

NUMERICAL SIMULATION OF AXISYMMETRIC SUPERSONIC VISCOUS FLOW OVER BLUNT CONE BY USING DIAGONAL FOURTH ORDER FINITE DIFFERENCE METHOD

M.M. Rashidi

Associate professor, Bu-Ali Sina University,
Faculty of Engineering, Department of
Mechanical Engineering,
mm_rashidi@yahoo.com

M. Moradi Bastani

MSC, Bu-Ali Sina University
Faculty of Engineering, Department of
Mechanical Engineering,
m2_bastani@yahoo.com

Abstract: In this paper, by using diagonal fourth order central difference method and TLNS equations, the numerical solution of the steady viscous supersonic axisymmetric flow is implemented over blunt cone with shock-fitting method. Because of using high order terms of Taylor series in discretization of derivation, this method has high accuracy and low numerical error (dispersion error) with respect to low order method. Boundary-closure scheme has an important role in stability of this method. By Using coarse grid in this method, the results of numerical solution is very close to fine grid of implicit second order (Beam & Warming) method. High accuracy of this method is more visible than second order method when the grid is being fined. The convergence rate of this method is higher than second order method. This method can be converged to the machine accuracy.

شبیه‌سازی عددی جریان تقارن محوری مافوق صوت لزج بر روی دماغه سریخ با استفاده از روش اختلاف محدود مرتبه چهارم قطری شده

محمد مهدی رشیدی و مجید مرادی باستانی

چکیده: در این مقاله با استفاده از روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم قطری شده و معادلات ناویر-استوکس لایه-نازک (TLNS)، جریان تقارن محوری، دائم و لزج در رژیم مافوق صوت به صورت برازش شوک (Shock-Fitting) حول مخروط سریخ شبیه‌سازی شده است. به علت استفاده از عبارات مرتبه بالای بسط سری تیلور در انفصال عددی مشتقات، این روش نسبت به روش‌های مرتبه پایین دارای دقت بیشتر و نیز خطاهای عددی (خطای پراکندگی) کمتر می‌باشد. چگونگی انفصال عددی مشتقات در روی مرزها و نقاط مجاور آن در پایداری این روش نقش بسزایی دارد. با استفاده از این روش در یک شبکه نسبتاً درشت، می‌توان نتایجی بسیار نزدیک به نتایج شبکه ریز روش "بیم-وارمینگ" که دارای دقت مرتبه دوم است، به دست آورد. با ریز شدن شبکه در این روش، دقت بالای آن نسبت به روش "بیم-وارمینگ" محسوس‌تر خواهد شد. لازم به ذکر است که

تاریخ وصول: ۸۵/۱۰/۱۰

تاریخ تصویب: ۸۷/۱۲/۲۷

دکتر محمد مهدی رشیدی، دانشیار گروه مکانیک دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه بوعلی سینا همدان mm_rashidi@yahoo.com

مجید مرادی باستانی، کارشناسی ارشد تبدیل انرژی دانشگاه بوعلی سینا همدان m2_bastani@yahoo.com

سرعت همگرایی این روش نسبت به روش "بیم-وارمینگ" بیشتر می‌باشد. این روش قابلیت همگرایی تا دقت ماشین (Machine Accuracy) را نیز دارد.

واژه های کلیدی: معادلات TLNS، روش مرتبه چهارم قطری، جریان مافوق صوت لزج، برازش شوک

۱. مقدمه

مسئله یکی از خصوصیات مهم روش‌های عددی که از سوی محققین پیشنهاد شده‌است، دقت آنها در تقریب عددی معادلات حاکم می‌باشد. دقت روش‌هایی که در شبیه‌سازی عددی جریان‌های مغشوش، جریان‌های تراکم‌پذیر، بررسی لایه‌های مرزی گذرا و دینامیک گردابه‌ها و ... بکار می‌روند، بسیار مهم می‌باشد. در سال ۱۹۹۲ گروهی از روش‌های تفاضل محدود مرتبه بالا با دقت بسیار خوبی توسط لی [۱] ارائه شد. اهمیت روش‌های با دقت مرتبه بالا باعث توسعه انواع روش‌های تقریبی مرتبه بالا و بررسی جامع آنها شد [۲]. در بین روش‌های با دقت مرتبه بالا، روش تفاضل محدود مرکزی فشرده (Compact) برای حل عددی جریان‌های تراکم‌پذیر با استفاده از لزجت مصنوعی و فیلترهای عددی در روش تسخیر شوک مورد توجه قرار گرفت [۳-۵]. در این روش‌ها، از تعداد نقاط کمتر با دقت بالاتر نسبت به پهنای بازه مشابه در حل میدان جریان استفاده می‌شود؛ بدین ترتیب که از ترکیب خطی مقادیر تابع در سه (یا چند) نقطه متوالی برای تقریب خطی مقادیر مشتق تابع در همان سه (یا چند) نقطه با دقت مرتبه بالاتر استفاده می‌شود.

زونگ برای شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) لایه‌مرزی ماورای صوت گذرا بر روی یک دماغه با شوک کمانی قوی از یک روش تفاضل محدود برازش شوک با دقت مرتبه بالا استفاده کرد [۶ و ۷]. با توجه به حالت مغشوش جریان و نیز لایه‌مرزی گذرا، استفاده از روش با دقت مرتبه بالا بسیار لازم می‌باشد.

در سال‌های اخیر محققان با ترکیب روش‌های تفاضل محدود مرتبه بالا با روش‌هایی نظیر **WENO**، **ENO**، **Roe**، **TVD** و ... به بررسی معادلات مدل پرداخته‌اند. در مرجع [۸] با استفاده از ترکیب روش **ENO** و روش تفاضل محدود فشرده بالادست مرتبه پنجم، نوسانات غیرفیزیکی به‌وجود آمده در حل معادله اوپلر یک‌بعدی بررسی شده است. در سال ۲۰۰۷، کوستا و همکارش با استفاده از روش **WENO** و ترکیب آن با روش تفاضل مرکزی مرتبه بالا به حل مسایل بقایی غیرخطی پرداختند. آنها معادله غیردائم اوپلر یک بعدی را با ترکیب روش تفاضل محدود **WENO** مرتبه پنج و تفاضل محدود مرکزی مرتبه شش (روش هیبرید) مورد بررسی قرار دادند [۹].

در این تحقیق با استفاده از روش تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم و نیز به کمک روش قطری (Diagonal)، به حل عددی معادلات TLNS در حالت تقارن محوری لزج به‌صورت برازش شوک پرداخته می‌شود. در این روش تمامی مشتقات مورد استفاده در

روابط معادلات حاکم از قبیل عبارت‌های شار لزج، غیرلزج، متریکها، ماتریس‌های حل‌کننده و جملات اتلاف مصنوعی و ... بایستی به صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم منفصل شوند. انفصال عددی مشتقات در نقاط مرزی و نزدیک آنها نقش مهمی در پایداری حل عددی دارد، بطوریکه در برخی موارد بایستی به‌منظور پایداری حل، دقت روش در این نقاط پایین آورده شود.

با توجه به اینکه روش‌های تفاضل مرکزی ذاتاً دارای خطاهای پراکندگی (Dispersion Error) می‌باشند، بنابراین به‌منظور کم‌کردن دامنه نوسانات ناشی از حل عددی، بایستی عبارت‌های اتلاف مصنوعی به معادلات انفصالی این روش‌ها اضافه شود [۱۰]. از آنجایی که در انفصال عددی مشتقات به‌صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم، از عبارت‌های مرتبه بالای بسط سری تیلور استفاده می‌شود، بنابراین مقدار خطایی که به‌صورت پراکندگی وارد حل می‌گردد، کوچک‌تر است و از اینرو می‌توان نتایجی با دقت بالاتر ارائه کرد. یکی از متغیرهای جریان که نسبت به مرتبه دقت روش بسیار حساس است و کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد، دمای روی سطح (در حالت آدیاباتیک) می‌باشد. علت استفاده از روش برازش شوک نیز در این است که متغیرهای جریان به‌خصوص دمای روی سطح دارای دقت بالاتری نسبت به روش تسخیر شوک می‌باشند. در روش برازش شوک، محل شوک به عنوان مرز خارجی میدان حل قرار می‌گیرد، بنابراین خطاهایی که در روش تسخیر شوک به واسطه نوسانات حل در محل شوک بوجود می‌آید، وارد مسأله نمی‌شود و این روش دارای دقت بالاتری می‌باشد.

یکی از مزیت‌های روش مرتبه چهارم نسبت به روش‌های متداول که عموماً مرتبه دو هستند، این است که در میدان حل عددی به تعداد نقاط کمتری نیازمندند، بدین ترتیب که با استفاده از این روش در یک شبکه نسبتاً درشت، می‌توان نتایجی بسیار نزدیک به نتایج شبکه ریز روش‌های متداول و با دقتی برابر با آنها به‌دست آورد. لازم به ذکر است که سرعت همگرایی این روش در یک شبکه درشت، بسیار بیشتر از روش‌های متداول در یک شبکه ریز است. در این روش با ریز شدن شبکه، دقت بالای روش محسوس‌تر می‌شود؛ بدین ترتیب که شیب کاهش خطا نسبت به روش‌های معمولی بیشتر می‌باشد. نکته مهم دیگر در این روش، قابلیت همگرایی آن تا دقت ماشین می‌باشد.

به‌منظور تأیید صحت محاسبات، روش مرتبه چهارم مورد مطالعه با روش "بیم-وارمینگ" که روشی با دقت مرتبه دوم است و به عنوان حل پایه مورد قبول واقع شده‌است [۱۱]، مقایسه می‌شود.

$$\mathbf{T} = (yJ)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(u_\eta \eta_y + v_\eta \eta_x) \\ 2\mu v_\eta \eta_y - 2\mu v / y \\ \mu u(u_\eta \eta_y + v_\eta \eta_x) + (2/3)\mu \\ (2v_\eta \eta_y - u_\eta \eta_x) - \\ (2/3)\mu v^2 / y + \gamma \mu \text{Pr}^{-1} e_\eta \eta_y \end{pmatrix} \quad (4)$$

مؤلفه‌های غیرفیزیکی جریان (پادوردا) U و V در دامنه محاسباتی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \quad (5)$$

با توجه به استفاده از روش برازش شوک و لزوم تشکیل مجدد شبکه بین جسم و شوک در هر بار تکرار برنامه، مشتقات ξ و η نسبت به زمان نیز وارد محاسبات خواهند شد. روابط مورد نیاز بین متغیرهای جریان با توجه به معادله حالت گاز ایده‌آل به‌صورت زیر می‌باشند:

$$T = (\gamma - 1)e, \quad E = \rho \left[e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (6)$$

به‌منظور بی‌بعد کردن متغیرها، پارامترهای بی‌بعد به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$x_i = \frac{x_i^*}{R_N}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{c_\infty} \sqrt{\gamma}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty} \\ T = \frac{T^*}{T_\infty}, \quad e = \frac{e^*}{c_\infty^2} \gamma, \quad p = \frac{p^*}{p_\infty} \quad (7)$$

جملات متریک عبارتند از:

$$\xi_x = -Jy_\eta, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \eta_x = Jy_\xi, \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (8)$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با:

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \quad (9)$$

۳. روش حل عددی

روش اختلاف محدود بکار رفته، روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم است که شامل الگوریتم فاکتورگیری شده تقریبی، ضمنی، غیرتکراری و به‌شکل دلتا می‌باشد. در این مقاله از روش پیشنهادی پولیام و شوسی [۱۲] برای قطری کردن ماتریس‌های ژاکوبین (قسمت ضمنی) استفاده شده‌است. فرمول‌بندی این روش عددی به صورت زیر است:

$$T_\xi \left[I + \Delta t \delta_\xi \Lambda_\xi^i \right] T_\xi^{-1} T_\eta \\ \left[I + \Delta t \delta_\eta \left(\Lambda_\eta^i - \frac{1}{\text{Re}} J^{-1} \Lambda_\eta^v \right) \right] T_\eta^{-1} \Delta \mathbf{U}^n = \text{RHS}$$

۲. معادلات حاکم

در این تحقیق، از معادلات "ناویر-استوکس لایه-نازک" (TLNS) که کارایی بسیار خوبی در شبیه‌سازی عددی جریان دارند، استفاده شده‌است. این معادلات که با حذف عبارتهای لزج در امتداد جریان به‌دست می‌آیند، در جریان‌هایی که دارای عدد رینولدز بالا هستند (لایه‌مرزی نازک)، تقریب بسیار مناسبی از معادلات کامل ناویر-استوکس می‌باشند. معادلات TLNS به‌فرم بقایی در مختصات کارتزین با توجه به تغییر متغیرهای زیر به مختصات منحنی‌الخط انتقال داده شده‌اند:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (1)$$

با در نظر گرفتن متغیر مستقل η در جهت عمود بر جسم و با صرف نظر کردن از مشتقات عبارتهای لزج در جهت جریان (ξ)، معادلات TLNS در مختصات محاسباتی و بی‌بعد شده برای حالت تقارن محوری به‌فرم بقایی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \mathbf{H} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} + \mathbf{T} \right] \quad (2)$$

بردار متغیرهای وابسته \mathbf{U} و بردارهای غیرلزج \mathbf{F} ، \mathbf{G} و \mathbf{H} ، همچنین بردارهای لزج \mathbf{S} و \mathbf{T} به فرم زیر ارائه می‌شوند:

$$\mathbf{U} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (E + p) U \end{pmatrix} \\ \mathbf{G} = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (E + p) V \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = (yJ)^{-1} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 \\ (E + p) v \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{S} = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) u_\eta + (\mu/3) \eta_x (\eta_y u_\eta + \eta_y v_\eta) \\ -(2/3) \mu \eta_x v / y \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) v_\eta + (\mu/3) \eta_y (\eta_y u_\eta + \eta_y v_\eta) - (2/3) \mu \eta_y v / y \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) \left[(u^2 + v^2)_\eta / 2 + \gamma \text{Pr}^{-1} e_\eta \right] \\ -(2/3) \mu (\eta_x u + \eta_y v) v / y + \\ \left(\mu/6 \left[\mu_x^2 (u^2)_\eta + \mu_y^2 (v^2)_\eta + 2\eta_x \eta_y (uv)_\eta \right] \right) \end{pmatrix}$$

در نقاط نزدیک مرز، دقت روش را یک مرتبه پایین آورد و از روابط با دقت مرتبه سوم به صورت زیر استفاده نمود:

در $i = 2$

$$\delta_{\xi} \Lambda_{\xi}^i = \frac{(-2\Lambda_{i-1,j} - 3\Lambda_{i,j} + 6\Lambda_{i+1,j} - \Lambda_{i+2,j})}{6\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^3 \quad (18)$$

در $i = \text{imax} - 1$

$$\delta_{\xi} \Lambda_{\xi}^i = \frac{(2\Lambda_{i+1,j} + 3\Lambda_{i,j} - 6\Lambda_{i-1,j} + \Lambda_{i-2,j})}{6\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^3 \quad (19)$$

برای ماتریس قطری در جهت η نیز از روابط مشابه استفاده می‌شود. با انفعال عددی سمت چپ رابطه (۱۰) با دقت مرتبه چهارم، باید سمت راست معادله را نیز با دقت مرتبه چهارم منفصل کرد. بنابراین انفعال عددی مشتقات بردارهای شار لزج و غیرلزج به صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم، یکی از مهمترین قسمت‌هایی است که بدون آنها دقت بالای روش معنی پیدا نمی‌کند. در نقاط داخلی ($3 < i < \text{imax} - 2$ و $3 < j < \text{jmax} - 2$)، بردارهای شار لزج و غیرلزج ($\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{S}$) مانند روابط (۱۶) و (۱۷) با دقت مرتبه چهارم گسسته‌سازی می‌شوند، اما انفعال عددی آنها در نقاط نزدیک مرز متفاوت با یکدیگر و نیز متفاوت با انفعال عددی ماتریس‌های قطری سمت چپ رابطه (۱۰) می‌باشد.

چنانچه در نقاط نزدیک مرز بردارهای شار غیرلزج (\mathbf{F}, \mathbf{G})، از روابط یکطرفه با دقت مرتبه چهارم استفاده شود، ناپایداری بوجود آمده در حل باعث واگرایی آن می‌شود. در این مورد حتی اگر دقت روش را یک مرتبه پایین آورد و از روابط با دقت مرتبه سوم استفاده کرد، حل واگرا خواهد شد. بنابراین به منظور پایداری روش در نقاط نزدیک مرز، باید دقت آن را پایین تر آورد و از دقت مرتبه دوم به صورت زیر استفاده کرد:

در $i = 2$ و $i = \text{imax} - 1$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} = \frac{(\mathbf{F}_{i+1,j} - \mathbf{F}_{i-1,j})}{2\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^2 \quad (20)$$

در $j = 2$ و $j = \text{jmax} - 1$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = \frac{(\mathbf{G}_{i,j+1} - \mathbf{G}_{i,j-1})}{2\Delta\eta} + O(\Delta\eta)^2 \quad (21)$$

در نقاط نزدیک مرز بردار شار لزج (\mathbf{S})، می‌توان از روابط یکطرفه با همان دقت روش استفاده کرد، بدون اینکه ناپایداری در روش ایجاد شود. بنابراین روابط زیر بکار گرفته شده‌است:

در $j = 2$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} = \frac{\begin{pmatrix} -3\mathbf{S}_{i,j-1} - 10\mathbf{S}_{i,j} + 18\mathbf{S}_{i,j+1} \\ -6\mathbf{S}_{i,j+2} + \mathbf{S}_{i,j+3} \end{pmatrix}}{12\Delta\eta} + O(\Delta\eta)^4 \quad (22)$$

در $j = \text{jmax} - 1$

$$RHS = -\Delta t \left[\delta_{\xi} \mathbf{F}^n + \delta_{\eta} \mathbf{G}^n + \mathbf{H}^n - \frac{1}{\text{Re}} (\delta_{\eta} \mathbf{S} + \mathbf{T})^n \right] + D_E \quad (10)$$

که در رابطه فوق Λ_{η}^i و Λ_{ξ}^i ، به ترتیب ماتریس قطری ژاکوبین A و ماتریس قطری ژاکوبین B می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Lambda_{\xi}^i = T_{\xi}^{-1} A T_{\xi}, \quad \Lambda_{\eta}^i = T_{\eta}^{-1} B T_{\eta} \quad (11)$$

عناصر موجود در روی قطر اصلی ماتریس‌های فوق، مقادیر ویژه ماتریس‌های ژاکوبین A و B می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

مقادیر ویژه ماتریس A:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = U, \quad \lambda_3 = U + cK_{\xi}, \quad \lambda_4 = U - cK_{\xi} \quad (12)$$

مقادیر ویژه ماتریس B:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = V, \quad \lambda_3 = V + cK_{\eta}, \quad \lambda_4 = V - cK_{\eta} \quad (13)$$

که در آنها داریم:

$$K_{\xi} = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \quad K_{\eta} = \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (14)$$

به منظور تسریع همگرایی حل معادلات در رابطه (۱۰)، در حالت لزج از مقدار ویژه تقریبی زیر به جای ماتریس‌های ژاکوبین لزج در قطر اصلی ماتریس قطری Λ_{η}^v استفاده شده‌است [۱۲]:

$$\lambda_{\eta}^v = \rho\mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (15)$$

برای رسیدن به دقت مرتبه چهارم، باید مشتقات موجود در سمت راست و سمت چپ رابطه (۱۰) را با دقت مرتبه چهارم منفصل کرد. با توجه به اینکه در این روش پهنای بازه انفعال عددی مشتقات به صورت تفاضل مرکزی در نقاط داخلی پنج نقطه است، بنابراین سمت چپ رابطه (۱۰) در نقاط داخلی ($3 < i < \text{imax} - 2$ و $3 < j < \text{jmax} - 2$) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\delta_{\xi} \Lambda_{\xi}^i = \frac{(-\Lambda_{i+2,j} + 8\Lambda_{i+1,j} - 8\Lambda_{i-1,j} + \Lambda_{i-2,j})}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^4 \quad (16)$$

$$\delta_{\eta} \Lambda_{\eta}^i = \frac{(-\Lambda_{i,j+2} + 8\Lambda_{i,j+1} - 8\Lambda_{i,j-1} + \Lambda_{i,j-2})}{12\Delta\eta} + O(\Delta\eta)^4 \quad (17)$$

همانطور که از روابط فوق مشاهده می‌شود، سمت چپ رابطه (۱۰) به صورت ماتریس‌های پنج‌قطری ظاهر می‌شوند که بایستی آنها را در جهت‌های ξ و η حل نمود. برای نقاط نزدیک مرز به دلیل عدم وجود نقاط کافی نمی‌توان از روابط فوق استفاده کرد. بنابراین به منظور پایداری روش و نیز حفظ پنج‌قطری بودن معادلات بایستی

$$(\Delta_{\xi} \nabla_{\xi})^3 \mathcal{J}U = \left(\begin{array}{l} (JU)_{i-3,j} - 6(JU)_{i-2,j} \\ +15(JU)_{i-1,j} - 20(JU)_{i,j} \\ + 15(JU)_{i+1,j} - 6(JU)_{i+2,j} \\ +(JU)_{i+3,j} \end{array} \right) / (\Delta_{\xi})^6 \quad (27)$$

در جهت η نیز به طریق مشابه عمل خواهد شد. به علت پهنای بازه هفت نقطه‌ای رابطه (۲۷)، نقاط نزدیک مرز در این حالت گستردگی و پیچیدگی بیشتری پیدا می‌کند. از آنجایی که در این مورد مرتبه مشتق در نقاط نزدیک مرز پایین آورده می‌شود، بنابراین بر اساس پهنای بازه مورد استفاده در هر یک از مشتقات، حالت‌های مختلفی در ترکیب آنها بوجود می‌آید. در زیر به چند نوع ترکیب در نقاط نزدیک مرز اشاره شده‌است:

- مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق چهارم در نقاط نزدیک‌تر مرز
- مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق سوم در نقاط نزدیک‌تر مرز
- مشتق پنجم در نقاط دورتر و مشتق دوم در نقاط نزدیک‌تر مرز

و ...

تمامی حالت‌های اشاره شده در فوق موجب واگرایی حل خواهند شد. بنابراین بهترین حالتی که باعث همگرایی روش می‌شود، به کار بردن مشتق چهارم در نقاط دورتر مرزها و مشتق سوم در نقاط نزدیک‌تر مرز می‌باشد.

ε_E در رابطه (۲۶)، ضریب میرایی است که در این مقاله به صورت $\varepsilon_E = \Delta t$ می‌باشد. به منظور افزایش نرخ همگرایی، گام زمانی (Δt) متغیر در نظر گرفته شده و بر اساس بیشینه مقادیر ویژه و عدد CFL به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Delta t = \frac{CFL}{\lambda_{max}} \quad (28)$$

پس از انفصال عددی سمت راست و سمت چپ رابطه (۱۰)، در نهایت مقادیر بردار جواب $U_{i,j}^{n+1}$ با حل دستگاه‌های پنج‌قطری معادلات برای هر نقطه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^n \quad (29)$$

لازم به ذکر است که تمامی روابط مربوط به انفصال عددی مشتقات با دقت‌های متفاوت، بر اساس بکارگیری نقاط قبل و بعد آن، با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به دست آورده شده‌است.

یکی دیگر از عبارتهای مهم در تأثیر دقت بالای روش، محاسبه فشار و دمای روی سطح است که در قسمت اعمال شرایط مرزی به آن پرداخته می‌شود. عبارتهای L2-Norm Error و $Error_{max}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$Error_{max}$ = گام زمانی / (حداکثر خطا در میدان حل)

$$L2\text{-Norm Error} = \sqrt{\frac{1}{m \times n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\Delta\Phi)^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\begin{pmatrix} -S_{i,j-3} + 6S_{i,j-2} - 18S_{i,j-1} \\ +10S_{i,j} + 3S_{i,j+1} \end{pmatrix}}{12\Delta\eta} + O(\Delta\eta)^4 \quad (23)$$

در تعریف بردارهای شار لزج (S, T) در (۴)، مشتقاتی وجود دارند که آنها نیز بایستی منفصل شوند. به این منظور در نقاط داخلی از روابطی مشابه (۱۶) و (۱۷) و در نقاط نزدیک مرز از روابطی مشابه (۲۲) و (۲۳) استفاده می‌شود. پس در این قسمت نه تنها پایین نیاوردن دقت روش در نقاط نزدیک مرز باعث ایجاد ناپایداری عددی نمی‌شود، بلکه اگر در این نقاط از روابطی مشابه (۱۸) و (۱۹) استفاده شود، باعث ایجاد نوسان در نتایج عددی خواهد شد.

در انفصال عددی متریک‌ها، در نقاط داخلی از روابطی مشابه (۱۶) و (۱۷)، در نقاط نزدیک مرز از روابطی مشابه (۲۲) و (۲۳) و در نقاط روی مرز از روابطی که همگی آنها با دقت مرتبه چهارم هستند استفاده شده‌است:

در $i=1$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\begin{pmatrix} -25x_{i,j} + 48x_{i+1,j} - 36x_{i+2,j} \\ +16x_{i+3,j} - 3x_{i+4,j} \end{pmatrix}}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^4 \quad (24)$$

در $i = imax$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\begin{pmatrix} 25x_{i,j} - 48x_{i-1,j} + 36x_{i-2,j} \\ -16x_{i-3,j} + 3x_{i-4,j} \end{pmatrix}}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi)^4 \quad (25)$$

برای سایر روابط متریک‌ها نیز به طریق مشابه عمل می‌شود. در این مورد نیز چنانچه در نقاط مرزی و نزدیک مرز دقت روش پایین آورده شود، باعث ایجاد نوسان در نتایج حل عددی خواهد شد. همانطور که قبلاً ذکر شد، به منظور کاهش خطای پراکندگی در روش‌های تفاضل مرکزی، بایستی جملات اتلاف مصنوعی به آنها اضافه شوند. در روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم مورد استفاده در این مقاله نیز جملات اتلافی خطی به صورت صریح به سمت راست معادله (۱۰) اضافه می‌شود. جملات اتلافی از طرفی باید نوسانات ذاتی ناشی از روش را برطرف کنند و از طرف دیگر دقت روش را تغییر ندهند. بنابراین با استخراج معادله اصلاحی (Modified equation) روش مورد مطالعه توسط نرم‌افزار Mathematica، و نیز با توجه به جمله خطای غالب در آن، رابطه زیر به عنوان اتلاف عددی صریح به دست آورده شده‌است:

$$D_E = -\varepsilon_E J^{-1} \left[(\Delta_{\xi} \nabla_{\xi})^3 + (\Delta_{\eta} \nabla_{\eta})^3 \right] J U \quad (26)$$

در رابطه فوق که فقط برای نقاط داخلی ($4 < i < imax - 3$) و ($4 < j < jmax - 3$) مورد استفاده قرار می‌گیرد، U طبق رابطه (۳) تعریف شده و $\mathcal{J}U$ به صورت زیر خواهد بود:

به دلیل آدیاباتیکی بودن دیواره از روابط مشابهی برای دما استفاده شده است.

شرط مرزی جریان ورودی

در روش برازش شوک ابتدا شوک بر روی جسم انطباق داده می شود و سپس متغیرهای پشت شوک که در واقع مقادیر مرز خارجی را تشکیل می دهند، با استفاده از روابط رانکین-هوگنیت به دست می آیند. روابط شوک یک بعدی برای حالت گاز کامل $\gamma = 1/4$ به صورت زیر می باشد.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2.4M_1^2}{0.4M_1^2 + 2}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(1 + 0.2M_1^2)(7M_1^2 - 1)}{7.2M_1^2}, \quad (35)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{7}{6}M_1^2 - \frac{1}{6}$$

شرط مرزی جریان خروجی

به دلیل مافوق صوت بودن جریان، در مرز خروجی از برون بایی مرتبه سوم به صورت زیر استفاده شده است:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} \Big|_{\text{imax,j}} = 0, \quad \mathbf{U}_{\text{imax,j}} = 312\mathbf{U}_{\text{imax-1,j}} - 342\mathbf{U}_{\text{imax-2,j}} + 168\mathbf{U}_{\text{imax-3,j}} - 33\mathbf{U}_{\text{imax-4,j}} \quad (36)$$

شرط مرزی صفحه تقارن

در این مرز از شرط تقارن (آینه ای) استفاده شده است.

با استفاده از تحلیل آیزنتروپیک، توزیع اولیه ای برای کمیت های فشار، چگالی و سرعت به دست آمده است. به دلیل لزج بودن جریان یک توزیع اولیه خطی درون لایه مرزی در نظر گرفته شده است. هرچه شرایط اولیه حدسی به جواب های نهایی نزدیک تر باشند، تعداد تکرار برای همگرایی کاهش خواهد یافت.

۴. مطالعه شبکه

نتایج به دست آمده از حل عددی بایستی مستقل از نوع و سایز شبکه باشند، بنابراین ابتدا باید شبکه مورد استفاده مناسب برای هر روش به دست آید و سپس مقایسه انجام شود. به منظور انتخاب شبکه مناسب برای هر روش لازم است نتایج حاصل از چند نوع شبکه با یکدیگر مقایسه شوند و پس از اطمینان از عدم وابستگی نتایج به نوع و سایز شبکه، شبکه مناسب انتخاب شود. البته از آنجایی که دقت روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم بالاتر از روش "بیم-وارمینگ" است، می توان از یک شبکه درشت تر برای آن استفاده کرد. بنابراین با مطالعه شبکه برای هر روش، شبکه مورد استفاده برای روش "بیم-وارمینگ" برابر 80×120 و برای روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم برابر 30×40 انتخاب شده است. به منظور مقایسه، شرایط مورد نیاز در هر دو روش یکسان در نظر

در رابطه (۳۰) Φ معرف خصوصیات جریان از قبیل ρ, u, v و p می باشد که با استفاده آنها در این رابطه، مقدار بیشینه آن به عنوان خطای نرم در نظر گرفته می شود. در این مقاله برای تولید شبکه از روش جبری با ضریب کشش برابر $1/0.5$ استفاده شده است. در جریان های لزج لازم است که از ضریب کشش کوچک استفاده شود تا حل در ناحیه لزج دارای دقت کافی باشد. برای انجام محاسبات و مقایسه نتایج روش مرتبه چهارم با روش "بیم-وارمینگ" [۱۱]، عدد رینولدز 31250 و عدد ماخ 6 حول مخروط سربخ با نیم زاویه رأس 7 درجه در نظر گرفته شده است.

۳-۱. اعمال شرایط مرزی و شرایط اولیه

شرط مرزی دیواره

برای جریان لزج با توجه به شرط عدم لغزش، مقادیر u و v روی جسم برابر صفر می باشند. برای شرط مرزی فشار از معادله زیر استفاده می شود:

$$p_n (\eta_x^2 + \eta_y^2)^{\frac{1}{2}} = (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi$$

$$+ (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta = 0 \quad (31)$$

با استفاده از انفصال عددی (۳۱) به صورت تفاضل مرکزی با دقت مرتبه چهارم، روابطی به شکل ماتریس پنج قطری حاصل می شود که برای نقاط داخلی به صورت زیر می باشند:

$$(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \left(\frac{p_{i-2,1} - 8p_{i-1,1}}{+8p_{i+1,1} - p_{i+2,1}} \right) +$$

$$(\eta_x^2 + \eta_y^2) \left(\frac{-25p_{i,1} + 48p_{i,2} - 36p_{i,3}}{+16p_{i,4} - 3p_{i,5}} \right) = 0 \quad (32)$$

در نقاط مجاور مرزها به منظور حفظ پنج قطری بودن روابط و نیز پایداری روش، از دقت مرتبه سوم استفاده می شود. بدین ترتیب در $i = 2$ رابطه زیر به دست خواهد آمد:

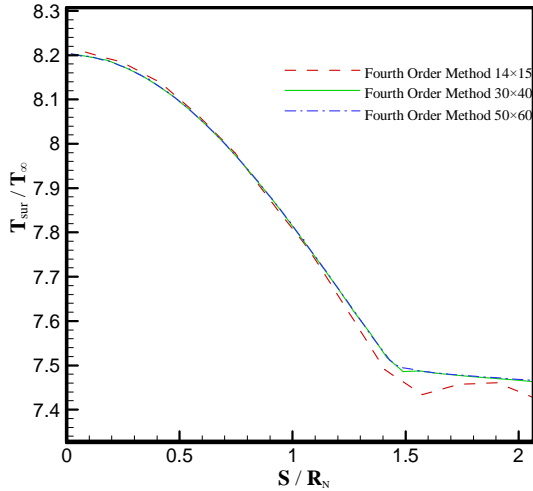
$$(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \left(\frac{-4p_{i-1,1} - 6p_{i,1}}{+12p_{i+1,1} - 2p_{i+2,1}} \right) +$$

$$(\eta_x^2 + \eta_y^2) \left(\frac{-25p_{i,1} + 48p_{i,2} - 36p_{i,3}}{+16p_{i,4} - 3p_{i,5}} \right) = 0 \quad (33)$$

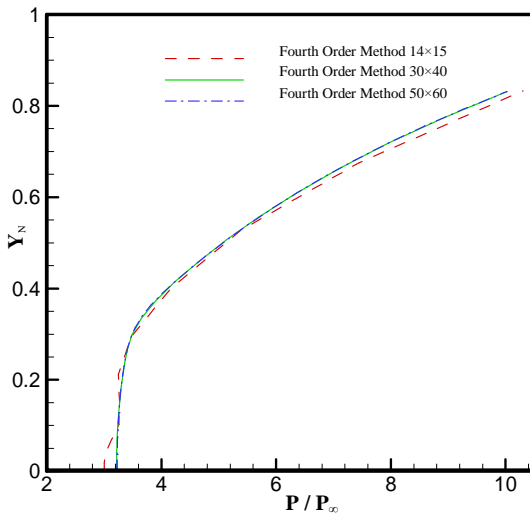
و در $i = \text{imax} - 1$ خواهیم داشت:

$$(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \left(\frac{2p_{i-2,1} - 12p_{i-1,1}}{+6p_{i,1} + 4p_{i+1,1}} \right) +$$

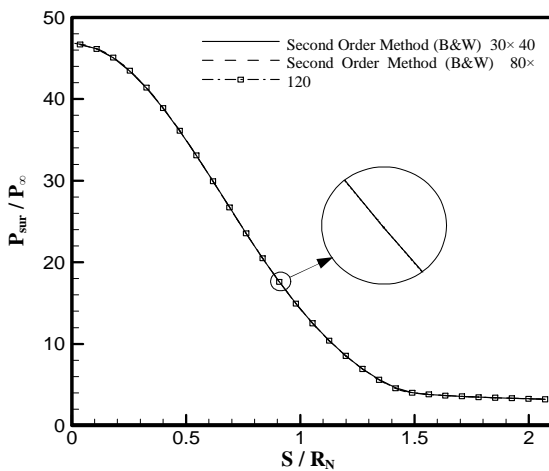
$$(\eta_x^2 + \eta_y^2) \left(\frac{-25p_{i,1} + 48p_{i,2} - 36p_{i,3}}{+16p_{i,4} - 3p_{i,5}} \right) = 0 \quad (34)$$



شکل ۳. مقایسه توزیع دمای روی سطح توسط روش مرتبه چهارم در سه شبکه ۱۴×۱۵، ۳۰×۴۰ و ۵۰×۶۰



شکل ۴. مقایسه پروفیل‌های فشار روش مرتبه چهارم در سه شبکه ۱۴×۱۵، ۳۰×۴۰ و ۵۰×۶۰ در $S/R_N = 2.0708$

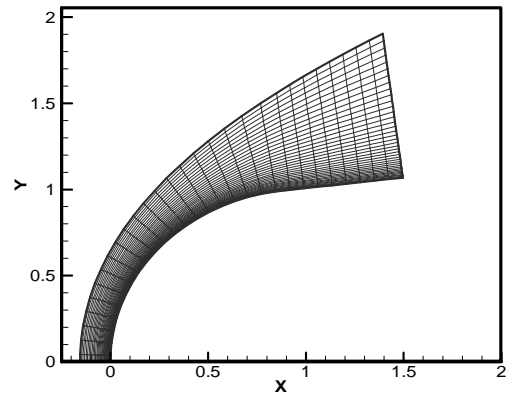


شکل ۵. مقایسه توزیع فشار روی سطح توسط روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

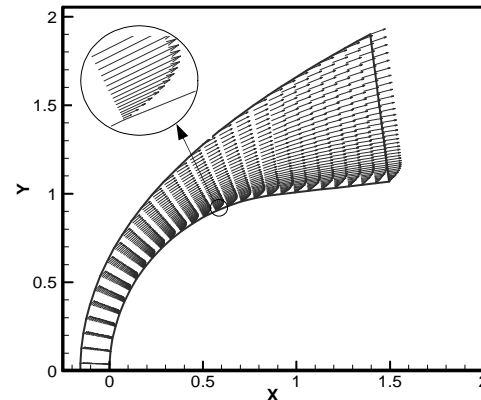
گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که در قسمت بعد نتایج عددی مربوط به مطالعه شبکه برای روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم آورده شده‌است.

۵. بررسی نتایج عددی

در شکل ۱ شبکه مورد استفاده برای تحلیل عددی نشان داده شده‌است. این شبکه در نزدیکی جسم فشرده بوده و با دور شدن از جسم، تراکم آن کاسته می‌شود. در شکل ۲ بردارهای سرعت مربوط به روش مرتبه چهارم و چگونگی تشکیل لایه مرزی روی جسم ارائه شده‌است.

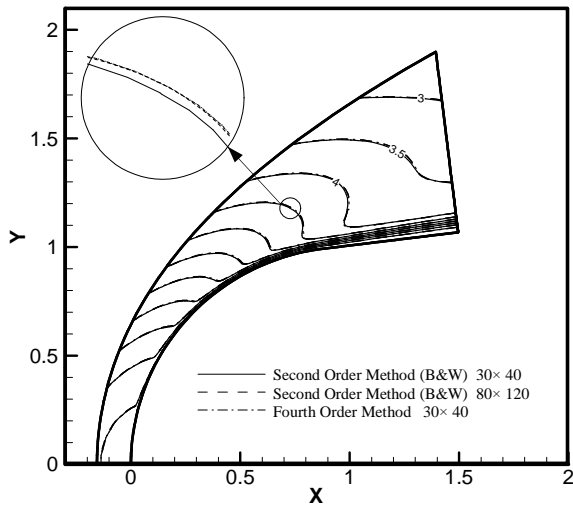


شکل ۱. شبکه‌بندی نقاط در دامنه فیزیکی

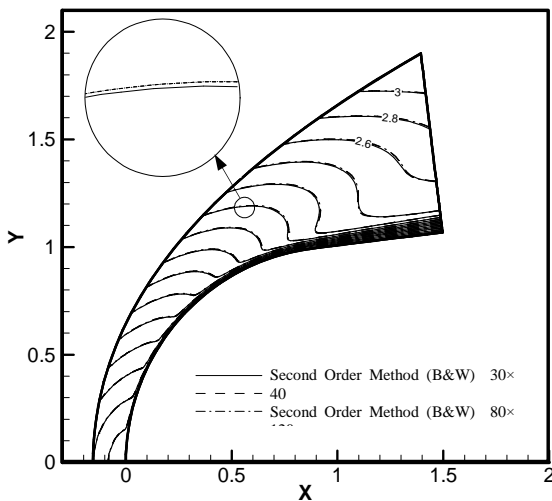


شکل ۲. بردارهای سرعت روش مرتبه چهارم

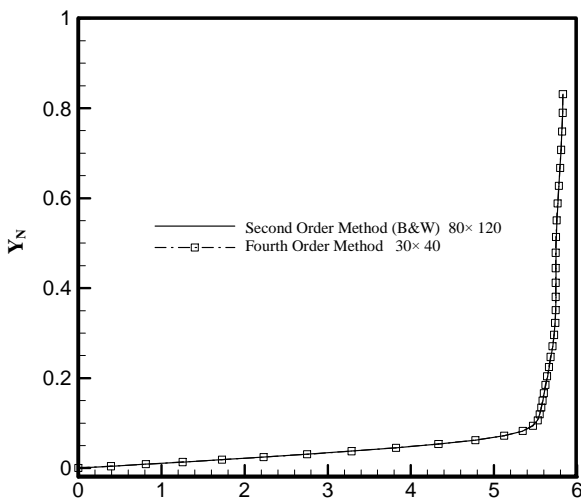
به‌منظور مطالعه شبکه، در شکل ۳ توزیع دمای روی سطح و در شکل ۴ پروفیل‌های فشار در مقطع انتهای بدنه توسط روش مرتبه چهارم برای سه شبکه ۱۴×۱۵، ۳۰×۴۰ و ۵۰×۶۰ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از شبکه ۳۰×۴۰ با نتایج شبکه ۵۰×۶۰ که شبکه ریزتری می‌باشد، تطابق بسیار خوبی دارد. بنابراین با اطمینان کامل از عدم وابستگی نتایج به نوع و سائز شبکه، می‌توان شبکه ۳۰×۴۰ را شبکه‌ای مناسب برای روش مرتبه چهارم انتخاب کرد. لازم به ذکر است که برای روش "بیم-وارمینگ" نیز مطالعه شبکه در محدوده شبکه‌های ریزتر انجام شد و با توجه به عدم وابستگی نتایج به نوع و سائز شبکه، شبکه ۸۰×۱۲۰ انتخاب گردید.



شکل ۸. مقایسه خطوط دما ثابت به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

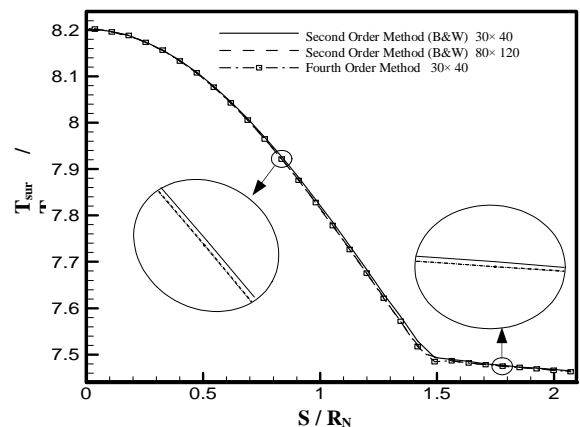


شکل ۹. مقایسه خطوط ماخ ثابت به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

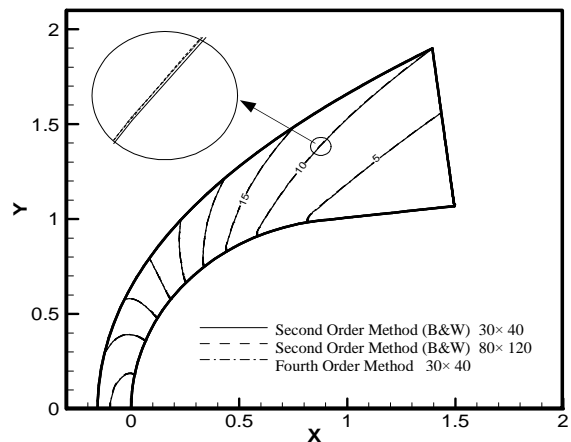


شکل ۱۰. مقایسه پروفیل سرعت با استفاده از روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" در $S/R_N = 2.0708$

در شکل ۵ توزیع فشار روی سطح و در شکل ۶ توزیع دمای روی سطح به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" ارائه شده است. به منظور مقایسه و تمایز بهتر نمودارها از یکدیگر، از بزرگنمایی که مقیاس بزرگی برابری با هم دارند، استفاده شده است. همانطور که مشاهده می شود با توجه به تفاوت زیاد تعداد نقاط شبکه، مقادیر به دست آمده برای توزیع فشار روی سطح در هر دو روش تفاوت زیادی با یکدیگر ندارند و تقریباً بر هم منطبق می باشند. اما در شکل ۶ واضح است که دمای روی سطحی که توسط روش مرتبه چهارم با یک شبکه درشت (30×40) به دست می آید، بسیار نزدیک به دمای روی سطحی است که توسط روش "بیم-وارمینگ" با یک شبکه بسیار ریز (80×120) حاصل می شود. با توجه به مطالب فوق، می توان علاوه بر دقت بالای روش مرتبه چهارم در یک شبکه نسبتاً درشت، به حساسیت بیشتر دمای روی سطح نسبت به فشار روی سطح نیز اشاره کرد. در شکل های ۷، ۸ و ۹ به ترتیب خطوط فشار ثابت، دما ثابت و ماخ ثابت برای هر دو روش نشان داده شده است. این نمودارها نیز نتایج حاصل از روش مرتبه چهارم و دقت بالای آن را تأیید می کنند.

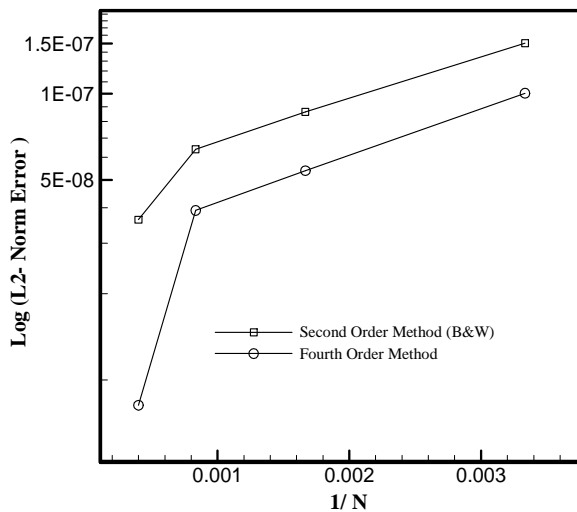


شکل ۶. مقایسه توزیع دمای روی سطح توسط روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

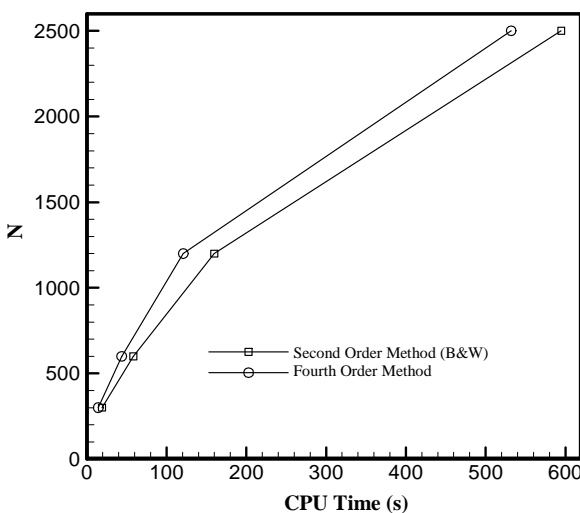


شکل ۷. مقایسه خطوط فشار ثابت به کمک روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

در شکل ۱۳ خطای نُرْم (L2-Norm Error) هر دو روش بر حسب عکس تعداد نقاط شبکه با یکدیگر مقایسه شده‌است. در این شکل به عنوان نمونه از چهار شبکه با تعداد نقاط ۱۲۰۰، ۶۰۰، ۳۰۰ و ۲۵۰۰ که در هر دو روش تا $1.0e-3 = Error_{max}$ همگرا شده‌اند، استفاده شده‌است. در این شکل چند نکته قابل تأمل است: نخست آنکه با افزایش تعداد نقاط شبکه در هر دو روش، مقدار خطا کاهش می‌یابد. دیگر آنکه نرخ کاهش خطا در روش مرتبه چهارم بیشتر از روش "بیم-وارمینگ" است. بر این اساس اختلاف دقت دو روش در شبکه‌های با تعداد نقاط بالاتر بیشتر می‌باشد. نکته دیگر اینکه از طرفی در یک شبکه خاص، دقت روش مرتبه چهارم بالاتر است و از طرف دیگر برای یک دقت معلوم، می‌توان به‌جای استفاده از روش "بیم-وارمینگ" با یک شبکه ریز از روش مرتبه چهارم با تعداد نقاط کمتر و با همان دقت استفاده کرد.



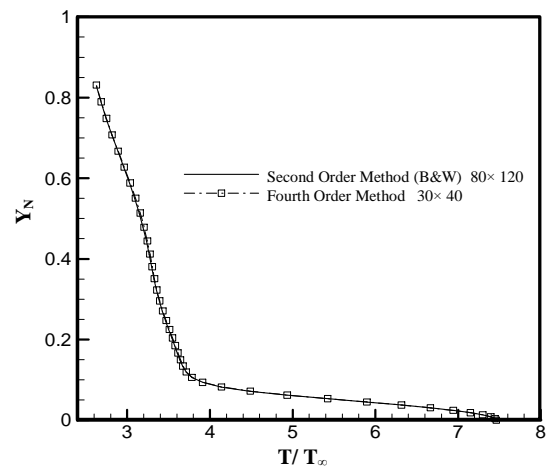
شکل ۱۳. مقایسه خطای نُرْم بر حسب عکس تعداد نقاط شبکه برای روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"



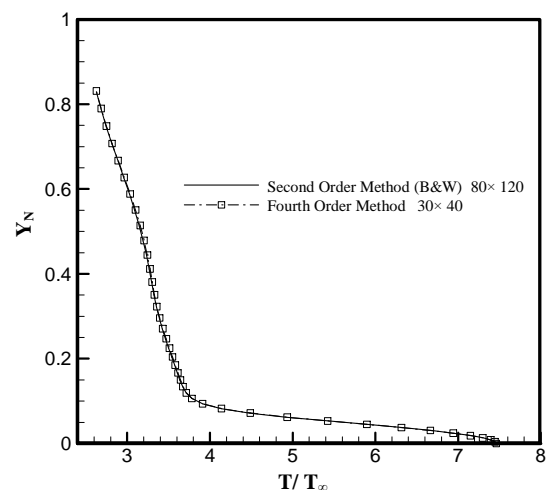
شکل ۱۴. مقایسه تعداد نقاط شبکه بر حسب مدت زمان حل برای روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"

در شکل ۱۰ منحنی توزیع سرعت در امتداد محور افقی (u) بر حسب فاصله عمودی از سطح (Y_N) در انتهای بدنه ($S/R_N = 2.0708$) ترسیم شده‌است. بیشترین تغییرات سرعت در داخل لایه مرزی $Y_N \approx 0.082$ مشاهده می‌شود. در شکل ۱۱ توزیع دما بر حسب فاصله عمودی از دیواره ارائه شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود در روی سطح بیشترین مقدار دما ایجاد شده و با نزدیک‌تر شدن به محل شوک مقدار آن به دلیل کاهش اثرات لزجت کاهش می‌یابد.

در شکل ۱۲ توزیع فشار بر حسب فاصله عمودی از سطح ترسیم شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود در سه شکل فوق نیز تطابق بالایی بین روش مرتبه چهارم با شبکه درشت و روش "بیم-وارمینگ" با شبکه ریز وجود دارد. به علت توضیحاتی که در شکل-های قبل داده شد، از آوردن شبکه درشت روش "بیم-وارمینگ" خودداری شده‌است.

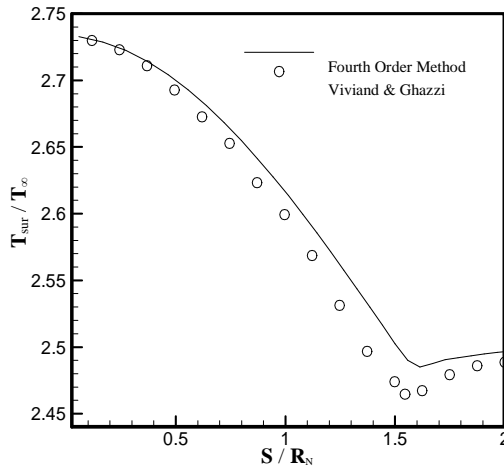


شکل ۱۱. مقایسه پروفیل دما با استفاده از روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" در $S/R_N = 2.0708$

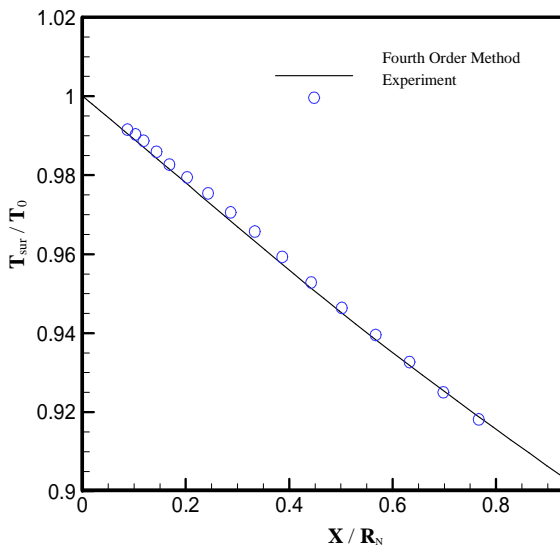


شکل ۱۲. مقایسه پروفیل فشار با استفاده از روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ" در $S/R_N = 2.0708$

در پایان به مقایسه نتایج روش مرتبه چهارم مورد بحث با نتایج عددی معتبر و نتایج تجربی پرداخته می‌شود. در شکل ۱۶ توزیع فشار روی سطح روش مرتبه چهارم با حل کاتلر [۱۳] مقایسه شده‌است. مشاهده می‌شود که مقادیر به دست آمده تفاوت زیادی با یکدیگر ندارند و تقریباً بر هم منطبق می‌باشند.



شکل ۱۷. مقایسه توزیع دمای روی سطح با استفاده از روش مرتبه چهارم با نتایج عددی ویویند و قاضی [۱۴] در حالت $T_{\text{cone}}=0^\circ$ و $Re = 2.2e+5$ ، $M=2.94$

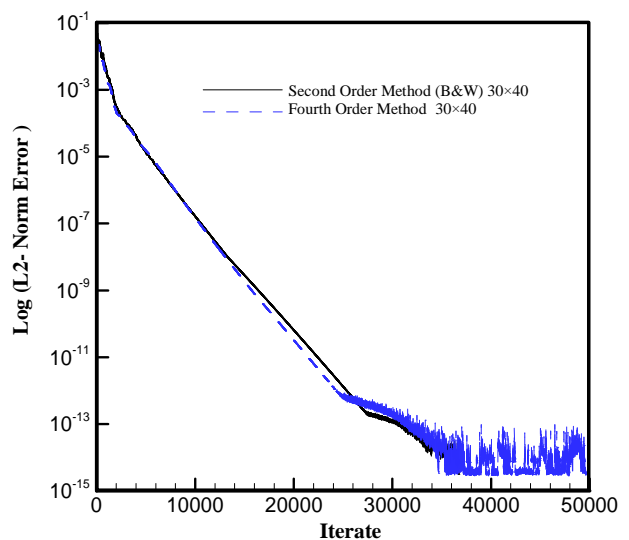


شکل ۱۸. مقایسه توزیع دمای روی سطح با استفاده از روش مرتبه چهارم با نتایج تجربی [۱۵] در حالت $T_{\text{cone}}=0^\circ$ و $Re=1.5e+6$ ، $M=4.15$

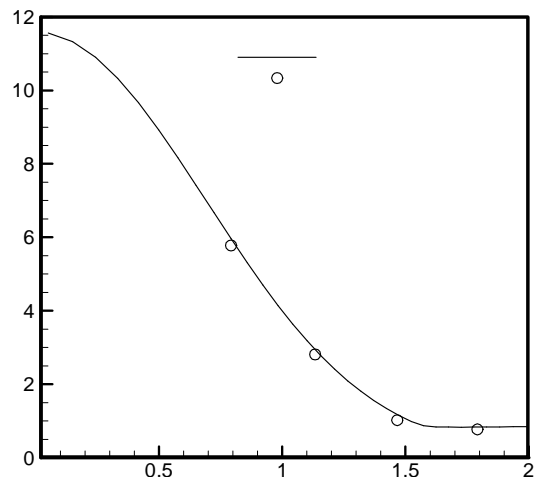
در شکل ۱۷ توزیع دمای روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج ویویند و قاضی [۱۴] که از حل معادلات کامل ناویر-استوکس به دست آمده‌اند، مقایسه شده‌است. لازم به ذکر است که نتایج ویویند و قاضی جزو معتبرترین نتایج عددی می‌باشند و بعنوان مبنایی برای مقایسه نتایج مورد پذیرش قرار گرفته‌اند. مشاهده می‌شود که تطابق قابل‌قبولی بین دمای روی سطح روش مرتبه چهارم و نتایج ویویند

شکل ۱۴ مدت زمان لازم برای همگرایی برنامه را بر حسب تعداد نقاط شبکه برای هر دو روش نشان می‌دهد. در این شکل از همان چهار شبکه موجود در شکل ۱۳ استفاده شده‌است. همانطور که از این شکل برمی‌آید سرعت همگرایی روش مرتبه چهارم بیشتر از روش "بیم-وارمینگ" است.

لازم به ذکر است که هر دو روش قابلیت همگرایی تا دقت‌های بسیار پایین را دارند. شکل ۱۵ خطای نُرَم را بر حسب تعداد تکرارهای برنامه برای همگرایی هر دو روش تا $\text{Error}_{\text{max}} = 1.0e-10$ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود میزان خطای نُرَم تا $1.0e-15$ کاهش یافته‌است. لازم به ذکر است که بسیاری از نرم‌افزارهای متداول CFD نظیر نرم‌افزار Fluent قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را ندارند.



شکل ۱۵. مقایسه خطای نُرَم بر حسب تعداد تکرارهای برنامه برای روش مرتبه چهارم و روش "بیم-وارمینگ"



شکل ۱۶. مقایسه توزیع فشار روی سطح با استفاده از روش مرتبه چهارم با نتایج عددی کاتلر [۱۳] در حالت $T_{\text{cone}}=0^\circ$ و $Re = 2.2e+5$ ، $M=2.94$

- [5] Visbal, M.R., Gaitonde, D.V., "High-Order-Accurate Methods for Complex Unsteady Subsonic Flows", AIAA Journal, Vol. 37, 1999, pp. 1210-1230.
- [6] Zhong, X., "High-Order Finite-Difference Schemes for Numerical Simulation of Hypersonic Boundary-Layer Transition", Journal of Computational Physics, Vol. 144, 1998, pp. 662-709.
- [7] Zhong, X., Tatineni, M., "High-order non-uniform grid schemes for numerical simulation of hypersonic boundary-layer stability and transition", Journal of Computational Physics, Vol. 190, 2003, pp. 419-458.
- [8] Wang, Z., Huang, G.P., "An Essentially Nonoscillatory High-Order Pade'-Type (ENO-Pade') Scheme", Journal of Computational Physics, Vol. 177, 2002, pp. 35-50.
- [9] Costa, B., Don, W.S., "High Order Hybrid Central WENO Finite Difference Scheme for Conservation Laws", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 204, 2007, pp. 209-218.
- [10] Anderson, D.A., Tanehill, J.C., Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw Hill Book Company, New York, 1984.
- [11] Esfahanian, V., "Computation and Stability Analysis of Laminar Flow over a Blunted Cone in Hypersonic Flow", Ph.D. Thesis, The Ohio University, Columbus, Ohio, March 1991.
- [12] Pulliam, T.V., Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of Implicit Approximate Factorization Algorithm", Journal of Computational Physics, Vol. 39, 2002, pp. 35-50.
- [13] Kutler, P., Chakravarthy, S.R., Lombard, C.P., "Supersonic Flow Over Ablated Nostip Using an Unsteady Implicit Numerical Procedure", AIAA Journal, 1978, pp. 178-213.
- [14] Viviand, H., Ghazzi, W., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations at High Reynolds Numbers with Application to the Blunt Body Problem" In Lecture Notes in Physics, No. 59, Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, 1976, pp. 375-401.
- [15] Beckwith, I.E., Gallagher, J.J., "Heat Transfer and Recovery Temperatures on a Sphere with Laminar Transitional and Turbulent Boundary Layers at Mach Numbers of 2 and 4.15", NACA TN 4125, 1957.

پیوست‌ها

فهرست علائم

F, G, H	بردارهای شار غیرلزج در مختصات منحنی الخط
S, T	بردارهای شار لزج
A, B	ماتریس‌های ژاکوبین بردارهای F و G
i_{max}, j_{max}	بیشینه تعداد نقاط شبکه در جهات ξ, η
R_N	طول کمان در راستای بدنه
Y_N	فاصله عمودی از سطح جسم
c	سرعت صوت

وجود دارد. دو شکل فوق می‌توانند همان نتیجه‌ای را که قبلاً به آن اشاره شد، مورد تأیید قرار دهند که توزیع دمای روی سطح برخلاف توزیع فشار روی سطح دارای حساسیت بیشتری می‌باشد. لازم به ذکر است که فقط در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ حل عددی روش مرتبه چهارم با عدد رینولدز 2.2×10^5 و عدد ماخ 2.94 حول مخروط سرپخ با نیم‌زاویه رأس صفر درجه انجام شده‌است. سرانجام به منظور تأیید صحت محاسبات، نتایج دمای روی سطح روش مرتبه چهارم با نتایج تجربی [۱۵] مقایسه شده‌است. شکل ۱۸ تطابق بسیار خوب توزیع دمای روی سطح روش مرتبه چهارم را با نتایج تجربی نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که فقط در شکل ۱۸ حل عددی روش مرتبه چهارم با عدد رینولدز 1.5×10^6 و عدد ماخ 4.15 حول مخروط سرپخ با نیم‌زاویه رأس صفر درجه انجام شده‌است.

۶. نتیجه‌گیری

روش تفاضل مرکزی مرتبه چهارم به دلیل ایجاد خطای پراکندگی کمتر نسبت به روش‌های متداول که عموماً مرتبه دو هستند (بیم-وارمینگ)، دارای دقت بالاتری است. انفعال عددی مشتقات به صورت تفاضل مرکزی مرتبه چهارم به خصوص مشتقات بردارهای غیرلزج، جملات اتلاف مصنوعی صریح و محاسبه دما و فشار روی سطح از مهم‌ترین عواملی هستند که در کارایی روش مرتبه چهارم مؤثرند. لازم به ذکر است که چگونگی انفعال عددی مشتقات در نقاط مرزی و نقاط نزدیک به آنها در همگرایی روش نقش بسزایی دارند. با استفاده از این روش در یک شبکه درشت، می‌توان نتایجی بسیار نزدیک با نتایج شبکه ریز روش "بیم-وارمینگ" به دست آورد. همچنین این روش دارای سرعت همگرایی بالاتر نسبت به روش "بیم-وارمینگ" است. با افزایش تعداد نقاط شبکه، دقت بالای این روش محسوس‌تر خواهد شد، بدین ترتیب که شیب کاهش خطا نسبت به روش "بیم-وارمینگ" بیشتر می‌شود. این روش قابلیت همگرایی تا دقت ماشین را نیز دارد.

مراجع

- [1] Lele, S.K., "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution", Journal of Computational Physics, Vol. 103, 1992, pp. 16-42.
- [2] Mahesh, K., "A Family of High Order Finite Difference Schemes with Good Spectral Resolution", Journal of Computational Physics, Vol. 145, 1998, pp. 332-358.
- [3] Hirsh, R.S., "High Order Accurate Difference Solutions of Fluid Mechanics Problems by a Compact Differencing Technique", Journal of Computational Physics, Vol. 19, 1975, pp. 90-109.
- [4] Abarbanel, S., Kumar, A., "Compact High-Order Schemes for the Euler Equations", Journal of Scientific Computing, Vol. 3, 1988, pp. 275-288.

I	ماتریس واحد
J	ژاکوبین تبدیل
$\Lambda_{\xi}^i, \Lambda_{\eta}^i, \Lambda_{\eta}^v$	ماتریس‌های قطری
p	فشار
p_{∞}	فشار جریان آزاد
T_{cone}	نیم‌زاویه رأس مخروط
T_0	دمای نقطه سکون
Re	عدد رینولدز
M	عدد ماخ
u, v	مولفه‌های سرعت

علائم یونانی

ξ, η	مختصات منحنی الخط
μ	ضریب لزجت
ρ	چگالی

"