

## THE ROLE OF RANDOM NUMBERS IN SIMULATION AND PROVIDING A HYBRID RANDOM NUMBER GENERATOR

Abdollah Aghaie & Mahdi Zahedi Shoolami

Industrial Engineering Department, Kntoosi University, AAghaie@kntu.ac.ir

**Abstract:** Analyzing different issues of most systems, particularly their design, implementation, and development, requires some sort of techniques which are capable of studying their special conditions in stochastic states. Simulation is regarded as one of the most efficient methods for this purpose in the area of engineering, systems, and management. Studying and analyzing a system under special, critical, and stochastic conditions is one of the capabilities and advantages of simulation. This unique feature of simulation strongly depends on random numbers. Some of the simulation scientists believe that random numbers act as nuts and bolts of simulation. The more random numbers satisfy randomness criteria, the more effective the model and simulation results would be. In this paper, initially, different random number streams- in a more accurate term pseudo random number streams- will be studied. Then, some of the common and simple methods of random number generation will be elaborated. Obviously, the results show that random numbers which are generated by these simple methods suffer from dispersion. Ultimately we attempt to introduce an enhanced hybrid random number generation method based on a combination of these common methods.

## نقش اعداد تصادفی در شبیه سازی و بررسی تحلیلی الگوریتم های تولید اعداد تصادفی و ارائه روش تلفیقی جدید

عبداله آقایی و مهدی زاهدی شولمی

**چکیده:** در بسیاری از سیستمها برای تجزیه و تحلیل مسائل مختلف آن و یا اصولاً جهت طراحی، استقرار و توسعه سیستمها، تکنیکهایی لازم است که بتوانند حالتها و شرایط خاص و حالات تصادفی سیستم را نیز مورد بررسی و مطالعه قرار دهند. از جمله این تکنیکها و روشها در حوزه مهندسی، سیستمها و مدیریت، شبیه سازی بعنوان یکی از کارآمدترین تکنیکهای شناخته شده است.

از جمله توانمندیها و قابلیتهای شبیه سازی این است که سیستم مورد مطالعه را تحت شرایط خاص و بحرانی و احتمالی که سیستم با آن مواجه خواهد بود، بررسی و تجزیه و تحلیل می نماید. این قابلیت منحصر بفرد شبیه سازی وابستگی شدیدی به اعداد تصادفی دارد. بعبارت دیگر پایه اصلی توانمندی شبیه سازی بر اعداد تصادفی استوار است.

بنا به عقیده برخی از دانشمندان علم شبیه سازی، اعداد تصادفی در حکم پیچ و مهره های شبیه سازی مطرح هستند. از سوی دیگر هر چه تولید اعداد تصادفی با معیارهای تصادفی بودن سازگارتر باشند، بالطبع تاثیر بسزایی در جهت اثربخشی مدلسازی و تجزیه و تحلیل نتایج شبیه سازی خواهد داشت. در این مقاله ابتدا دنباله های مختلف اعداد تصادفی و یا بعبارت صحیح تر اعداد شبه تصادفی، مورد مطالعه و تجزیه و تحلیل قرار می گیرند. سپس چند روش از روشهای معمول و ساده تولید اعداد تصادفی مورد بررسی قرار می گیرد. نتایج حاصل شده بخوبی نشان می دهد اگر چه این روشها ساده هستند اما تولید اعداد تصادفی توسط آنها

تاریخ وصول: ۸۳/۹/۳

تاریخ تصویب: ۸۴/۹/۱۲

دکتر عبدالله آقایی، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، AAghaie@kntu.ac.ir

مهدی زاهدی شولمی، فارغ التحصیل دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دچار مشکل و به اصطلاح از هم پاشیدگی می شوند. پس از آن تلاش شده است با استفاده از نتایج تحلیلهای بدست آمده روش تلفیقی بر مبنای ترکیبی از روشهای موجود برای تولید اعداد تصادفی ارائه گردد.

**واژه های کلیدی:** اعداد تصادفی، دنباله های اعداد تصادفی، روش میان مربعی، روش میان ضربی، روش مضرب ثابت، روش تلفیقی

## ۱. مقدمه

یکی از این راهها استفاده از دنباله ها و یا الگوریتم هایی جهت تولید اعداد تصادفی می باشد که با توجه به رشد روزافزون توانمندی کامپیوتر این امکان بوجود آمد که تولید اعداد تصادفی به تعداد و سرعت زیاد توسط این الگوریتم ها صورت پذیرد. اما با وجود تمامی این مزایا، تولید اعداد تصادفی توسط الگوریتم ها معایبی نیز دارد که در جای خود قابل بحث است. علاوه بر معایب خاص هر الگوریتم مشکلی که بصورت عام برای تمامی این الگوریتم ها وجود دارد این است که این اعداد هرگز اعداد واقعاً تصادفی نیستند بلکه تنها اعدادی شبه تصادفی<sup>۴</sup> می باشند. اما هرچه یک الگوریتم از جهت علمی و آماری قویتر باشد، آن الگوریتم جهت تولید اعداد شبه تصادفی مناسبتر است. در این مورد تست های آماری متعددی وجود دارد که عمدتاً دو خاصیت اصلی اعداد تصادفی یعنی یکنواخت بودن و مستقل بودن آنها را مورد آزمون و بررسی قرار می دهد. همچنین از این پس در این مقاله بجای استفاده از کلمه اعداد شبه تصادفی، چنانکه مرسوم نیز هست، از همان کلمه اعداد تصادفی استفاده می شود [۱، ۲]. اعداد تصادفی، علاوه بر کاربردهای ذکر شده، کاربردهای فراوان دیگری نیز از جمله استفاده در تمامی بازی های کامپیوتری و نیز نرم افزارهایی که به پیش بینی عامل یا عواملی در آینده می پردازند دارد.

نیاز رو به رشد بشر در سالهای اخیرو رشد شتابنده تنوع طلبی و کنجکاوای بشر، تغییرات روزافزون تکنولوژی و بالطبع پیچیدگی سیستم های مختلف ضرورت برنامه ریزی دقیق تر و تجزیه تحلیل کاملتر سیستمها را می طلبد. لذا امروزه علم شبیه سازی<sup>۲</sup> به عنوان یکی از کارآمدترین تکنیکهای تصمیم سازی و حل مسئله بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته است. بی شک در این بین نمی توان نقش اعداد تصادفی را به عنوان یکی از مهمترین ابزارهای شبیه سازی، جهت پیش بینی شرایط تصادفی سیستم نادیده گرفت. تا جایی که برخی از دانشمندان اعداد تصادفی را به منزله پیچ و مهره های یک ماشین برای شبیه سازی معرفی کرده اند که این خود نشان از میزان اهمیت اعداد تصادفی در شبیه سازی دارد. از آنجایی که تعداد اعداد تصادفی مورد نیاز در یک شبیه سازی بسیار زیاد می باشد، همواره الگوریتم هایی جهت تولید اعداد تصادفی مورد استفاده قرار می گرفته است. در این مقاله سعی بر این است تا ضمن معرفی برخی از الگوریتم های تولید اعداد تصادفی<sup>۳</sup>، با انجام برخی آزمونهای معتبر بر روی این الگوریتم ها بتوان الگوریتمی که تصادفی ترین اعداد را تولید می کند انتخاب و یا طراحی و ارائه نمود.

## ۲. شبه تصادفی بودن اعداد تولید شده

یکی از راههای تولید اعداد تصادفی واقعی استفاده از یک کیسه حاوی تعدادی گوی و یا کارت همسان با اعداد مشخص و با احتمال مساوی بطوریکه هر گوی تنها یک شماره را نشان دهد، می باشد. در این حالت بایستی هر بار گوی درآورده شده به داخل کیسه برگردانده شود و گوی های داخل کیسه نیز به خوبی با یکدیگر جابجا شوند تا شرط تساوی احتمال برای گوی ها برقرار گردد. مسلماً انجام چنین عملی برای دسترسی به تعداد زیادی عدد تصادفی، که برای شبیه سازی سیستمهای مختلف مورد استفاده قرار می گیرد بسیار مشکل و حتی در شرایط واقعی ناممکن است. از این رو با توجه به نیاز به دسترسی به اعداد تصادفی به تعداد زیاد و در زمان سریع استفاده از روشهای دیگر جهت تولید اینگونه اعداد اجتناب ناپذیر است.

## ۳. روشهای تولید اعداد تصادفی

روشهای متعدد و مختلفی جهت تولید اعداد تصادفی وجود دارد که طی سالیان متمادی مورد استفاده قرار می گرفته است. از بین تمامی روشهای ارائه شده، مولدهای همبستگی<sup>۵</sup> برای تولید اعداد تصادفی بیش از سایر روشها بکار رفته است. برای مثال یکی از مولدهای همبستگی که برای مدت طولانی مورد استفاده قرار گرفته است عبارتست از [۱]:

$$X_{i+1} = (19,031X_i + 9,298X_{i-1}) \pmod{65,536}$$

اما مولد همبستگی دیگری که ادعا شده است تمامی تستهای آماری جهت قوت و صحت اعداد تصادفی را بخوبی پاسخگو بوده است دنباله ذیل می باشد [۳]:

$$X_{i+1} = (107,374,182 + 104,104,480X_{i-4}) \pmod{2^{31} - 1}$$

<sup>4</sup> Pseudo-random numbers

<sup>5</sup> Congruential generators

<sup>2</sup> Simulation

<sup>3</sup> Random Number Generators

به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.

- در سری سوم که با اعداد ۱۴۷۸ و ۹۶۳۲ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۴۲ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.
  - در سری چهارم که با اعداد ۲۱۶۳ و ۸۴۱۰ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۲۷۰ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.
  - در سری پنجم که با اعداد ۶۵۴۷ و ۹۷۱۲ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۸۰۷ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.
  - در سری ششم که با اعداد ۲۰۳۶ و ۶۳۹۵ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید. و به عدد صفر برخورد نشد. ولی، همانطور که از نمودار پیداست، به حلقه تکرار دیگری برخورد شد.
  - در سری هفتم که با اعداد ۸۴۳۹ و ۵۷۹۱ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۶۶ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.
  - در سری هشتم که با اعداد ۲۵۶۴ و ۹۱۳۷ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۲۴۴ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.
  - در سری نهم که با اعداد ۹۰۸۱ و ۳۰۲۶ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۲۲۰ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.
  - در سری دهم که با اعداد ۳۶۲۵ و ۹۶۵۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۴۶۷ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.
- همانطور که در نتایج فوق و در نمودارهای مربوطه مشاهده می شود در نه مورد از ده مورد فوق به حلقه تکرار صفر و در یک مورد به حلقه تکرار اعداد برخورد شد و اعداد تصادفی به تعداد مورد نیاز تولید نگردید و در واقع دنباله از هم پاشیده می شود. می توان گفت با توجه به تعداد اعداد تصادفی تولید شده در این روش (۴۸۲ و ۳۲۵ و ۱۴۲ و ۲۷۰ و ۸۰۷ و ۱۰۰۰ و ۱۶۶ و ۲۴۴ و ۲۲۰ و ۴۶۷ عدد) که بطور متوسط ۴۱۲ عدد می باشد، و با توجه به اینکه در شبیه سازی عملی تعداد اعداد تصادفی مورد نیاز به

که در آن  $X_i$  عبارتست از یک دنباله اعداد تصادفی و  $X_0$  هسته اولیه. در جای دیگر یک دنباله تلفیقی برای تولید اعداد تصادفی که اجزاء این دنباله متعلق به خانواده های مختلف همبستگی است توسعه داده شده است [۴]. همچنین یک دنباله تولید اعداد تصادفی همبستگی ضربی<sup>۶</sup> از درجه دو با پیمانه ای برابر  $2^{31}-1$  نیز ارائه گردیده است [۵]. در مورد این دنباله توضیح داده شده است که چنانچه ضرب کننده ها<sup>۷</sup> (برای مثال  $a_1$  و  $a_2$ ) به دقت انتخاب شود، در این صورت طول پرپود تولید اعداد تصادفی در این تابع همبستگی برابر با  $2^{31}-1$  خواهد شد. در مورد دنباله همبستگی تولید اعداد تصادفی دیگری نیز عنوان شده است که دارای پرپود طولانی برابر  $2^{202}$  و  $10^{61}$  می باشد [۶]. گذشته از روشهای همبستگی که استفاده از آنها متداول و گسترده است روشهای دیگری وجود دارد که به جهت معایب عمده ای که در آنها وجود دارد، و در ادامه بررسی می گردند، تقریباً منسوخ شده تلقی می شوند. از آنجمله می توان به روشهای میان مربعی<sup>۸</sup>، مضرب ثابت<sup>۹</sup> و میان ضربی<sup>۱۰</sup> اشاره نمود [۷]. هدف از این مقاله آنست که با کمک الگوریتمی که در نرم افزار Excel تهیه شده است ضمن نشان دادن برخی عیوب این روشها، روشی جدید و ساده جهت تولید اعداد تصادفی ارائه گردد که در واقع تلفیقی از همین روشهای منسوخ شده و در عین حال ساده می باشد. در ادامه روش پیشنهادی مورد آزمون قرار می گیرد.

#### ۴. روش میان ضربی

در این روش ابتدا دو عدد بعنوان هسته که تعداد ارقام آنها مساویست انتخاب می شود (مانند  $a$  و  $b$ ). سپس حاصلضرب این دو عدد محاسبه می گردد و  $n$  رقم میانی آن عدد انتخاب می گردد (عدد  $C$ ) و بر  $10^m$  تقسیم می گردد. برای مثال اگر عدد انتخاب شده چهار رقمی باشد عدد بر  $10,000$  تقسیم می گردد تا عددی بین صفر و یک حاصل گردد. این بار عدد  $C$  در عدد  $b$  ضرب می شود و مجدداً چهار رقم میانی آن عدد انتخاب می گردد (عدد  $d$ ) و بر  $10,000$  تقسیم می گردد. این بار عدد  $d$  در عدد  $C$  ضرب می گردد و فعالیت های فوق بر روی آن ادامه می یابد.

- در سری اول تولید اعداد تصادفی از اعداد ۶۵۲۲ و ۷۲۲۹ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۴۸۲ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن به عدد صفر، وارد حلقه تکرار شده و این عدد تا پایان تکرار می شود.
- در سری دوم که با اعداد ۳۲۶۷ و ۴۱۸۳ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۳۲۵ عدد تصادفی تولید گردید. اما بعد از رسیدن

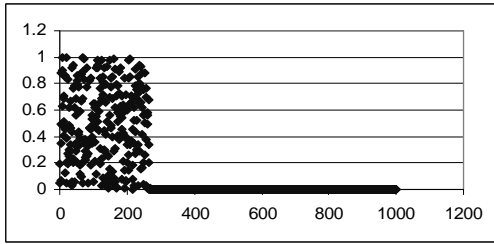
<sup>6</sup> Multiplicative Congruential Random Number Generator

<sup>7</sup> Multipliers

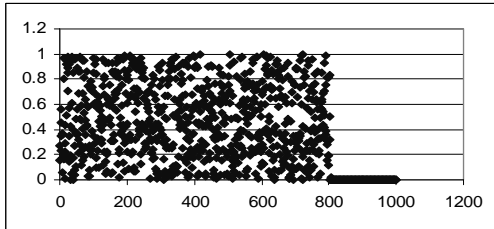
<sup>8</sup> Mid-product Method

<sup>9</sup> Mid-Square Method

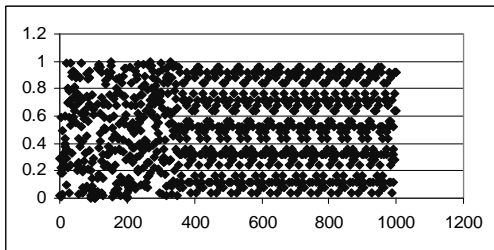
<sup>10</sup> Mid-Product Method



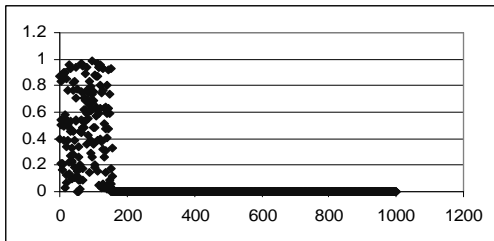
نمودار ۴-۲. سری چهارم تابع Rand



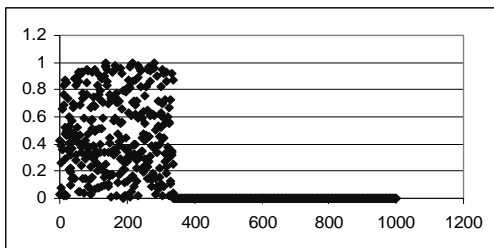
نمودار ۵-۲. سری پنجم تابع Rand



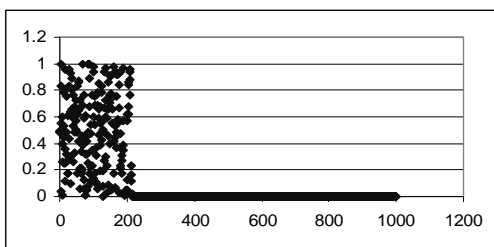
نمودار ۶-۲. سری ششم تابع Rand



نمودار ۷-۲. سری هفتم تابع Rand

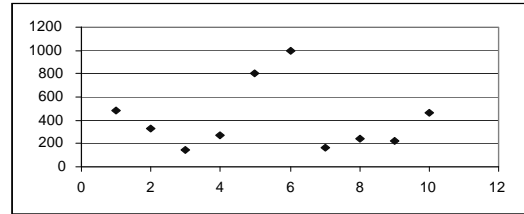


نمودار ۸-۲. سری هشتم تابع Rand



نمودار ۹-۲. سری نهم تابع Rand

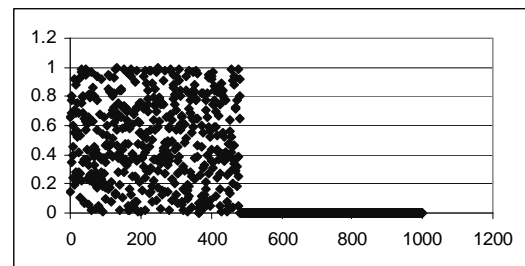
مراتب بیش از این تعداد است، لذا این الگوریتم به علت از هم پاشیدگی الگوریتم مناسبی به شمار نمی رود. نمودار زیر نشان دهنده تعداد اعداد تصادفی تولید شده در این ده سری تولید اعداد می باشد.



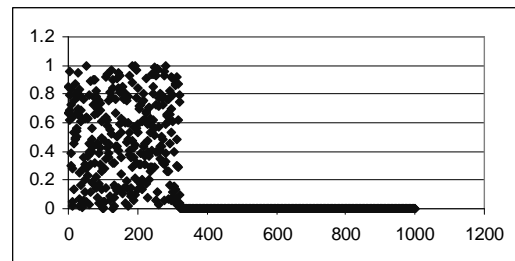
نمودار ۱. تعداد اعداد تصادفی تولید شده توسط روش میان ضربی

بررسی اعداد تصادفی تولید شده توسط الگوریتم میان ضربی از نظر زوج و فرد بودن (تابع Rand)

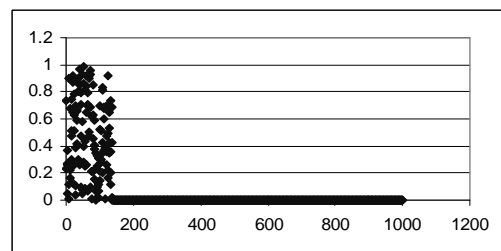
در این روش به علت برخورد به حلقه صفر بررسی زوج و فرد بودن اعداد عملاً کاربردی ندارد. نمودارهای مربوط به اعداد تصادفی تولید شده با الگوریتم میان ضربی ذیلاً آمده است.



نمودار ۱-۲. سری اول تابع Rand



نمودار ۲-۲. سری دوم تابع Rand



نمودار ۳-۲. سری سوم تابع Rand

• در سری پنجم که با اعداد ۵۶۴۱ و ۲۳۶۹ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۸ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۷۵ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.

• در سری ششم که با اعداد ۲۴۲۸ و ۱۹۳۰ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۶۶ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۱۰۷ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.

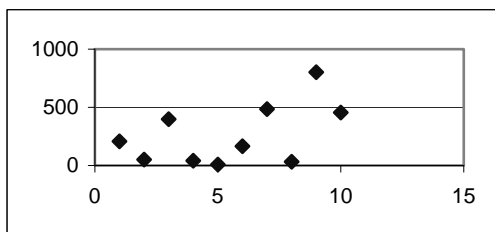
• در سری هفتم که با اعداد ۲۰۳۱ و ۳۱۲۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۴۸۵ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۲۵۹ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.

• در سری هشتم که با اعداد ۵۶۳۷ و ۸۵۲۷ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۳۲ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۲۰ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.

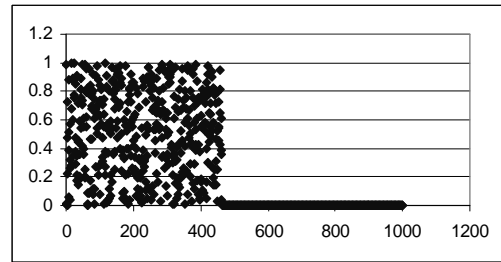
• در سری نهم که با اعداد ۳۰۱۰ و ۴۷۶۳ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۸۰۲ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن به عدد صفر رسیده و این عدد تا پایان تکرار می شود.

• در سری دهم که با اعداد ۲۳۹۳ و ۴۷۶۵ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۴۵۵ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۸۴ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.

همانطور که در نتایج فوق و در نمودارهای مربوطه مشاهده می گردد در نه مورد از ده مورد فوق به حلقه تکرار اعداد و در یک مورد به حلقه تکرار صفر برخورد شد و اعداد تصادفی به تعداد مورد نیاز تولید نگردید و عملاً دنباله از هم پاشیده می شود. می توان نتیجه گرفت با توجه به تعداد اعداد تصادفی تولید شده در این روش (۲۰۸ و ۵۱ و ۳۹۸ و ۴۱ و ۸ و ۱۶۶ و ۴۸۵ و ۳۲ و ۸۰۲ و ۴۵۵ عدد)، که بطور متوسط ۲۶۵ عدد می باشد و با توجه به اینکه در شبیه سازی عملی تعداد اعداد تصادفی مورد نیاز، به مراتب بیش از این اعداد است، لذا این الگوریتم، به علت از هم پاشیدگی الگوریتم مناسبی نمی باشد. نمودار زیر نشان دهنده تعداد اعداد تصادفی تولید شده در این آزمون می باشد.



نمودار ۳. تعداد اعداد تصادفی تولید شده توسط روش  
مضرب ثابت



نمودار ۱۰-۲. سری دهم تابع Rand

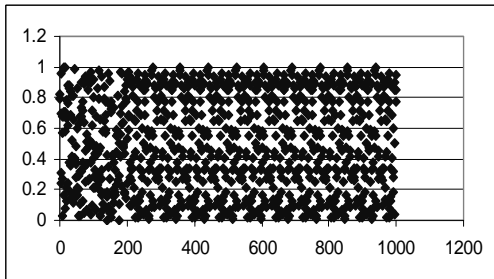
## ۵. روش مضرب ثابت

در این روش نیز ابتدا دو عدد بعنوان هسته که تعداد ارقام آنها مساویست انتخاب می شود ( بطور مثال  $a$  و  $b$ ). سپس این دو عدد در هم ضرب گردیده عدد حاصل را در نظر گرفته،  $n$  رقم میانی آن بعنوان عدد تصادفی انتخاب می گردد و چون اعداد تصادفی تولید شده باید بین ۰ و ۱ باشد، این عدد بر  $10^n$  تقسیم می گردد. برای مثال اگر عدد انتخاب شده چهاررقمی باشد عدد بر ۱۰۰۰۰ تقسیم می گردد تا حاصل در بازه صفر و یک قرار گیرد. سپس عدد چهاررقمی که بدست آمده است (فرض می کنیم عدد  $C$ ) را در همان عدد  $a$  ضرب و مجدداً چهاررقم میانی را انتخاب کرده، این کار را ادامه می یابد، بدون آنکه عدد  $a$  تغییر کند. این روش، به دلیل استفاده از عدد ثابت  $a$  روش مضرب ثابت نامیده می شود.

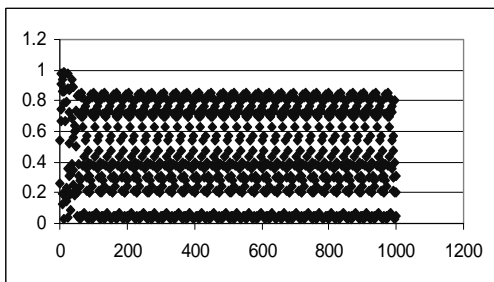
## خلاصه نتایج

- در سری تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۳۹۸۷ و ۷۲۲۳ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۲۰۸ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۸۳ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.
- در سری دوم که با اعداد ۲۵۴۱ و ۶۳۹۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۵۱ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۳۵ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.
- در سری سوم که با اعداد ۲۰۱۴ و ۸۲۳۴ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۳۹۸ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۴۲۵ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.
- در سری چهارم که با اعداد ۲۳۸۷ و ۱۲۹۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۴۱ عدد تصادفی تولید گردید، اما بعد از آن در یک حلقه تکرار به طول ۱۸۷ عدد وارد شده و این اعداد تا پایان تکرار می شود.

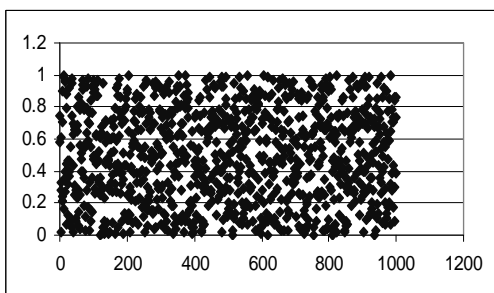
- در سری نهم تعداد اعداد زوج ۵۹۳ عدد و تعداد اعداد فرد ۴۰۷ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد به علت برخورد به عدد صفر وارد دور تکرار می گردد.
  - در سری دهم تعداد اعداد زوج ۵۲۶ عدد و تعداد اعداد فرد ۴۷۴ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می گردد.
- نمودارهای مربوط به اعداد تصادفی تولید شده با الگوریتم مضرب ثابت ذیلا آمده است:



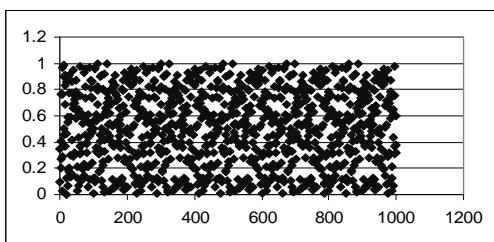
نمودار ۱-۴. سری اول RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



نمودار ۲-۴. سری دوم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



نمودار ۳-۴. سری سوم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب

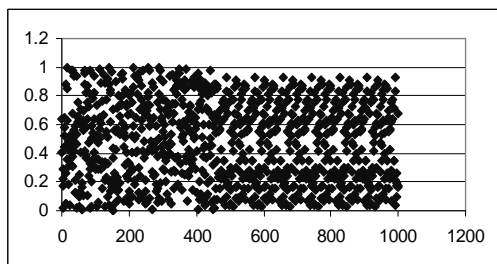


نمودار ۴-۴. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب

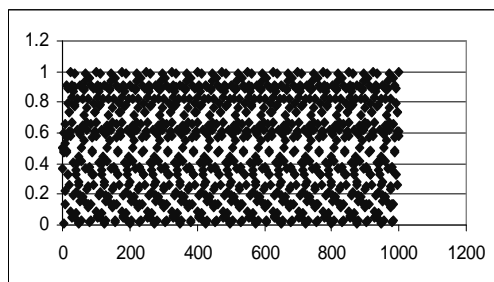
### بررسی اعداد تصادفی تولید شده توسط الگوریتم مضرب

#### ثابت از نظر زوج و فرد بودن

- در اینجا اعداد تصادفی تولید شده توسط روش مضرب ثابت از نظر زوج و فرد بودن مورد بررسی قرار می گیرد. بدین منظور اعدادی که توسط این روش در قسمت های قبل تولید شده بود، مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد. نتایج تحلیل بطور خلاصه در زیر آمده است:
- در سری اول از تولید اعداد تصادفی تعداد اعداد زوج ۴۳۰ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۷۰ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می گردد.
  - در سری دوم تعداد اعداد زوج ۳۸۳ عدد و تعداد اعداد فرد ۶۱۷ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، اعداد فرد دارای توالی بیشتری بودند و بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، این مساله تا پایان ادامه داشت.
  - در سری سوم تعداد اعداد زوج ۴۹۴ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۰۶ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می گردد.
  - در سری چهارم تعداد اعداد زوج ۴۸۶ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۱۴ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می گردد.
  - در سری پنجم تعداد اعداد زوج ۴۶۶ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۳۴ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می گردد.
  - در سری ششم تعداد اعداد زوج ۴۹۴ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۰۶ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، در ابتدا توالی اعداد زوج کمی بیشتر بود، اما پس از ورود به حلقه تکرار به نسبت قابل قبول بود، اما وجود حلقه تکرار، باعث ایجاد نقصی بزرگ شد.
  - در سری هفتم تعداد اعداد زوج ۵۱۷ عدد و تعداد اعداد فرد ۴۸۳ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می گردد.
  - در سری هشتم تعداد اعداد زوج ۴۵۱ عدد و تعداد اعداد فرد ۵۴۹ عدد بود. از نظر بررسی توالی اعداد زوج و فرد، حالتی به نسبت قابل قبول داشت، اما بدلیل وجود دور تکرار ذکر شده در قسمت مضرب ثابت، در این مرحله نیز به تکرار برخورد می گردد.



نمودار ۱۰-۴. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



نمودار ۵-۴. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب

### ۶. روش میان مربعی

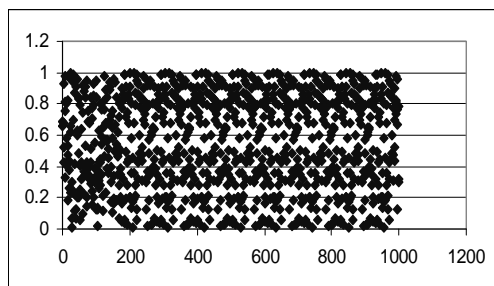
در این روش که در سال ۱۹۴۰ میلادی ابداع گردید، ابتدا یک عدد (a) گرفته می‌شود، سپس این عدد به توان دو می‌رسد و n رقم میانی آن عدد انتخاب می‌گردد (b) و بر  $10^n$  تقسیم می‌گردد. برای مثال اگر عدد انتخاب شده چهار رقمی باشد عدد بر ۱۰,۰۰۰ تقسیم می‌گردد تا عددی بین صفر و یک حاصل گردد. این بار عدد b به توان دو می‌رسد و چهار رقم میانی آن عدد انتخاب می‌گردد (عدد c) و بر ۱۰,۰۰۰ تقسیم می‌گردد و کار به همین ترتیب ادامه می‌یابد.

نتایج و نمودارهای مربوطه نشان می‌دهد، در تمامی ده سری اعداد تصادفی تولید شده به حلقه تکرار برخورد شده و تولید اعداد تصادفی به تعداد مورد نیاز ادامه پیدا نمی‌کند. جالب اینکه در ۸ مورد از ۱۰ مورد به اعداد ۲۱۰۰ و ۴۱۰۰ و ۶۱۰۰ و ۸۱۰۰ برخورد شد. وجه مشترک این اعداد وجود ۱۰۰ در انتهای آنهاست و جالب‌تر اینکه پس از تهیه سری‌هایی با هسته ۱۱۰۰ و ۳۱۰۰ و ۷۱۰۰ و ۹۱۰۰ هم دقیقاً به همین اعداد برخورد شد و فقط در مورد عدد ۵۱۰۰، تماماً به عدد ۱۰۰ برخورد گردید. لذا می‌توان بطور کلی عنوان کرد که در این روش هرگاه به عددی برخورد شود که سه رقم سمت راست آن ۱۰۰ باشد در آن سری به حلقه تکرار برخورد خواهد شد.

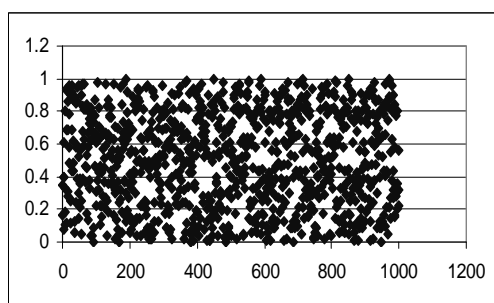
لذا می‌توان گفت با توجه به تعداد اعداد تصادفی تولید شده در این روش (۴۳ و ۹ و ۳۴ و ۱۳ و ۳۵ و ۷ و ۹۹ و ۵۶ و ۶۴ و ۱۱ عدد) که حداکثر ۹۹ عدد می‌باشند و با توجه به اینکه در شبیه‌سازی عملی تعداد اعداد تصادفی مورد نیاز به مراتب بیش از این اعداد است لذا این الگوریتم الگوریتم مناسبی جهت تولید اعداد تصادفی نمی‌باشد. در این روش به علت برخورد به حلقه تکرار بررسی زوج و فرد بودن اعداد عملاً کاربرد ندارد.

### ۷. روش تلفیقی تولید اعداد تصادفی

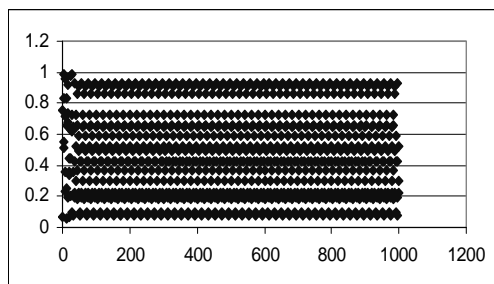
همانطور که مشاهده گردید هیچ‌یک از روش‌های ذکر شده برای تولید تعداد زیادی عدد تصادفی مناسب نیستند و هر یک به‌دلایلی از جمله برخورد با حلقه تکرار، برخورد به عدد صفر و غیره توانایی تولید اعداد تصادفی به تعداد مورد نیاز را ندارند و عملاً از هم



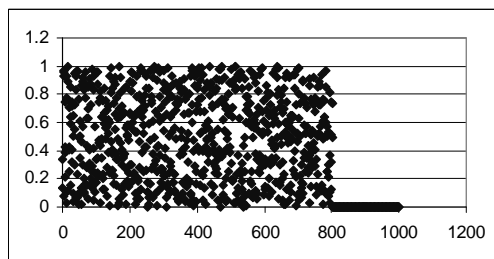
نمودار ۶-۴. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



نمودار ۷-۴. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب

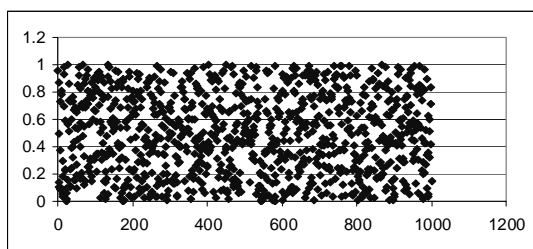


نمودار ۸-۴. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب



نمودار ۹-۴. سری چهارم RN اعداد تصادفی با ا.ل.ب

- در سری سوم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۱۱۹۰ و ۴۸۵۹ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید پنج بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
  - در سری چهارم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۱۳۳۵ و ۲۵۶۷ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید سه بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
  - در سری پنجم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۸۰۳۲ و ۵۴۷۳ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید به عدد صفر هم برخورد نگردید. مشکل خاصی نیز مشاهده نشد.
  - در سری ششم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۱۴۹۶ و ۱۲۸۳ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید یک بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
  - در سری هفتم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۱۷۶۲ و ۹۶۲۴ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید به عدد صفر هم برخورد نگردید. مشکل خاصی نیز مشاهده نشد.
  - در سری هشتم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۱۷۳۹ و ۹۸۲۱ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید یک بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
  - در سری نهم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۹۸۳۴ و ۲۱۷۶ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید پنج بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
  - در سری دهم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۵۶۸۹ و ۴۱۳۸ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید یک بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- نمودارهای مربوط به اعداد تصادفی تولید شده به روش تلفیقی ذیلا آمده است:



نمودار ۱-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی

پاشیده می شود. پس از بررسی تکنیک های مختلف جهت تولید اعداد تصادفی روشی تدوین گردید که هرگاه در دنباله به عددی برخورد کردیم که وارد حلقه تکرار یا صفر می شود، یکی از اعداد هسته تغییر کند. در اینجا برای حفظ ماهیت اعداد تصادفی، باید عددی که بعنوان جایگزین هسته انتخاب می شود نیز خود عددی تصادفی باشد. در این روش که به میزان قابل قبولی توانایی تولید اعداد تصادفی را داراست که در ادامه نشان داده می شود، با استفاده از ترکیب دو روش تولید اعداد تصادفی میان ضربی و مضرب ثابت، که البته هیچ یک به تنهایی قابلیت های لازم را ندارند، روشی حاصل می شود که اعداد تصادفی را به خوبی تولید می کند. تمامی محاسبات و عملیات ریاضی و آماری با کمک الگوریتمی که در محیط نرم افزار Excel نوشته شده است انجام می پذیرد.

در این روش ابتدا دو عدد بعنوان هسته که تعداد ارقام آنها مساویست انتخاب می شود ( بطور مثال a و b) سپس همانگونه که در روش میان ضربی توضیح داده شد تعدادی عدد تصادفی به روش میان ضربی تولید می گردد. همزمان با استفاده از همین دو عدد، بعنوان هسته، در جایی دیگر تعدادی عدد تصادفی با استفاده از روش مضرب ثابت تولید می گردد. همانطور که مشاهده گردید به احتمال زیاد در روش میان ضربی به عدد صفر برخورد خواهد شد و سپس عدد صفر تا پایان تکرار خواهد شد. در روش جدید پس از برخورد با عدد صفر و یا تکرار یک عدد از دنباله اعداد تولید شده توسط روش مضرب ثابت، یکی از اعداد تولید شده در آن روش بعنوان هسته ای جدید برای ادامه تولید اعداد تصادفی به روش میان ضربی استفاده می گردد و اگر در جای دیگر نیز به عدد صفر برخورد شد و یا عددی تکرار گردید مجدداً به همین ترتیب یک عدد تصادفی تولید شده توسط روش مضرب ثابت جایگزین می گردد. چون هسته نیز در اینجا بصورت تصادفی انتخاب شده است، خللی به مفهوم اعداد تصادفی وارد نمی شود.

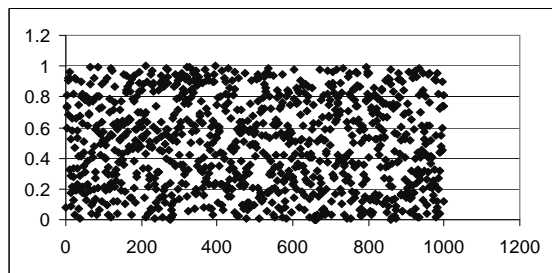
## ۸. بررسی تحلیل روش تلفیقی میان ضربی و مضرب

### ثابت

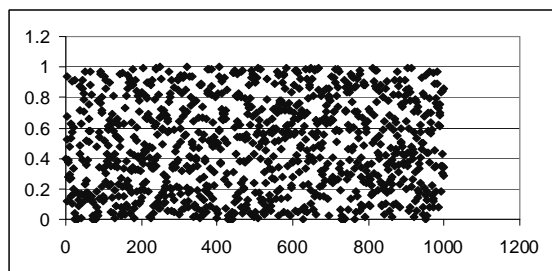
تحلیل داده ها مربوط به ۱۰ با تکرار تولید اعداد تصادفی ذیلا آمده است:

- در سری اول از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۱۸۴۳ و ۱۴۷۴ شروع گردید همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید یک بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح گردید. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.
- در سری دوم از تولید اعداد تصادفی که با اعداد ۵۷۲۱ و ۹۳۴۰ شروع گردید، همانطور که ملاحظه می شود، ۱۰۰۰ عدد تصادفی تولید گردید دو بار هم به عدد صفر برخورد گردید که اصلاح شد. در ادامه نیز مشکل خاصی مشاهده نشد.

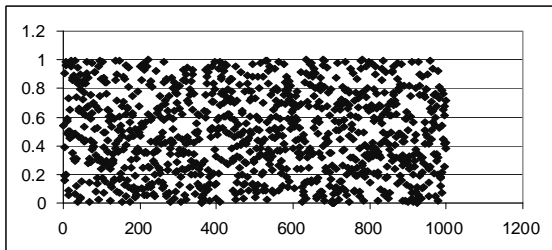




نمودار ۸-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



نمودار ۹-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



نمودار ۱۰-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی

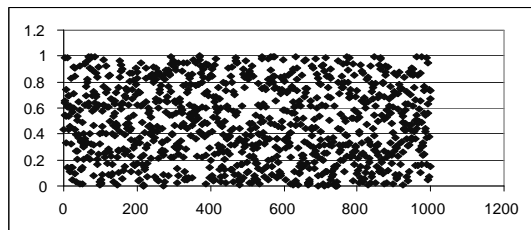
همانطور که در نتایج و نمودارهای فوق مشاهده می شود در روش تلفیقی مشکل خاصی شبیه آنچه در بررسی روشهای میان مربعی، میان ضربی و مضرب ثابت به وجود آمد مشاهده نمی شود.

### ۹. شمارش تعداد اعداد زوج و فرد

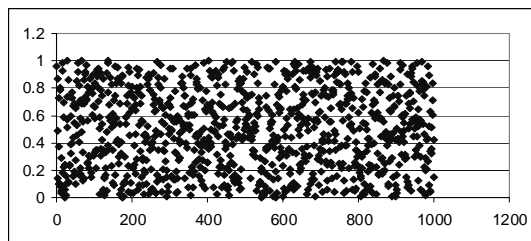
از آنجا که اعداد تصادفی در بسیاری از مواقع جهت تصمیم گیری در موارد بولین صفر و یک به مفهوم انجام یا عدم انجام کاری استفاده می گردند، لذا همواره تبدیل اعداد تصادفی بین صفر و یک به بولین مورد توجه بوده است. این امر با روشهایی چون تقسیم محدوده بین صفر و یک به دو ناحیه بطور مثال بیشتر از  $0.5$  معادل یک و کمتر از  $0.5$  معادل صفر و یا تقسیم بندی اعداد به دو دسته زوج معادل یک و فرد معادل صفر صورت می گیرد. در ادامه با استفاده از تابع Rand به تولید تعدادی عدد تصادفی پرداخته می شود و سپس با استفاده از الگوریتم تهیه شده در محیط Excel آن اعداد مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرند.

### ۱۰. بررسی اعداد تصادفی تولید شده از نظر زوج و فرد بودن

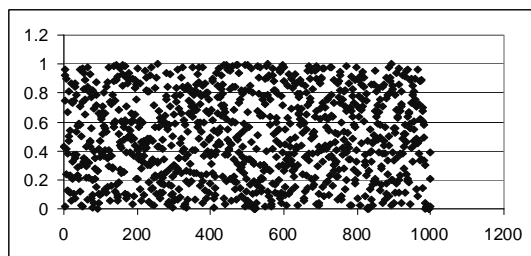
با کمک توابع نوشته شده در ضمن تحقیق براحتی می توان به کرات آزمایش مربوط به زوج و فرد بودن اعداد را (تنها با فشردن



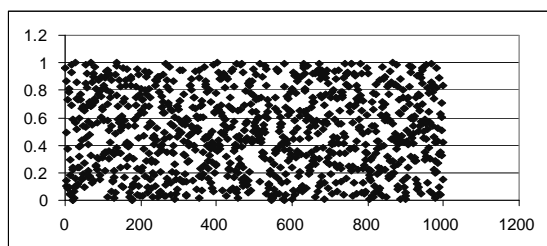
نمودار ۲-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



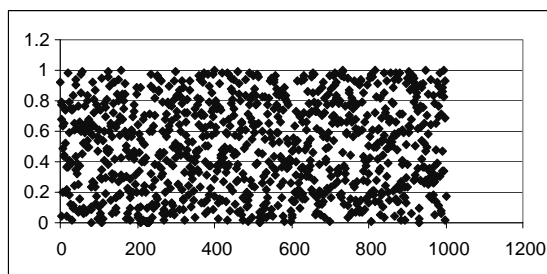
نمودار ۳-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



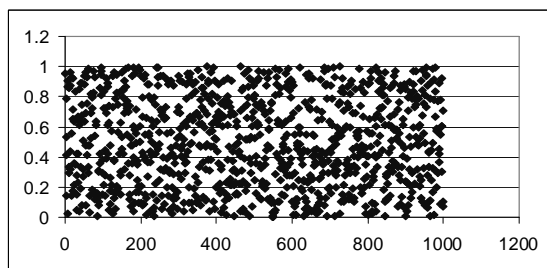
نمودار ۴-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



نمودار ۵-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



نمودار ۶-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی



نمودار ۷-۵. نمایش سری اول اعداد تصادفی

- در ۲۳۴ آزمایش از ۵۰۰ آزمایش، تعداد اعداد فرد بیشتر از تعداد اعداد زوج بود.
  - در ۱۵ آزمایش از ۵۰۰ آزمایش، تعداد اعداد فرد و زوج برابر بود.
  - در ۲۵۴ آزمایش از ۵۰۰ آزمایش، اختلاف تعداد اعداد زوج و فرد بیش از ۲۰ بود.
  - در مجموع، تعداد کل اختلافات بین اعداد زوج و فرد، برابر ۱۲۷۴۰ بود.
- علاوه بر موارد مذکور این امکان نیز وجود دارد که با استفاده از امکانات نرم افزار Excel تکرار شدن تعداد زیادی اعداد زوج یا فرد بصورت متوالی مورد بررسی قرار گیرد.

### ۱۱. نتیجه گیری

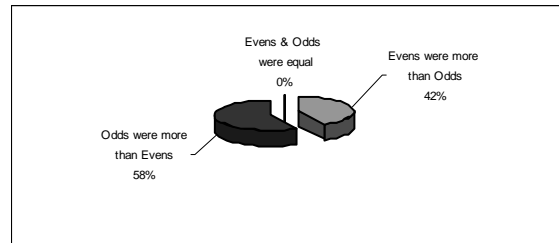
پس از تولید اعداد تصادفی با روش های مختلف و انجام آزمون بر روی آنها نتایج زیر حاصل گردید:

در تولید اعداد تصادفی با روش میان مربعی، در تمامی موارد، بعد از تولید تعداد کمی عدد تصادفی، به حلقه تکرار برخورد شد که در هشت مورد از ده مورد، حلقه تکرار شامل اعداد ۲۱۰۰ و ۴۱۰۰ و ۶۱۰۰ و ۸۱۰۰ بود. در تولید اعداد تصادفی با روش میان ضربی، در نه مورد از ده مورد، پس از تولید تعداد محدودی عدد تصادفی به عدد صفر برخورد شد که پس از برخورد به آن عملاً تولید اعداد تصادفی متوقف می گردد. در یک مورد دیگر نیز به حلقه تکرار برخورد شد. در تولید اعداد تصادفی با روش مضرب ثابت، در نه مورد از ده مورد، پس از تولید تعداد محدودی عدد تصادفی به حلقه تکرار برخورد شد. در یک مورد دیگر نیز به عدد صفر برخورد شد که پس از آن عملاً تولید اعداد تصادفی متوقف گردید.

دکمه (F9) تکرار نمود و با استفاده از شمارنده های ایجاد شده آمار موردنظر را بررسی نمود. بطور مثال در یک آزمایش برای اعداد تولید شده توسط تابع Rand در ۵۰ مرحله تکرار گردید. خلاصه نتایج یکی از این آزمایشات به شرح زیر است:

- تعداد کل آزمایشات : ۵۰
- تعداد دفعاتی که تعداد اعداد زوج بیشتر است: ۲۱
- تعداد دفعاتی که تعداد اعداد فرد بیشتر است: ۲۹
- تعداد دفعاتی که تعداد اعداد زوج و فرد برابر است: صفر
- دفعاتی که اختلاف اعداد زوج و فرد بیش از ۲۰ است: ۲۷
- تعداد کل اختلافات بین اعداد زوج و فرد : ۱۲۴۸

این آزمایش ۱۰ بار متوالی انجام گردید و نتایج در جدول شماره ۱ آمده است. همچنین نمودار زیر مقایسه درصد دفعاتی که تعداد اعداد زوج بیشتر، کمتر یا مساوی تعداد اعداد فرد است را نشان می دهد.



نمودار ۶. درصد دفعات تولید اعداد زوج و فرد

بطور خلاصه این داده ها بیانگر آنست که:

- در ۲۵۱ آزمایش از ۵۰۰ آزمایش، تعداد اعداد زوج بیشتر از تعداد اعداد فرد بود.

جدول ۱. مقایسه تعداد اعداد زوج و فرد

| ۱۰   | ۹    | ۸    | ۷    | ۶    | ۵    | ۴    | ۳    | ۲    | ۱    |  |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|
| ۵۰   | ۵۰   | ۵۰   | ۵۰   | ۵۰   | ۵۰   | ۵۰   | ۵۰   | ۵۰   | ۵۰   | تعداد کل آزمایشات                                    |
| ۳۳   | ۱۹   | ۱۸   | ۲۸   | ۲۶   | ۲۸   | ۲۴   | ۳۰   | ۲۱   | ۲۴   | تعداد دفعاتی که اعداد زوج بیشتر بود                  |
| ۱۷   | ۲۷   | ۳۰   | ۲۰   | ۲۱   | ۲۲   | ۲۵   | ۲۰   | ۲۷   | ۲۵   | تعداد دفعاتی که اعداد فرد بیشتر بود                  |
| ۰    | ۴    | ۲    | ۲    | ۳    | ۰    | ۱    | ۰    | ۲    | ۱    | تعداد دفعاتی که اعداد زوج و فرد برابر بود            |
| ۳۱   | ۲۶   | ۲۳   | ۲۷   | ۲۵   | ۲۶   | ۲۷   | ۲۱   | ۲۴   | ۲۴   | تعداد دفعاتی که اختلاف اعداد زوج و فرد بیش از ۲۰ بود |
| ۱۳۵۶ | ۱۲۷۸ | ۱۲۲۲ | ۱۳۰۸ | ۱۲۵۴ | ۱۲۸۰ | ۱۳۱۲ | ۱۲۹۲ | ۱۳۳۰ | ۱۱۰۸ | تعداد کل اختلافات بین اعداد زوج و فرد                |

ضربی و مضرب ثابت ارائه گردید تا برخی از مشکلات ذکر شده و از هم پاشیدگی دنباله در آن مرتفع گردد.

پس از تحلیل روشهای فوق و مشاهده مشکلات موجود، روشی بعنوان روش تلفیقی تولید اعداد تصادفی بر پایه دو روش میان

نتایج بررسی ها روی روش تلفیقی نشان داد که نه تنها بر خلاف سه روش ذکر شده تعداد زیادی عدد تصادفی تولید می کند بلکه از جهت آزمون های معمول نظیر زوج و فرد بودن نیز قابل اطمینان است.

### منابع

- [1] Pidd, M., *Computer Simulation in Management Science*, 4<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, 1998.
- [2] Banks, J., Carson, J., *Discrete-Event System Simulation*, Prentice-Hall, 1984.
- [3] L'Ecuyer, P., "Uniform Random Number Generation, *Annals of Operations Research*", 1994, Vol. 23.
- [4] L'Ecuyer, P., Granger-Piche, J., "Combined Generators with components from Different Families," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 62, No. 3, 2003, PP. 395-404.
- [5] Chiang, k., Wong, J.Y., "Random Number Generators with Long and Sound Statistical Properties," *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 36, No. 3, 1998, PP. 113-121.
- [6] Marsaglia, G., Tsang W.W., "The 64-bit Universal RNG," *Statistics and Probability Letters*, Vol. 66, No. 2, 2004, PP. 183-187.
- [7] Banks, J., *Handbook of Simulation*, EMP Books and Wiley International Publication, 1998.
- [8] Proceedings of 35<sup>th</sup> Annual Simulation Symposium, California, 14-18 April.
- [9] محلوجی، هاشم، شبیه سازی سیستم های گسسته پیشامد، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۶.