله مذکور معرفی کرده اند؛ اما به هر حال آنها هزینه های تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع و هزینه های ارسال را در نظر نگرفته اند. چن و کوالیو مسئله کمینه سازی تعداد کارهای تاخیری با زمان آماده سازی و موعد تحویل مشترک قابل تخصیص را بررسی نموده و یک الگوریتم برنامه ریزی پویا و یک FPTAS برای حل آن ارایه کرده اند. در مدل آنها به مساله ارسال و زمان های پردازش قابل کنترل توجه نشده است. از طرف دیگر؛ استینر و ژانگ [۲۵-۲۶] مسئله کمینه سازی مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری و هزینه های ارسال را با وجود زمان آماده سازی برای حالت های تک مشتری و چند مشتری بررسی نموده اند. آنها یک روش DP و یک FPTAS برای مسئله مذکور ارایه نموده اند. در این دو تحقیق اخیر مساله

¹ Make to Order

² Integer Programming

³ Dynamic Programming

⁴ Fully Polynomial Time Approximation Scheme

تحویل جدیدی در نظر بگیرد. کار j (Car j) دارای ضریب اهمیت w_j می‌باشد. اگر کاری بعد از موعد تحویل اختصاص داده شده (d) تحویل شود هزینه‌ای معادل w برای تولید کننده منظور می‌شود. بنابراین، یک کار تاخیری است اگر بعد از موعد تحویل تخصیص داده شده به مشتری ارسال شود در غیر اینصورت به موقع نامیده می‌شود. زمان تکمیل و ارسال هر دسته برابر زمان تکمیل آخرین کار آن دسته می‌باشد. یک دسته به موقع است اگر تمام کارهای آن دسته موعد تحویل بزرگتر از زمان ارسال آن دسته یا مساوی با آن داشته باشند. همچنین فرض می‌شود پردازش هر دسته نیاز به زمان آماده سازی دارد که مستقل از توالی دسته‌ها است.

بنابراین، موعدهای تحویل، انتخاب زمان پردازش برای هر سفارش، زمانبندی تولید و تعداد دسته‌ها، چهار نوع متغیر تصمیم برای مساله مذکور می‌باشند. هدف کمینه سازی مجموع هزینه‌های تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری و ارسال می‌باشد. با توجه به علاوه‌ی که چن برای مسائل زمانبندی با در نظر گرفتن ارسال در نظر گرفته است نمایش اختصاری مسئله مورد نظر در این مقاله به صورت زیر می‌باشد:

$$1/s/V(\infty, \text{cap}), \text{direct}/1/\alpha \max(0, d - A) + \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B$$

مساله می‌شود. با توجه به ساختار مساله وتابع هدف، مشابه بسیاری از مسائل زمانبندی از جمله ویژگی‌های بدیهی جواب بهینه برای مساله مذکور عدم وجود بیکاری عمدى می‌باشد. با توجه به اینکه (طبق فرض) همه کارها موعد تحویل یکسانی دارند، هر نوع دسته بندی صرفا شامل کارهای به موقع یا کارهای تاخیری می‌باشد (یعنی دسته‌ای وجود ندارد که هم شامل کارهای به موقع و هم شامل کارهای تاخیری باشد). ویژگی‌های زیر ساختار مساله مذکور را نشان می‌دهند:

ویژگی:
برای مساله

$$1/s/V(\infty, \text{cap}), \text{direct}/1/\alpha \max(0, d - A) + \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B$$

ترتیب پردازش کارها در دسته‌های به موقع و نیز دسته‌های تاخیری تاثیری در مقدار تابع هدف ندارد.

اثبات: جوابی را در نظر بگیرید که دسته بندی و زمانبندی کارهای به موقع و تاخیری مشخص است؛ اگر دو سفارش به موقع جابجا شوند؛ از آنجاییکه همه سفارشات موعد تحویل یکسانی

$p_j \in \{p_{j1}, p_{j2}, \dots, p_{jH}\}$ که در آن j زمان واقعی پردازش کار J_j می‌باشد؛ به عبارت دقیق‌تر می‌توان با افزایش منابع اختصاص داده شده به هر کار مدت زمان پردازش آنرا کاهش داد، ($p_{j1} > p_{j2} > \dots > p_{jH}$). با توجه به میزان منابع مورد نیاز، برای هر مدت زمان پردازش (p_{jh}) یک هزینه پردازش v_{jh} وجود دارد؛ بنابراین یک هزینه تخصیص منابع به میزان $v_{jh} = v_j$ باید در نظر گرفته شود اگر مدت زمان پردازش واقعی $p_j = p_{jh}$ لحاظ شود. به منظور کاهش هزینه‌های ارسال، کارهای پردازش شده (سفارشات آمده) در قالب دسته برای مشتری مربوطه ارسال می‌شوند.

ارسال همزمان چند سفارش در قالب یک دسته به منظور کاهش هزینه‌های ارسال که ممکن است منجر به افزایش تعداد کارهای تاخیری شود صورت می‌گیرد. تعداد وسایل به اندازه کافی فرض می‌شود اما برای هر وسیله ظرفیت cap در نظر گرفته می‌شود که بیانگر حداکثر تعداد کارهایی است که هر وسیله می‌تواند حمل نماید. موعد تحویل پیش فرض (قرارداد اولیه) همه سفارشات $A > 0$ می‌باشد. ارسال یک دسته برای مشتری دارای هزینه θ می‌باشد که مستقل از حجم دسته فرض می‌شود. تولیدکننده می‌تواند با پرداخت هزینه $\alpha \max(0, d - A)$ موعد

که منظور کمینه سازی مجموع هزینه‌های تخصیص موعد تحویل، تخصیص منابع، مجموع وزنی تعداد کارهای تاخیری و هزینه‌های ارسال در حالت تک ماشین با وجود یک مشتری، ارسال مستقیم دسته‌ها (direct) و وجود تعداد کافی وسیله حمل و نقل با محدودیت ظرفیت برای هریک و نیز عدم وجود محدودیت و شرایط خاص می‌باشد. منظور از ارسال مستقیم، ارسال تعدادی از سفارشات توسط یک وسیله به مشتری بدون وجود مسئله سپریابی می‌باشد.

استینر و ژانگ نشان داده‌اند که مسئله مورد نظر بدون وجود زمان‌های پردازش قابل کنترل (یعنی مساله $(1/s/V(\infty, \text{cap}), \text{direct}/1/\alpha \max(0, d - A) + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B)$ به طور معمولی NP-hard است. بنابراین مساله فوق الذکر نیز NP-hard می‌باشد.

۱-۲. ویژگی‌های جواب بهینه

قبل از مدل سازی بهتر است به بررسی ویژگی‌های جواب بهینه بپردازیم. بررسی ساختار جواب بهینه باعث کاهش فضای جستجو و ارایه روش‌های کارانتری اعم از روش‌های دقیق و ابتکاری برای

$$c_{ji} = \begin{cases} v_{ji} & i = 1, \dots, H, J_j \in E \\ w_j + v_{j1} & J_j \in T \end{cases}$$

با این رویکرد مدل برنامه ریاضی مساله مذکور که یک مدل عدد صحیح است به صورت زیر می باشد:

minimize

$$TC = \alpha(d - A) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{H+1} c_{ji} x_{ji} + \theta(B^E + B^T) \quad (1)$$

Subject to:

$$d \geq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^H c_{ji} x_{ji} + sB^E \quad (2)$$

$$d \geq A \quad (3)$$

$$B^E \geq \left(n - \sum_{j=1}^n x_{j,H+1} \right) / cap \quad (4)$$

$$B^T \geq \left(\sum_{j=1}^n x_{j,H+1} \right) / cap \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{H+1} x_{ji} = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x_{ji} &\geq 0 \text{ integer} \\ B^E &\geq 0, \text{integer} \\ B^T &\geq 0, \text{integer} \\ d &\geq 0, \text{integer} \end{aligned} \quad j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, H+1 \quad (7)$$

رابطه ۱ تابع هدف شامل کمینه کردن مجموع هزینه ها می باشد را نشان می دهد. رابطه ۲، محدودیت محاسبه زمان ختم دسته های به موقع و موعد تحویل تخصیص داده شده را نشان می دهد که بر اساس مجموع زمان های پردازش و زمان های آماده سازی کارهای به موقع مشتری محاسبه شده است. موعد تحویل تخصیص داده شده حداقل به اندازه موعد تحویل پیش فرض می باشد که در رابطه ۳ آورده شده است. روابط ۴ و ۵ محدودیت های مربوط به تعداد دسته های به موقع و تاخیری می باشد. رابطه ۶ نشان می دهد که هر کار باید به موقع یا تاخیری باشد. روابط ۷ نیز وضعیت متغیرها را نشان می دهند.

۴. روش برنامه ریزی پویا

در این بخش یک الگوریتم برنامه ریزی پویای روبه جلو برای مساله بیان شده ارایه می شود. الگوریتم با ایجاد همزمان دسته

دارند مقدار هیچکدام از اجزا تابع هدف تغییری نمی کند بنابراین ترتیب پردازش کارها در دسته های به موقع در مقدار تابع هدف تاثیری ندارد. به طور مشابه نیز می توان نشان داد جابجایی سفارشات در دسته های تاخیری تاثیری در تابع هدف ندارد.

ویژگی ۲ (مشابه ویژگی ۳.۱ استینر و ژانگ):

برای مساله

$$\begin{aligned} 1/s/V(\infty, cap), direct/1/\alpha \max(0, d - A) \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B \end{aligned}$$

جواب بهینه ای وجود دارد که در آن کارهای تاخیری بعد از کارهای به موقع زمانبندی و ارسال می شود.

اثبات: زمانبندی و ارسال دسته های تاخیری پس از دسته های به موقع باعث ذخیره زمان برای انجام کارهای به موقع می شود.

براساس ویژگی های یک و دو می توان تمام دسته های به موقع را به عنوان مجموعه E و تمام دسته های تاخیری را به عنوان مجموعه T در نظر گرفت؛ بنابراین E قبل از T زمانبندی می شود.

ویژگی ۳:

برای مساله

$$\begin{aligned} 1/s/V(\infty, cap), direct/1/\alpha \max(0, d - A) \\ \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B \end{aligned}$$

جواب بهینه ای وجود دارد که در آن کارهای تاخیری در زمان نرمال پردازش می شوند.

اثبات: پردازش کارهای تاخیری در زمان غیر نرمال صرفاً باعث افزایش هزینه های تخصیص زمان های پردازش می شود.

۳. مدل برنامه ریزی عدد صحیح

در این بخش مدل برنامه ریاضی مساله مذکور آورده می شود. با توجه به ساختار مساله و ویژگی های بیان شده، جهت مدل سازی مساله از این حقیقت کمک می گیریم که کلیه کارها به دو مجموعه اصلی E (شامل کارهای به موقع) و T (شامل کارهای تاخیری) تقسیم می شوند. به منظور کاهش تعداد محدودیت ها و متغیرهای مساله می توان از این ایده استفاده کرد که اختصاص هر سفارش به مجموعه های E یا T دارای هزینه ای (شامل هزینه های تخصیص منابع و هزینه های دیرکرد) به صورت زیر می باشد ($i = 1, \dots, H+1$).

نمایید و در غیر اینصورت دسته جاری را بیندید و کار جاری را شروع یک دسته جاری به موقع در نظر بگیرید. در هر مورد H حالت برای زمان پردازش کار جاری در نظر بگیرید.

- کار $m+1$ را به عنوان کار تاخیری در مجموعه T با زمان نرمال زمانبندی نمایید.

اصل غلبه ۱:

برای هر دو حالت $\{m, t', n^T, TC'\}$ و $\{m, t, n^T, TC\}$ که در آن $t' \leq t$ باشد حالت شامل TC' را حذف نمایید.

های به موقع و تاخیری اجرا می شود. آخرین دسته های به موقع و تاخیری، دسته های به موقع و تاخیری جاری نامیده می شوند. همچنین در هر مرحله در مورد یک کار تصمیم گیری می شود که ما آنرا کار جاری می نامیم. $\{m, t, n^T, TC\}$ نمایش یک زمانبندی جزئی روی مجموعه کارهای $\{1, \dots, m\}$ با کل هزینه n^T و زمان تکمیل t برای کارهای به موقع و TC تعداد کارهای تاخیری در مجموعه T می باشد. حالت های تولید شده برای $\{m, t, n^T, TC\}$ در مجموعه $\mathcal{S}^{(m)}$ بازگشته می شوند. برای هر توالی جزئی $\{m, t, n^T, TC\}$ توالی های جزئی با زمانبندی کار $m+1$ به طرق زیر انجام می شود:

- اگر تعداد کارهای دسته جاری کمتر از cap است کار $m+1$ را به عنوان کار به موقع در دسته جاری زمانبندی

Dynamic Programming Algorithm

(Initializing) Set: $\mathcal{S}^{(0)} = \{0, 0, 0, 0\}$.

(Generation) Generate set $\mathcal{S}^{(m)}$ from $\mathcal{S}^{(m-1)}$:

For each job (i.e. J_i)

Set $S \leftarrow \emptyset$

For each state $\{m-1, t, n^T, TC\}$ in $\mathcal{S}^{(m-1)}$:

(Operation) Schedule next job (i.e. J_i):

/Schedule job J_i in E :

For each processing time of job J_i (i.e. for $h = 1$ to H)

$S \leftarrow S \cup \{j, t', n^T, TC'\}$

where:

$$t' = t + p_{jh} + \left(\left\lceil \frac{j-n^T}{cap} \right\rceil - \left\lceil \frac{j-n^T-1}{cap} \right\rceil \right) s$$

$$TC' = TC + \alpha \max(0, \min(t' - t, t' - A)) + \left(\left\lceil \frac{j-n^T}{cap} \right\rceil - \left\lceil \frac{j-n^T-1}{cap} \right\rceil \right) \theta + v_{jh}$$

End for

/Schedule job J_i in T :

$S \leftarrow S \cup \{j, t, n^T + 1, TC'\}$

where:

$$TC' = TC + w_j + \left(\left\lceil \frac{n^T+1}{cap} \right\rceil - \left\lceil \frac{n^T}{cap} \right\rceil \right) \theta + v_{j1}$$

(Elimination)

For any two states $\{m, t, n^T, TC\}$ and $\{m, t', n^T, TC'\}$ with $t \leq t'$ and $TC \leq TC'$, eliminate the one with TC' from set S .

(Update $\mathcal{S}^{(m)}$) set $\mathcal{S}^{(m)} = S$.

End for

End for

(Result) Select the best state from the final stage (state with the smallest v in the set $\mathcal{S}^{(k)}$) and trace back to obtain the optimal schedule.

$$P = ns + \sum_{j=1}^n p_{j1}$$

$$A = \alpha \left(ns + \sum_{j=1}^n p_{j1} - A \right)$$

$$v_H = \sum_{j=1}^n v_{jh}$$

قضیه ۱:

الگوریتم DP جواب بهینه مساله

$$1/s/V(\infty, cap), direct/1/\alpha \max(0, d - A)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^H v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B$$

را در زمان $O(n^2 \min\{P, A + v_H + W + \theta\})$ پیدا

می کند که در آن:

متغیرهای آن از حالت صحیح خارج شده اند و TC^* جواب بهینه مساله اصلی می باشد.

۱- با استفاده از رویه بهبود حدود (BIP) حدود فوق به $BIP \leq TC^* \leq 3v$ بهبود می یابد که در آن v خروجی می باشد.

۲- با استفاده از حدود فوق، الگوریتم تقریبی به صورت FPTAS برای مساله مذکور توسعه می یابد.

۱-۵. حدود اولیه

به منظور تدوین FPTAS با رویکرد مذکور نیاز به حدود اولیه ای داریم که در زمان چند جمله ای قابل محاسبه باشند. یک امکان برای یافتن حدود اولیه استفاده از مدل IP با آزاد سازی متغیرها از حالت عدد صحیح می باشد. با آزاد سازی متغیرها از حالت عدد صحیح مدل IP به مدل LP تبدیل می شود که توسط روش های بیضی و نقاط داخلی در زمان چند جمله ای قابل حل می باشد. واضح است که جواب بهینه مساله LP حد پایینی برای مساله IP (مساله اصلی) می باشد.

قضیه ۲:

مدل IP ارایه شده در بخش ۳ که در آن متغیرها به صورت متغیرهای مثبت از حالت صحیح بودن خارج شده اند) حد پایینی برای مساله ارایه می کند به طوری که: $OPT^{LP} \leq TC^* \leq OPT^{LP} + 2\max_{j \in H} \{v_{jH}, v_{j1} + w_j\} + \theta$

این فرایند به زمان $O(\ln^3 / \ln(n))$ نیاز دارد که در آن L تعداد بیت های مورد نیاز برای ثبت کلیه ضرایب مساله است.

اثبات:

همانطور که اشاره شد واضح است که $OPT^{LP} \leq TC^*$ یک جواب پایه LP دارای این ویژگی است که تعداد متغیرهایی که مقدار مثبت می گیرند حداکثر به تعداد سطرهای ماتریس محدودیت (تعداد محدودیتها) است. تعداد محدودیت های مدل LP $n+4$ می باشد؛ بنابراین در یک جواب پایه حداکثر $n+4$ تا از متغیرهای مساله مثبت می شوند.

از آنجایی که d مثبت است از بین متغیرهای x_{ji} ($i=1, \dots, H+1; j=1, \dots, n$) حداکثر B^E و B^T عدد از آنها $n+3$ عدد از آنها مثبت است. همچنین با توجه به اینکه حداقل یکی از متغیرهای x_{ji} و B^E مثبت است، حداکثر $n+2$ عدد از متغیرهای x_{ji} مثبت است. با توجه به رابطه ۶ هر کار (J_i) حداقل یک متغیر مثبت از بین متغیرهای $\dots, i=1, n$ مثبت است. با توجه به رابطه ۶ هر کار (J_i) حداقل یک متغیر مثبت از بین متغیرهای $\dots, i=1, n$ مثبت است.

$$W = \sum_{j=1}^n w_j$$

$$\vartheta = \lceil n/cap \rceil \theta$$

اثبات:

واضح است که رویه Generation وقت گیرترین بخش الگوریتم است. در شروع هر تکرار کل حالت های امکان پذیر برای $\{t, n^T, TC\}$ دارای حد بالایی است که به شرح زیر تعیین می شود:

حداکثر $(P+1)$ مقدار مختلف برای t حداکثر 1 حالت مختلف برای n^T و حداکثر $A + v_H + W + \vartheta$ مقدار مختلف برای TC قابل تصور است. با توجه به قاعده حذف حداکثر $\min\{(P+1), A + v_H + W + \vartheta\}$ حالت برای $\{t, n^T, TC\}$ با کار و n^T یکسان ولی t و TC مختلف امکان پذیر است. بنابراین تعداد کل حالت های در ابتدای هر مرحله $(n+1)\min\{(P+1), A + v_H + W + \vartheta\}$ می باشد. در هر تکرار تعداد عملیات های برای تولید حالت های حداکثر $O(H+1)$ است؛ بنابراین از آنجایی که حداکثر 1 مرحله وجود دارد الگوریتم فوق در زمان $O(Hn^2 \min\{P, A + v_H + W + \vartheta\})$ قابل اجرا است که برای مقدار ثابت H $O(n^2 \min\{P, A + v_H + W + \vartheta\})$ می شود. با توجه به اینکه پیچیدگی مساله شبه چند جمله ای است مساله به طور معمولی NP-hard است.

۵. ارایه الگوریتم تقریبی کامل چند جمله ای

در این بخش یک FPTAS مبتنی بر DP با رویکرد بخش بندی ثابت فاصله ها^۱ که توسط ساهنی [۲۷] پیشنهاد داده شد است ارایه می شود. ما برای توسعه FPTAS سه گام به شرح زیر استفاده می نماییم:

با استفاده از تکنیک LP relaxation و روش گرد کردن (Rounding) حدود اولیه ای برای جواب بهینه مساله مذکور به صورت زیر به دست می آید:

$$OPT^{LP} \leq TC^* \leq OPT^{LP} + 2\max_{j \in H} \{v_{jH}, v_{j1} + w_j\} + \theta$$

$$OPT^{LP} \leq TC^* \leq OPT^{LP} + 2\max_{j \in H} \{v_{jH}, v_{j1} + w_j\} + \theta$$

که در آن OPT^{LP} جواب بهینه مساله اصلی می باشد که

¹ Static Partitioning Interval

حدود مساله اصلی و مدل LP برقرار است. روش نقطه داخلی برای حل LP به زمان $O(Ln^3/\ln(n))$ نیاز دارد که در آن n تعداد متغیرهای مساله و L اندازه مساله بر اساس بیت های دستگاه دودویی می باشد؛ بنابراین پیچیدگی زمانی مدل فوق $O(H^3Ln^3/\ln(n))$ است که برای مقدار ثابت H $O(Ln^3/\ln(n))$ می شود.

۵. بهبود حدود اولیه

در این بخش یک الگوریتم به نام "الگوریتم بهبود حدود" یا BIP برای بهبود حدود اولیه به نام معروفی می شود. این الگوریتم در $R(u, \varepsilon)$ استفاده می کند. الگوریتم های مذکور حدود اولیه را می گیرند و مقداری مانند v را ارایه می دهند به طوری که $v < TC^*$.

فرض کنید u مقداری بین $OPT^{LP} + 2\max_{jH} \{v_{jH}, v_{jI} + w_j\} + \theta$ و OPT^{LP} باشد. ما در ابتدا الگوریتم دامنه $(R(u, \varepsilon))$ را معرفی می کنیم که در آن u و ε (با مقدار اختیاری $\varepsilon = 0.25$) ورودی های الگوریتم می باشد. این الگوریتم مشخص می کند که آیا مساله اصلی دارای جواب بهینه ای به صورت $TC^* \leq u$ است یا اینکه تضمین می کند:

$$TC^* > (1 - \varepsilon)u$$

$H+1$ دارد؛ بنابراین حداکثر ۴ متغیر از متغیرهای x_{ji} عددی بین صفر و یک (و نه خود صفر یا یک) می گیرند که این نشان می دهد برای حداکثر دو کار، مقدار x_{ji} عددی بین صفر و یک است.

در مورد هر یک از این کارها، یکی از متغیرهای x_{ji} با اندیس بزرگتر i را به یک گرد می کنیم و سایر متغیرهای x_{ji} آن کار را صفر در نظر می گیریم؛ در اینصورت تغییرات هر یک از اجزاء هزینه به این شرح می باشد:

با توجه به اینکه گرد کردن به یک در متغیر با اندیس i بالاتر انجام می شود زمان پردازش مربوط به آن کار یا کاهش می یابد (اگر $i=H+1, \dots, H$) یا از بین مجموعه کارهای به موقع حذف می شود (اگر $i=H+1$) که در هر صورت هزینه های تخصیص موعد تحويل افزایش نمی یابد. همچنین از آنجاییکه گرد کردن به یک برای حداکثر دو کار اتفاق می افتد؛ هزینه های تخصیص منابع و تعداد کارهای تاخیری حداکثر به اندازه $2\max_{jH} \{v_{jH}, v_{jI} + w_j\}$ افزایش می یابد. در خصوص هزینه های ارسال می توان گفت از مجموع روابط ۴ و ۵ در مدل LP مربوطه داریم:

$B^E + B^T \geq (n/cap)$ بنابراین در جواب بهینه LP، تعداد ارسال ها حداقل به اندازه n/cap است. از آنجایی که در جواب IP (یعنی مساله اصلی) تعداد ارسال ها $[n/cap] \leq (n/cap)$ است و $[n/cap] \leq (n/cap)$ بنابراین با تبدیل جواب LP به عدد صحیح حداکثر هزینه یک ارسال به هزینه LP افزوده می شود. بنابراین رابطه فوق (یعنی $OPT^{LP} \leq TC^* \leq OPT^{LP} + 2\max_{jH} \{v_{jH}, v_{jI} + w_j\} + \theta$) بین

الگوریتم دامنه $(R(u, \varepsilon))$

Range Algorithm $R(u, \varepsilon)$

(Initializing) Set: $S^{(0)} = \{0, 0, 0, 0\}$.

(Partitioning) Partition the interval $[0, u]$ into $[n/\varepsilon]$ equal intervals of size $u\varepsilon/n$, with the last one being possibly smaller.

(Generation) Generate set $S^{(m)}$ from $S^{(m-1)}$.

For each job (i.e. j)

Set $S \leftarrow \emptyset$

For each state $\{m-1, t, n^T, TC\}$ in $S^{(m-1)}$

(Operation) The same as those in DP

(Elimination):

1. Eliminate any state $\{t, n^T, TC\}$ if $TC > u$.
2. If more than one state has a TC value that falls into the same subinterval of $[0, u]$, then discard all but one of these states, keeping only the representative state with the smallest t coordinate for each interval.
3. For any two states $\{m, t, n^T, TC\}$ and $\{m, t', n^T, TC'\}$ with $t \leq t'$ and $TC \leq TC'$, eliminate the one with TC' from set S .

(Update $S^{(m)}$) set $S^{(m)} = S$.

End for

End for

(Result) If $S^{(m)} = \emptyset$, report $TC^* > (1 - \varepsilon)u$; otherwise report $TC^* \leq u$

به قاعده حذف ۱ جوابی وجود ندارد که کمتر از u باشد؛ همچنین با در نظر گرفتن خطای ϵ که در قاعده حذف ۲ وجود دارد جوابی وجود ندارد که کمتر از $(1-\epsilon)u$ باشد. با توجه به قاعده حذف ۲، در ابتدای هر مرحله حداکثر $n/\epsilon + 1$ حالت وجود دارد. تعداد عملیاتی که در هر مرحله انجام می‌شود $O(H)$ است؛ بنابراین با توجه به اینکه $n+1$ مرحله وجود دارد پیچیدگی زمانی الگوریتم $O(Hn^2/\epsilon)$ است که برای مقدار ثابت $O(n^2/\epsilon) \cdot H$ می‌باشد.

قضیه ۳:

اگر $S^{(n)} = \emptyset$ باشد آنگاه $TC^* > (1-\epsilon)u$ ؛ در غیر اینصورت $TC^* \leq u$ پیچیدگی زمان $O(n^2/\epsilon) \cdot RA$ می‌باشد.

اثبات:

اگر $S^{(n)} \neq \emptyset$ باشد حداقل یک حالت وجود دارد که حذف نشده است و TC برای این حالت در یکی از بازه‌های $[0, u]$ قرار گرفته است و داریم: $S^{(n)} = \emptyset$. $TC^* \leq TC \leq u$.

الگوریتم بهبود حدود (BIP)

Bound Improvement Procedure (BIP)

- 1) Set $LB = OPT^{LP}$, $UB = OPT^{LP} + 2\max \max\{v_{jH}, v_{j1} + w_j\} + \theta$
 - 2) If $UB \leq 3LB$ go to Step 5
 - 3) Set $u = LB$ and $\epsilon = 0.25$
 - 4) While $R(u, \epsilon)$ reports that $TC^* > u(1 - \epsilon)$
 - Let $u = 2u$
 - End
- Set $v = u$

قبل اشاره شد که $B^E + B^T \geq (n/cap)$ با توجه به اینکه $OPT^{LP} \geq n\theta/cap \geq (B^E + B^T)/\theta$ است بنابراین $OPT^{LP} \geq (B^E + B^T)$ این صورت می‌توان پیچیدگی BIP را به صورت $O\left(n^2 \log \left(\frac{1}{n} (Cap \max \max\{v_{jH}, v_{j1} + w_j\}/\theta)\right)\right)$ ساده نمود.

قضیه ۴:

BIP حد پایینی (v) برای مساله اصلی ارایه می‌کند به طوری که $v < TC^* < 3v$ بین الگوریتم به $O\left(n^2 \log \left(\frac{1}{n} (Cap \max \max\{v_{jH}, v_{j1} + w_j\}/\theta)\right)\right)$ زمان نیاز دارد.

اثبات:

صحت الگوریتم از قضیه ۱ کوالیو [۱] قابل استخراج است. همچنین در مورد پیچیدگی الگوریتم، کوالیو نشان داده است که پیچیدگی BIP , $O(P(L) \log \frac{UB}{LB})$ می‌باشد که در آن $P(L)$ مرتبط با پیچیدگی الگوریتم دامنه می‌باشد.

بنابراین: $O\left(n^2 \log \left(\frac{\max \max\{v_{jH}, v_{j1} + w_j\} + \theta}{OPT^{LP}}\right)\right)$ پیچیدگی الگوریتم BIP در این مقاله می‌باشد.

۳-۵. الگوریتم تقریبی مبتنی بر DP

تاکنون با استفاده از حدود اولیه و BIP یک 3-approximation برای مساله توسعه داده شده است. در نهایت برای ارایه FPTAS الگوریتمی به نام DPAA مبتنی بر DP معرفی می‌شود که حدود $v < TC^* < 3v$ را می‌گیرد و یک FPTAS برای مساله اصلی ارایه می‌کند.

DP-based Approximation Algorithm (DPAA)

(Initializing) Set: $S^{(0)} = \{0, 0, 0, 0\}$.

(Partitioning) Partition the interval $[0, (1 + \epsilon/3)3v]$ into $[3/\epsilon + 1]n$ equal intervals of size $v\epsilon/n$, with the last one being possibly smaller.

(Generation) Generate set $S^{(m)}$ from $S^{(m-1)}$:

For each job (i.e. J_j)

Set $S \leftarrow \emptyset$

For each state $\{m-1, t, n^T, TC\}$ in $S^{(m-1)}$

(Operation) The same as those in DP

(Elimination):

1. Eliminate any state $\{t, n^T, TC\}$ if $TC > u$.

2. If more than one state has a TC value that falls into the same subinterval of $[0, (1 + \varepsilon/3)3v]$, then discard all but one of these states, keeping only the representative state with the smallest t coordinate for each interval.
3. For any two states $\{m, t, n^T, TC\}$ and $\{m, t', n^T, TC'\}$ with $t \leq t'$ and $TC \leq TC'$, eliminate the one with TC' from set S .

(Update $S^{(m)}$) set $S^{(m)} = S$.

End for

End for

(Result) Select the state with the smallest v in the set $S^{(n)}$ and track back to obtain the final schedule

بهینه مساله اصلی.

قضیه ۵:

۲- اجرای الگوریتم BIP به منظور بهبود حدود اولیه به

$v \leq TC^* \leq 3v$ صورت

۳- اجرای DPA با به کار گیری حدود $v \leq TC^* \leq 3v$

قضیه ۶:

الگوریتم اصلی (MA) یک FPTAS برای مساله

برای هر $\varepsilon \geq 0$ ، $O(n^2/\varepsilon)$ یک جواب تقریبی برای مساله

$$\frac{\frac{1}{V}(\infty, cap), direct}{\alpha} \max(0, d - A) + \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B$$

در زمان $O(n^2/\varepsilon)$ پیدا می کند.

اثبات:

مشابه اثبات قضیه ۳.

$$\frac{\frac{1}{V}(\infty, cap), direct}{\alpha} \max(0, d - A) + \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B$$

ارایه می دهد که پیچیدگی زمانی آن برابر است با:

۴-۵. الگوریتم اصلی (MA)

۱- حل مدل IP و به دست آوردن حدود اولیه برای جواب

$$O\left(n^2 \left(\frac{n}{\ln(n)} L + \log \left(\frac{1}{n} (\text{Cap} \max \max\{v_{jh}, v_{j1} + w_j\} / \theta) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)$$

همچنین با استفاده از DP مذکور و روش های BIP یک FPTAS برای مساله ارایه شد. می توان به منظور انجام فعالیت های آتی به ارایه یک FPTAS با پیچیدگی زمانی $O(n^2 \left(\frac{n}{\ln(n)} L + \log \left(\frac{1}{n} (\text{Cap} \max \max\{v_{jh}, v_{j1} + w_j\} / \theta) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \right))$ توسعه روش های دقیق (نظیر شاخه و کران) یا روش های فرابتکاری اشاره نمود همچنین می توان به تغییرتابع هدف زمانبندی یا تکمیل آن (نظیر مجموع وزنی دیرکردها و زودکردها) اشاره نمود. در این مقاله، تخصیص موعده تحویل گروهی برای کلیه سفارشات مشتری در نظر گرفته شد که به عنوان فعالیت آتی می توان برای هر کار یک موعده تحویل پیش فرض و یک مقدار بهینه در نظر گرفت و مدل را توسعه داد تعمیم مساله به حالت چند مشتری نیز از جمله فعالیت های آتی گسترش این تحقیق می باشد.

اثبات:

صحت الگوریتم و پیچیدگی زمانی آن از اجزاء الگوریتم منتج است.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله، مساله تصمیم گیری همزمان (یکپارچه) تخصیص موعده تحویل گروهی، تخصیص منابع، زمانبندی تولید و دسته بندی و زمانبندی ارسال با هدف کمینه سازی مجموع هزینه های مربوطه

$$\frac{\frac{1}{V}(\infty, cap), direct}{\alpha} \max(0, d - A)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H v_{jh} z_{jh} + \sum_{j=1}^n w_j U_j + \theta B$$

مورد بررسی قرار گرفت و پس از معرفی و ارایه ساختار جواب بهینه، یک مدل IP و یک روش DP برای مساله مذکور ارایه شد.

۷. مراجع

- [1] Hall, N.G., Potts, C.N., *Supply Chain Scheduling: Batching And Delivery*, Operations Research, 51 (4), 2003, pp. 566-584.

- [16] Moore, J.M., *An n Job, one Machine Sequencing Algorithm for Minimizing the Number of Late Jobs*, Management Science, 15, 1968, 102-109.
- [17] Karp, R.M., *Reducibility Among Combinatorial Problems*. R. E. Miller, J. W. Thatcher, Eds. Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 1972, 85-103.
- [18] Sahni, S.K., *Algorithms For Scheduling Independent Tasks*. Journal of the ACM, 23 (1), 1976, 116-127.
- [19] Gens, G.V., Levner, E.V., *Discrete Optimization Problems and Efficient Approximate Algorithms*, Engineering Cybernetics, 17 (6), 1979, 1-11.
- [20] Gens, G.V., Levner, E.V., *Fast Approximation Algorithm for Job Sequencing With Deadlines*. Discrete Applied Mathematics, 3 (4), 1981, pp. 313-318.
- [21] Hallah R.M., Bulfin R.L., *Minimizing the Weighted Number of Tardy Jobs on a Single Machine with Release Dates*, European Journal of Operational Research 176, 2007, pp. 727-744.
- [22] Hallah, R.M., Bulfin, R.L., *Minimizing the Weighted Number of Tardy Jobs on a Single Machine*, European Journal of Operational Research 145, 2003, 45-56.
- [23] Hochbaum, D.S., Landy, D., *Scheduling with Batching: Minimizing The Weighted Number of Tardy Jobs*, Operations Research Letters, 16, 1994, 79-86.
- [24] Brucker, P., Kovalyov, M.Y., *Single Machine Batch Scheduling to Minimize The Weighted Number of Late Jobs*, Mathematical Methods of Operation Research, 43, 1996, 1-8.
- [25] Steiner, G., Zhang, R., *Minimizing the Weighted Number of Late Jobs with Batch Setup Times and Delivery Costs on a Single Machine*, Multiprocessor Scheduling: Theory and Applications, Book edited by Eugene Levner, Itech Education and Publishing, Vienna, Austria, 2007.
- [26] Steiner, G., Zhang, R., *Approximation Algorithms for Minimizing the Total Weighted Number of Late Jobs with Late Deliveries in Two-Level Supply Chains*. Journal of Scheduling, 12(6), 2009, pp. 565-574.
- [27] Sahni, S.K., *Algorithms for Scheduling Independent Tasks*. Journal of the ACM, 23(1), 1976, pp. 116-127.
- [28] Anstreicher, K.M., *Linear Programming in $O(n^3/\ln(n)L)$ Operations*. SIAM J. Optim., 9(4), 1999, pp. 803-812.
- [29] Kovalyov, M.Y., *Improving the Complexities of Approximation Algorithms for Optimization Problems*. Oper. Res. Lett. 17, 1995, pp. 85-87.
- [30] Slotnick, S.A., Sobel, M.J., *Manufacturing Lead-Time Rules: Customer Retention Versus Tardiness Costs*. European Journal of Operational Research, 169, 2005, pp. 825-85.
- [31] Thomas, D.J., Griffin, P.M., *Coordinated Supply Chain Management*. European Journal of Operational Research, 94, 1996, pp. 1-15.
- [32] Chen, Z-L., *Integrated Production and Outbound Distribution Scheduling: Review and Extensions*, Operations Research, 58 (1), 2010, pp. 130-148.
- [33] Steiner, G., Zhang, R., *Minimizing the Weighted Number of Tardy Jobs with Due Date Assignment and Capacity-Constrained Deliveries*, Annals of Operations Research, 191(1), 2011, pp. 171-181.
- [34] Gordon, V., Proth, J.-M., Chu, C., A survey of the state-of-the-art of common due date assignment and scheduling research. European Journal of Operational Research 139 (1), 2002, pp. 1-25.
- [35] Li, J., Yuan, X., Lee, E.S., Xu, D., *Setting Due Dates to Minimize the Total Weighted Possibilistic Mean Value of the Weighted Earliness-Tardiness Costs on a Single Machine*. Computers and Mathematics with Applications 62, 2011, pp. 4126-4139.
- [36] Koulamas, C., *A Unified Solution Approach for the Due Date Assignment Problem with Tardy Jobs*, Int. J. Production Economics 132, 2011, pp. 292-295.
- [37] Wang, J.B., Wang, C., *Single-Machine Due-Window Assignment Problem with Learning Effect and Deteriorating Jobs*, Applied Mathematical Modelling 35 (8), 2011, pp. 4017-4022.
- [38] Zhu, Z., Sun, L., Chu, F., Liu, M., *Due-Window Assignment and Scheduling with Multiple Rate-Modifying Activities Under the Effects of Deterioration and Learning Mathematical Problems in Engineering*, art. 2011, No. 151563.
- [39] Li, S., Ng, C.T., Yuan, J., *Group Scheduling and Due Date Assignment on a Single Machine*, International Journal of Production Economics 130 (2), 2011, pp. 230-235.
- [40] Li, S., Ng, C.T., Yuan, J., *Scheduling Deteriorating Jobs with CON/SLK Due Date Assignment on a Single Machine*, International Journal of Production Economics 131 (2), 2011, pp. 747-751.
- [41] Li, J., Sun, K., Xu, D., Li, H., *Single Machine Due Date Assignment Scheduling Problem with Customer Service Level in Fuzzy Environment*, Applied Soft Computing, 10 (3) 2010, pp. 849-858.
- [42] Janiak, A., *Minimization of the Blooming mill Standstills-Mathematical Model*, suboptimal algorithms. Mechanika, 8 (2), 1989, pp. 37-49.
- [43] Vickson, R.G., *Two Single Machine Sequencing Problems Involving Controllable Job Processing Times*. AIIE Trans., 12 (3), 1980, pp. 258-262.