نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید بهار ۱۳۸۸- صفحه ۳۱-۲۳

شماره ۱، جلد ۲۰، بهار ۱۳۸۸

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید دانشگاه علم و صنعت ایران

شابک: ۷۳۷۵-۱۰۱۸

Journal Website: http://ijiefa.iust.ac.ir/

Interpretation of Multivariate Control Chart Based on Paired Decomposition of T^2

Saeed Hafezi & Hamid Shahriari

Saeed Hafezi, *student of Industrial Eng-kntu.*
Hamid Shahriari, *Assistance professor of Industrial Eng, kntu*

Keywords

MSPC, T^2 Chart, Warning Limits, Paired Decomposition of T^2

ABSTRACT

There are multivariate processes in which two or more quality characteristics must be controlled simultaneously. In controlling such processes, two goals must be achieved. The first one is to identify an out of control situation and the second is to determine the quality features caused the out of control signal. In this paper, both goals are investigated. In addition to the current methods used to diagnose an out of control situation, for the purpose of making the Hotelling T^2 more sensitive, the warning limits for T^2 are also defined. In determining the quality characteristics caused the out of control situation, current methods are investigated and a new procedure is suggested. Not only the new approach does not have some of the deficiencies with the current methods, but also its application is much simpler in practice. The results of simulation using the warning limits for very small shifts in process mean vector indicate that in 81% of the time, shifts are being detected. While in similar conditions, when the regular T^2 is used, only 19% of the time true signals are observed. In comparison with similar techniques, use of new procedure in detecting the quality characteristics responsible for an out of control situation identifies the shifted quality features in 76% of the time. While in existing methods at most in 64% of the time the shifted quality characteristics are detected.

© ۱۳۸۸، جلد ۲۰، شماره ۱ (نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید)

تفسیر نمودار کنترل چند متغیره بر اساس تجزیه زوجی آماره T^2

سعید حافظی و حمید شهریاری

کلمات کلیدی

کنترل آماری فرآیند چند متغیره، حدود هشدار، تجزیه زوجی آماره

چکیده:

در فرآیندهای چند متغیره که نیازمند کنترل دو یا چند مشخصه کیفی به طور همزمان هستند، باید دو هدف عمده محقق گردد. هدف اول تشخیص وضعیت‌های خارج از کنترل و هدف دوم شناسایی مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده، در زمان وقوع یک وضعیت خارج از کنترل می‌باشد. در این مقاله علاوه بر بررسی روش‌های موجود برای تشخیص وضعیت خارج از کنترل در نمودارهای کنترل T^2 ، به منظور ایجاد حساسیت بیشتر در این نمودارها، حدود هشدار برای آنها تعریف شده است. در شناسایی مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده، روش‌های موجود مورد بررسی قرار گرفته و روشی جدید پیشنهاد شده است. نتایج شبیه‌سازی درخصوص ارزیابی عملکرد حدود هشدار نشان می‌دهد که با تعریف این حدود برای نمودار کنترل Hotelling T^2 می‌توان ۸۱٪ از وضعیت‌های خارج از کنترل را به درستی شناسایی کرد. این در حالی است که با استفاده از نمودار کنترل

تاریخ وصول: ۸۶/۱۰/۳۰

تاریخ تصویب: ۸۷/۹/۲۵

سعید حافظی، کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، saeed_hafezi@yahoo.com

دکتر حمید شهریاری، عضو هیأت علمی دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hshahriari@kntu.ac.ir

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]

معمولی تنها در ۱۹٪ از موارد چنین وضعیت‌هایی قابل کشف می‌باشند. همچنین در مقایسه با روش‌های مشابه، استفاده از رویه تجزیه زوجی آماره T^2 در کشف مشخصه‌های کیفی عامل انحراف، منجر به شناسایی دقیق مشخصه‌های اصلی منحرف‌شده در ۷۶٪ از موارد شده است. در حالی که در روش مشابه، حداکثر در ۶۴٪ از موارد مشخصه‌های عامل انحراف به خوبی شناسایی می‌شوند.

۱. مقدمه

مسائل کنترل کیفیت در صنعت، ممکن است شامل بیش از یک مشخصه کیفی باشند؛ یعنی برداری از مشخصه‌ها وجود داشته باشد. خصوصاً وقتی این مشخصه‌ها وابسته هستند، باید روش مناسبی برای کنترل همزمان آنها فراهم باشد. از این رو زمینه گسترده‌ای در کنترل آماری فرآیند چند متغیره (MSPC[1]) ایجاد شده است. همانطور که Lowry and Montgomery در مطالعه خود اشاره کرده‌اند، مهم‌ترین کار در این زمینه توسط Hotelling(۱۹۴۷) انجام شد [۱].

وی روش T^2 را توسعه داد و از آن در نمودارهای کنترل استفاده نمود. در سال ۱۹۶۰ با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر، کنترل آماری فرآیند چند متغیره بسیار مورد توجه قرار گرفت و بحث کنترل همزمان چندین مشخصه کیفی در سطح وسیعی مطرح شد. از این سال به بعد مقالات متعددی در این زمینه منتشر شد. پیش از آن، از نمودارهای کنترل یک متغیره متعددی استفاده می‌شد که افزایش خطای نوع I را به دنبال داشت. نمودار Hotelling T^2 در کشف یک وضعیت خارج از کنترل بسیار خوب عمل می‌کند. نقطه ضعف عمده این نمودار آن است که علی‌رغم اینکه می‌تواند به درستی یک وضعیت خارج از کنترل را نشان دهد، در تعیین مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده، کمبود دارد.

گرچه با بررسی هر مشخصه به صورت منفرد می‌توان تا حدی به نتایج مورد نظر دست یافت؛ اما با بالا رفتن تعداد مشخصه‌های کیفی، این کار دارای خطای بالایی خواهد بود؛ زیرا همبستگی بین مشخصه‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. همچنین نمودار Hotelling T^2 به تغییرات کوچک در بردار میانگین و ماتریس واریانس-کوواریانس حساسیت کمی دارد.

در این مقاله، پس از مرور اجمالی بر نمودارهای کنترل چند متغیره، به منظور ایجاد حساسیت بیشتر در نمودار کنترل Hotelling T^2 برای کشف تغییرات کوچک در فرآیند، به تعریف حدود هشدار برای این نمودار پرداخته می‌شود. سپس مهمترین روش‌های موجود برای تشخیص مشخصه‌های کیفی عامل انحراف، معرفی و روش جدیدی ارائه خواهد شد. از داده‌های شبیه‌سازی نیز برای ارزیابی کارایی حدود هشدار و روش نوین تعریف شده برای کشف مشخصه‌های کیفی عامل انحراف، در کنترل فرآیندهای چند متغیره استفاده شده است.

۲. نمودارهای کنترل چند متغیره

عمومی‌ترین آماره‌های مورد استفاده در کنترل آماری فرآیندهای چند متغیره عبارتند از T^2 ، MEWMA[2] و MCUSUM[3] . بر اساس آنچه Lowry and Montgomery ، Mason and Young و Bersimis و همکاران در مطالعات خود بیان کرده‌اند [۱-۳]، روش Hotelling T^2 تأثیرات همه مشخصه‌های کیفی را در یک آماره T^2 ترکیب کرده و از توزیع آماری χ^2 یا F استفاده می‌کند. در صورتی که پارامترهای توزیع احتمال معلوم باشند، از توزیع χ^2 و در غیر اینصورت از توزیع F استفاده می‌شود. اگر فرآیند، شامل p مشخصه کیفی باشد، با معلوم بودن مقادیر $\underline{\mu_0}$ و $\underline{\underline{\sum_0}}$ (پارامترهای توزیع نرمال p متغیره)، مقدار آماره مورد استفاده برای کنترل فرآیند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_0^2 = n(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu_0})'\underline{\underline{\sum_0}}^{-1}(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu_0}) \qquad (۱)$$

که در آن $\underline{\overline{X}} = (\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_p)^T$ و $\underline{\mu_0} = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p]^T$ می‌باشند. حد بالای کنترلی برای این نمودار بصورت $UCL = \chi^2_{\alpha,p}$ خواهد بود. چنانچه پارامترهای توزیع احتمال معلوم نباشند و با استفاده از نمونه‌های تصادفی به دست آمده، تخمین زده شوند؛ آنگاه از توزیع F استفاده می شود. آماره مورد استفاده در این حالت بصورت زیر خواهد بود:

$$T^2 = n\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\underline{\overline{X}}}\right)^T \underline{\underline{S}}^{-1}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\underline{\overline{X}}}\right) \qquad (۲)$$

دو مرحله متفاوت برای استفاده از نمودارهای کنترل Hotelling T^2 وجود دارد. در فاز اول و در شرایطی که فرآیند چند متغیره پایدار عمل نماید، m نمونه تصادفی p متغیره اولیه انتخاب و آماره‌های $\underline{\underline{\overline{X}}}$ و $\underline{\underline{S}}$ به عنوان تخمین‌هایی برای پارامترهای $\underline{\mu}$ و $\underline{\underline{\sum}}$ محاسبه می‌شوند. با توجه به اطلاعات به دست آمده در فاز اول، در فاز دوم از نمودارهای کنترل با حدود زیر، برای کنترل فرآیند چند متغیره استفاده می‌شود:

$$UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \qquad (۳)$$

$$LCL = 0$$

1. Multivariate Statistical Process Control

2. Multivariate Exponentially Weighted Moving Average

3. Multivariate Cumulative Sum

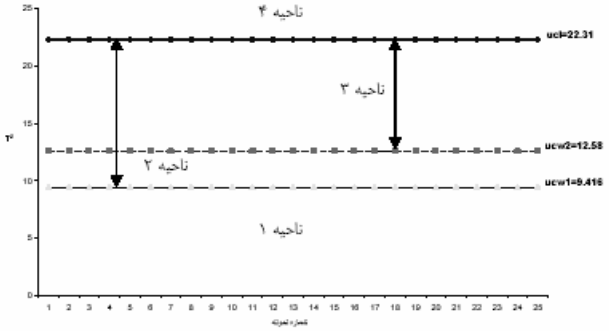
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]

در آماره‌های MEWMA و MCUSUM کلیه مشاهدات تا آخرین مشاهده گرفته شده از فرآیند، در محاسبه آماره در نظر گرفته می‌شوند. مطالعات Rehmert نشان می‌دهد این نمودارها در مقایسه با نمودار Hotelling T^2 نسبت به تغییرات کوچک در فرآیند، حساسیت بیشتری دارند [۴]؛ اما در کشف تغییرات ناگهانی کندتر عمل می‌کنند. بنابراین باید حساسیت نمودار Hotelling T^2 در شناسایی تغییرات کوچک بهبود یابد. در این مقاله استفاده از نمودار Hotelling T^2 به دلیل سهولت در محاسبات مربوط به آماره، مشخص بودن روندها، حساسیت بیشتر در کشف تغییرات ناگهانی و بزرگ در فرآیند نسبت به دو نمودار دیگر و تحلیل راحت‌تر نتایج، برای ادامه تحقیق انتخاب می‌شود. البته به منظور ایجاد حساسیت بیشتر این نمودار در کشف تغییرات کوچک، به تعریف حدود هشدار برای این نمودار پرداخته خواهد شد.

۳. حدود هشدار برای نمودارهای کنترل چند متغیره Hotelling T^2

استفاده از حدود هشدار[۱] در به کارگیری نمودار کنترل HotellingT^2 ، کمک بسیار مناسبی به کشف تغییرات در فرآیند، قبل از وقوع یک وضعیت خارج از کنترل خواهد کرد. به منظور تعریف حدود هشدار برای این نمودار، ابتدا با در نظر گرفتن احتمال ارتکاب خطای نوع I به میزان α=۰/۰۰۲۷ برای یک وضعیت تحت کنترل، به دنبال یافتن مقداری از احتمال ارتکاب خطای نوع I هستیم که قرار گرفتن دو نقطه متوالی در حد کنترلی آن، معادل قرار گرفتن یک نقطه خارج از حد کنترلی بالاست. بنابراین K به عنوان مقدار احتمالی که یک نقطه در بالای حد هشدار UCW2 و پایین حد بالای نمودار T^2 یعنی UCL قرار گیرد، تعریف می‌شود. لذا همان‌طور که در شکل۱ مشاهده می‌شود :

K^2=۰/۰۰۲۷ ⟶ K=۰/۰۵۲



شکل ۱. نواحی کنترل در یک نمودار Hotelling T^2 با حدود هشدار

بنابراین احتمال قرار گرفتن نقطه‌ای در ناحیه ۳ تقریباً برابر با ۰/۰۵۲ است. برای تعیین مقدار حد هشدار UCW2 بر روی نمودار، باید مقدار احتمال ارتکاب خطای نوع I مورد نظر در کل فضای بالای حد هشدار UCW2 محاسبه گردد که چنانچه به α_2 نشان داده شود برابر α_2=۰/۰۵۲+۰/۰۰۲۷≈۰/۰۵۵ می‌باشد. با قرار دادن α_2 =۰/۰۵۵ در رابطه (۳)، می‌توان مقدار T^2 را برای حد بالای هشدار بدست آورد.

با قرار گرفتن دو نقطه متوالی در بالای این حد، می‌توان به احتمال وقوع تغییر در فرآیند پی برد. استفاده از حد هشدار دیگری نیز می‌تواند بسیار مفید باشد. با در نظر گرفتن اینکه سه نقطه متوالی معادل با یک نقطه در خارج از حد بالای نمودار کنترل HotellingT^2 باشد داریم :

K^3=۰/۰۰۲۷ ⟶ K=۰/۱۴

بنابراین احتمال قرار گرفتن نقطه‌ای بین حدود UCW1 و UCL ، مطابق شکل۱ برابر ۰/۱۴ بوده و مقدار احتمال ارتکاب خطای نوع I که به α_1 نشان داده می‌شود، برای تعیین مقدار حد هشدار UCW1 برابر α_1 =۰/۱۴+۰/۰۰۲۷≈۰/۱۴۳ می باشد. بنابراین اگر حدود هشدار برای قرار گرفتن دو و یا سه نقطه متوالی در بالای حد هشدار، به ترتیب با UCW2 وUCW1 نشان داده شوند می‌توان یک نمودار کنترل چند متغیره Hotelling T^2 با حدود هشدار را به صورت شکل ۱ نمایش داد.

۴. روش‌های فعلی تشخیص مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده

همانطور که Jackson(۱۹۹۱) بیان نموده است، هر روش کنترل فرآیند چند متغیره باید دارای چهار ویژگی باشد [۱]:

۱) قابلیت تشخیص در کنترل و یا خارج از کنترل بودن فرآیند

۲) ثابت ماندن مقدار احتمال ارتکاب خطای نوع I کل (احتمال خارج از کنترل قلمداد کردن یک وضعیت تحت کنترل)

۳) در نظر گرفتن وجود یا عدم وجود همبستگی بین مشخصه‌های کیفی در محاسبات

۴) تشخیص مشخصه‌های کیفی منحرف شده در هنگام ایجاد یک وضعیت خارج از کنترل

تاکنون روش‌های مختلفی برای کشف مشخصه‌های کیفی عامل انحراف در نمودارهای کنترل چند متغیره توسط Alt(۱۹۸۵)، Murphy(۱۹۸۷)، Doganaksoy, Faltin and Tucker(۱۹۹۱)، Chua and Montgomery(۱۹۹۲)، Hawkins (۱۹۹۳)، Hayter and Tsui(۱۹۹۴)، Mason, Tracy and Young(۱۹۹۵) و Kourti and MacGregor(۱۹۹۶) ارائه شده است که هر یک از آنها دارای معایب خاص بوده و برخی از ویژگی‌های بیان شده توسط Jackson(۱۹۹۱) را شامل نمی‌شوند [۵-۷]. برخی روش‌های ترسیمی نیز توسط Fuchs and Benjamini(۱۹۹۴) و

4. Warning Limits

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]

Sparks(۱۹۹۷) ارائه شده‌اند که با افزایش تعداد مشخصه‌های کیفی، کارایی آنها کاهش می‌یابد [۸]. از آنجا که روش معرفی‌شده توسط Mason و همکاران، مشابهت بیشتری با روش نوین ارائه شده در این مقاله دارد، مختصراً به تشریح آن پرداخته می‌شود [۷].

در روش Mason و همکاران برای کشف مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده [۷]، آماره T^2 به جزءهای مستقلی که هر یک منعکس‌کننده سهم یک مشخصه کیفی می‌باشند تجزیه می‌شود. در این روش آماره T^2 به صورت زیر به p جزء متعامد شکسته می‌شود:

$$T^2 = T_1^2 + T_{2.1}^2 + T_{3.1,2}^2 + \ldots + T_{P.1,2,\ldots,P-1}^2 = T_1^2 + \sum_{j=1}^{p-1} T_{j.1,2,\ldots,j-1}^2 \qquad (۴)$$

رابطه فوق منحصربه‌فرد نبوده و تنها یکی از ترکیب‌های مختلف امکان‌پذیر از !p ترکیب مختلف را نشان می‌دهد. اولین جزء رابطه (۴) یعنی T_1^2 یک آماره غیرشرطی برای اولین متغیر از بردار مشاهده شده $\underline{X}$ و عبارت کلی بخش‌های دیگر (جزء دوم) که شرطی می‌باشند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_1^2 = \frac{(X_1 - \bar{X}_1)^2}{S_1^2} \qquad (۵)$$

$$T_{j.1,2,\ldots,j-1}^2 = \frac{\left(X_j - \bar{X}_{j.1,2,\ldots,j-1}\right)^2}{S_{j.1,2,\ldots,j-1}^2} \qquad (۶)$$

که در آن:

$$\bar{X}_{j.1,2,\ldots,j-1} = \bar{X}_j + b_j^t\left(X_i^{(j-1)} - \bar{X}^{(j-1)}\right)$$
$$S_{j.1,2,\ldots,j-1}^2 = S_X^2 - S_{Xx}^t S_{xx}^{-1} S_{Xx}$$
$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{Xx} \\ S_{Xx}^t & S_X^2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b_j = \left[S_{xx}^{-1} S_{Xx}\right]$$

همانطور که Maravelakis بیان نموده، از معایب این روش آن است که تنها برای حالتی که مشاهدات انفرادی از فرآیند گرفته می‌شود طراحی شده است [۸]؛ در حالی که در بسیاری از موارد نمونه‌گیری چندتایی به نمونه‌گیری‌های انفرادی ارجحیت دارد و خطا را کاهش می‌دهد. به علاوه این روش دارای محاسبات مفصل و فراوان بوده و حساسیت آن با افزایش تعداد مشخصه‌ها کاهش می‌یابد.

۵. روش جدید تعیین مشخصه‌های کیفی عامل انحراف

این روش بر اساس تجزیه آماره T^2 به سه جزء اصلی بوده و در تشخیص مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده برخلاف روش ارائه شده توسط Mason و همکاران وی که در آن باید برای کلیه ترکیبات $(p-1)$,...,2,1 تایی از مشخصه‌ها، محاسبات آماره T^2 صورت گیرد [۷]، تنها ترکیبات ۲تایی از مشخصه‌های کیفی مسأله مورد استفاده قرار خواهند گرفت و از اینرو ابعاد مسأله، در تجزیه آماره T^2 بسیار کاهش می‌یابد. فرض کنید مشخصه‌های کیفی iام و jام از یک مسأله p متغیره نرمال که $(\underline{\bar{\bar{X}}}, \underline{\bar{\bar{S}}})$ تخمین‌هایی از مقادیر پارامترهای جامعه هستند انتخاب شوند. مقدار آماره T^2 برای زوج iوj به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T^2 = n\begin{bmatrix} \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i & \bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j \end{bmatrix} S_{i,j}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i \\ \bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

$$s_{ij} = s_{ji} \qquad (۸)$$

$$S_{i,j} = \begin{bmatrix} s_{ii} & s_{ij} \\ s_{ji} & s_{jj} \end{bmatrix} \rightarrow S_{i,j}^{-1} = \frac{1}{s_{ii}s_{jj} - s_{ij}^2} \begin{bmatrix} s_{jj} & -s_{ij} \\ -s_{ji} & s_{ii} \end{bmatrix} \qquad (۹)$$

$$T^2 = \frac{n}{s_{ii}s_{jj} - s_{ij}^2}\left(\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i\right)^2 s_{jj} + \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j\right)^2 s_{ii} - 2\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i\right)\left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j\right)s_{ij}\right)$$

اگر طرفین تساوی را بر عبارت $s_{ii}s_{jj}$ تقسیم کنیم داریم:

$$\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{\sqrt{s_{ii}}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j}{\sqrt{s_{jj}}}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{s_{ii}}\right)\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{s_{jj}}\right)\left(s_{ij}\right) = \frac{T^2\left(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}^2\right)}{ns_{ii}s_{jj}} \qquad (۱۰)$$

از آنجا که $r_{i,j} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{jj}}}$ می‌توان رابطه (۱۰) را به صورت رابطه (۱۱) بازنویسی کرد.

$$\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{\sqrt{s_{ii}}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j}{\sqrt{s_{jj}}}\right)^2 - 2\left(r_{i,j}\right)\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{\sqrt{s_{ii}}}\right)\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{\sqrt{s_{jj}}}\right) = \frac{T^2\left(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}^2\right)}{ns_{ii}s_{jj}} \qquad (۱۱)$$

که در آن $r_{i,j}$ ضریب همبستگی بین دو مشخصه iوj است.

همانطور که رابطه (۱۱) نشان می‌دهد عبارت اول $\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{\sqrt{s_{ii}}}\right)^2$ برابر با مقدار آماره T^2 در حالتی است که فقط مشخصه کیفی i وجود داشته باشد.

عبارت دوم رابطه (۱۱) نیز $\left(\frac{\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j}{\sqrt{s_{jj}}}\right)^2$ مربوط به حالتی است که فقط مشخصه کیفی jام در محاسبات در نظر گرفته شود. همان‌طور که ملاحظه می شود در عبارات اول و دوم رابطه (۱۱) تنها اثر تغییر یک مشخصه کیفی نمایان شده است.

عبارت سوم یعنی $\left[2\left(r_{i,j}\right)\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{\sqrt{s_{ii}}}\right)\left(\frac{\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i}{\sqrt{s_{jj}}}\right)\right]$ نیز مربوط به تأثیر متقابل مشخصه‌های کیفی iوj در حالتی است که هر دو مشخصه کیفی در نظر گرفته شوند و آن را $T_{i,j}^2$ می‌نامیم.

بنابراین با توجه به اینکه در رابطه (۱۱)، $s_{ii}s_{jj} - s_{ij}^2 = c$ و $ns_{ii}s_{jj} = k$ مقادیر ثابتی هستند داریم:

$$T_i^2 + T_j^2 + T_{i,j}^2 = \frac{T^2 c}{k}$$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]

با تجزیه آماره T^2 به سه عبارت فوق می توان تأثیر مشخصه کیفی iام ، مشخصه کیفی jام و اثر متقابل آنها بر یکدیگر را به راحتی متمایز کرد. روش تجزیه آماره T^2 به سه جزء مجزا به صورت فوق، مبنای روش جدیدی است که برای کشف مشخصه‌های کیفی منحرف شده در فرآیندهای چند متغیره ارائه خواهد شد. در این روش تنها ترکیبات زوجی از مشخصه‌های کیفی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند؛ به عبارت دیگر اگر p مشخصه کیفی وجود داشته باشد آنگاه $\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$ حالت از ترکیبات ۲تایی ایجاد خواهد شد.

۱-۵. الگوریتم روش جدید

با فرض آنکه پارامترهای جامعه چند متغیره نرمال (μ,Σ) معلوم یا با استفاده از داده‌های اولیه تحت کنترل، تخمین زده شده باشند$(\overline{\overline{X}},S)$ می‌توان الگوریتم زیررا برای کشف مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده به کار گرفت.

گام۱- مقدار آماره T^2 را برای هر نمونه با استفاده از رابطه (۲) محاسبه و در صورتی که نقطه از حد بالای کنترلی خارج و یا یکی از حالت‌های خارج از کنترل بیان شده در بخش‌های قبل برای نمودارهای HotellingT^2 با حدود هشدار ، حادث گردید به گام ۲ بروید.

گام ۲- با تشکیل ترکیبات دوتایی از مشخصه‌های کیفی، مقدار T^2 را برای هر یک از آنها با استفاده از روابط (۷) تا (۹) بدست آورید. سپس با استفاده از رابطه (۱۱) به محاسبه طرفین معادله پرداخته و با تقسیم هر یک از سه عنصر سمت چپ معادله بر عنصر سمت راست، درصد هر عبارت را در مقدار T^2 به دست آمده برای هر نمونه محاسبه نمائید.

گام۳- مقادیر q_1 و q_2 را با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) محاسبه و مقدار ρ را تعیین نمائید. همچنین مقدار $r_{i,j}$ را برای هر زوج محاسبه کنید.

گام۴- با در دست داشتن درصد هر یک از سه عبارت T_i^2، T_j^2و $T_{i,j}^2$در مقدار T^2 و مقادیر q_1 ، q_2 ، ρ و $r_{i,j}$، به تحلیل داده‌های به دست آمده برای هر زوج بر اساس حالت‌های زیر پرداخته می‌شود.

حالت ۱: $T_{i,j}^2 \geq 0$

۱-الف) اگر مقدار $T^2 > q_1$ ، $T_{i,j}^2 > q_2$ و $|r_{i,j}| < \rho$ باشند آنگاه نتیجه می‌شود که هر دو مشخصه کیفی iوj تغییر کرده اند. با مشاهده و مقایسه مقادیر T_i^2 و T_j^2 می‌توان به بزرگی یا کوچکی تغییر هر مشخصه کیفی به طور مجزا پی برد. در این حالت تأثیر همبستگی محسوس نبوده است.

۱-ب) اگر $T^2 > q_1$ ، $T_{i,j}^2 > q_2$ و $|r_{i,j}| > \rho$ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که هر دو مشخصه کیفی تحت تأثیر همبستگی بین آنها تغییر کرده‌اند. به عبارت دیگر در این حالت همبستگی، تأثیرگذار بوده است. با مقایسه مقادیر T_i^2 و T_j^2 و یافتن مشخصه دارای درصد بیشتر در آماره T^2 می‌توان مشخصه اصلی منحرف‌شده را شناسایی کرد.

۱-ج) اگر $T^2 > q_1$ و $0 \leq T_{i,j}^2 \leq q_2$ آنگاه تنها مشخصه‌ای منحرف شده است که دارای T_i^2 یا T_j^2 بیشتری باشد.

حالت ۲: $T_{i,j}^2 < 0$

۲-الف) اگر $T^2 > (q_1/2)$ ، $T_{i,j}^2 < -q_2$ و $|r_{i,j}| < \rho$باشد، هر دو مشخصه iوj تغییر کرده‌اند. با مشاهده و مقایسه مقادیر T_i^2 و T_j^2 می‌توان به بزرگی یا کوچکی تغییر هر مشخصه کیفی به طور مجزا پی برد. در این حالت تأثیر همبستگی محسوس نبوده است.

۲-ب) اگر $T^2 > (q_1/2)$ ، $T_{i,j}^2 < -q_2$ و $|r_{i,j}| > \rho$ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که هر دو مشخصه کیفی تحت تأثیر همبستگی بین آنها تغییر کرده‌اند. به عبارت دیگر در این حالت همبستگی، تأثیرگذار بوده است. با مقایسه مقادیر T_i^2 و T_j^2 و یافتن مشخصه دارای درصد بیشتر در آماره T^2 می‌توان مشخصه اصلی منحرف‌شده را شناسایی کرد.

۲-ج) اگر $T^2 > q_1$ و $-q_2 \leq T_{i,j}^2 < 0$ باشد آنگاه مشخصه‌ای که دارای T_i^2 یا T_j^2 بیشتری است به عنوان مشخصه کیفی منحرف‌شده شناسایی می‌شود.

حالت ۳:

در صورتی که هیچ یک از شرایط مطرح شده فوق برقرار نباشد، زوج مربوطه مورد تجزیه و تحلیل قرار نمی‌گیرد.

گام۵: برای هر زوج، شرایط مطرح شده در گام ۴ بررسی و در پایان، فراوانی تکرار هر مشخصه کیفی محاسبه می شود. مشخصه‌هایی که دارای فراوانی بیشتری هستند دچار تغییرات بیشتری نیز شده‌اند و باید تحت کنترل بیشتری قرار گیرند.

گام۶: برای بررسی جهت تغییرات مشخصه‌های کیفی منحرف شده می‌توان از جدول ۱ کمک گرفت.

جدول ۱: جدول شناسایی جهت تغییرات مشخصه‌ها

$r_{i,j}$ \ $T_{i,j}^2$	−	+
−	یک‌مشخصه افزایش و مشخصه دیگر کاهش یافته است	هر دو مشخصه در یک جهت افزایش یا کاهش یافته‌اند
+	هر دو مشخصه در یک جهت افزایش یا کاهش یافته‌اند	یک‌مشخصه افزایش و مشخصه دیگر کاهش یافته است

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]

در حالت‌های مطرح شده فوق q_1، q_2 و ρ در هر بار نمونه‌گیری، مقادیر ثابتی هستند که قبل از آغاز تحلیل نتایج باید محاسبه و تعیین شوند. کمیت q_1 که مقدار معنی‌دار بودن آماره T^2 برای تحلیل می‌باشد برابر با حد پایین حد هشدار UCW1 برای ترکیبات ۲تایی از مشخصه‌ها (p=۲) در نظر گرفته شده و بر اساس رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$q_1=\frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1}F_{\alpha,p,mn-m-p+1}=\frac{2(m+1)(n-1)}{mn-m-1}F_{0.1432,mn-m-1} \qquad (۱۲)$$

کمیت q_2 که برای معنی‌دار بودن مقدار $T_{i,j}^2$ (درصد تأثیر همبستگی بین مشخصه‌ها در آماره T^2) در نظر گرفته شده است، به صورت زیر برحسب درصد محاسبه می‌شود:

$$q_2=\frac{2\rho}{q_1}\times 100 \qquad (۱۳)$$

که در آن ρ معادل حداقل ضریب همبستگی معنی‌دار مورد نظر بوده و توسط تحلیل‌گر تعیین می‌گردد. به عبارت دیگر ρ حداقل مقداری است که ضریب همبستگی بین دو مشخصه کیفی باید دارا باشد تا تأثیر متقابل آنها بر یکدیگر معنی‌دار تلقی شود.

در تشریح چگونگی محاسبه q_2 از رابطه (۱۳) ، با تعریف $A=\frac{\bar{x}_i-\bar{\bar{x}}_i}{\sqrt{s_{ii}}}$ ، $B=\frac{\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}_j}{\sqrt{s_{jj}}}$ و q_1 به عنوان حداقل مقدار معنی‌دار بودن آماره T^2 ، می‌توان رابطه (۱۱) را به صورت زیر خلاصه کرد:

$$A^2+B^2-(2r_{i,j}.AB)=q_1 \qquad (۱۴)$$

همانطور که قبلاً نیز در تشریح رابطه (۱۱) نیز بیان شد، عبارت اول رابطه فوق یعنی A^2 بیانگر سهم مشخصه کیفی iام در آماره T^2 ، عبارت دوم یعنی B^2 بیانگر سهم مشخصه کیفی jام و عبارت سوم ($2r_{i,j}AB$) بیانگر سهم ناشی از همبستگی بین دو مشخصه کیفی i و j در آماره T^2 است. عبارت $2r_{i,j}AB$ که در آن تأثیر هر دو مشخصه کیفی نمایان است را در نظر بگیرید. این عبارت شامل سه بخش است. بخش اول یعنی $2r_{i,j}$ ، ناشی از ضریب همبستگی بین مشخصه‌های i و j، بخش دوم یعنی A مربوط به انحراف مشخصه کیفی iام از مقدار میانگین و بخش سوم یعنی B مربوط به انحراف مشخصه کیفی jام می‌باشد. اگر حداقل ضریب همبستگی مورد نظر برای دو مشخصه کیفی را ρ در نظر بگیریم حداقل مقدار بخش اول عبارت (تأثیر ناشی از ضریب همبستگی) باید برابر 2ρ باشد تا بتوان تأثیر ضریب همبستگی دو مشخصه کیفی را معنی‌دار تلقی کرد. بنابراین با در نظر گرفتن مقدار 2ρ به عنوان یک معیار برای عبارت $2r_{i,j}AB$ و مقایسه مقادیر ρ و $r_{i,j}$ می‌توان در خصوص تأثیر کلی ناشی از همبستگی بین مشخصه‌ها در آماره T^2 به تحلیل پرداخت. از آنجا که مقدار $T_{i,j}^2$ به عنوان تأثیر همبستگی دو مشخصه در آماره T^2 ، بر حسب درصدی از آماره T^2 بیان شده است، بنابراین معیار آن را نیز می‌توان به صورت $\frac{2\rho}{q_1}\times 100$ تعریف کرد.

فرض کنید یک وضعیت خارج از کنترل ایجاد و مقدار T^2 مربوط به زوج i و j بزرگتر از q_1 باشد. از آنجا که مقدار $T_{i,j}^2$ یا به عبارت دیگر عبارت سوم رابطه (۱۴) می‌تواند مثبت یا منفی باشد، تحلیل نتایج نیز به دو حالت متفاوت خواهد بود. در حالت هایی که $T_{i,j}^2\geq 0$ است بدین معنی است که تأثیر متقابل دو مشخصه بر مقدار آماره T^2 برابر صفر یا مقداری مثبت بوده است. در این حالت اگر $T_{i,j}^2>q_2$ و $|r_{i,j}|>\rho$ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که ضریب همبستگی بین دو مشخصه کیفی معنی‌دار بوده و همچنین $|A.B|>1$ است. از اینرو می‌توان گفت هر دو مشخصه کیفی، تحت تأثیر همبستگی تغییر کرده‌اند و با مقایسه درصد هر مشخصه کیفی در آماره T^2 به طور مجزا می‌توان مشخصه اصلی منحرف‌شده را شناسایی کرد. در حالتی که $T_{i,j}^2>q_2$ و $|r_{i,j}|<\rho$ باشد، با توجه به اینکه ضریب همبستگی بین دو مشخصه کیفی، از مقدار حداقل (ρ) کوچکتر بوده و $|A.B|>1$ است، بنابراین هر یک از مشخصه‌های کیفی، بدون محسوس بودن همبستگی بین آنها، تغییر کرده‌اند. برای بررسی بزرگی یا کوچکی این تغییر در هر مشخصه به طور انفرادی، می‌توان به مقایسه مقادیر T_i^2 و T_j^2 پرداخت. در حالتی که $0\leq T_{i,j}^2\leq q_2$ باشد نتیجه می‌شود که $|A.B|<1$ است و بنابراین تنها یکی از مشخصه‌های کیفی بطور چشمگیری تغییر کرده و می‌توان آن را از مشاهده مقادیر T_i^2 و T_j^2 تعیین کرد.

در حالت‌هایی که $T_{i,j}^2<0$ باشد، بدین معنی است که تأثیر متقابل مشخصه‌های iام و j ام بر روی مقدار T^2، منفی بوده و باعث کاهش مقدار این آماره شده است. حداکثر مقدار کاهش ناشی از تأثیر متقابل مشخصه‌ها در آماره T^2 برابر ۵۰٪ مقدار T^2 خواهد بود؛ زیرا با یکسان در نظر گرفتن تأثیر دو مشخصه کیفی یعنی $T_i^2+T_j^2$ و تأثیر همبستگی بین آنها یعنی $T_{i,j}^2$ ، مقدار $T_{i,j}^2$ حداکثر می‌تواند به اندازه ۵۰٪ کل آماره باشد؛ زیرا در غیر اینصورت مقدار آماره T^2 منفی خواهد شد و این امری غیرممکن است. بنابراین در حالتی که $T_{i,j}^2<0$ باشد، حداکثر میزان کاهش در آماره T^2 برابر $(q_1/2)$ خواهد بود و مقدار معنی‌دار بودن برای این آماره برابر $q_1-(q_1/2)=(q_1/2)$ در نظر گرفته می‌شود. اما در حالتی که $-q_2\leq T_{i,j}^2<0$ باشد، چون سهم اندکی از آماره T^2 کاسته شده است؛ بنابراین مقدار معنی‌دار بودن برای T^2 را همان

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]

مقدار q_1 در نظر می‌گیریم. تحلیل حالت‌های مختلف ایجاد شده در وضعیتی که $T_{i,j}^2 > -q_2$ باشد نیز مشابه حالت قبل است.

۲-۵. مثال

برای درک بهتر روش جدید ارائه شده، مثالی که شامل پنج مشخصه کیفی همبسته است بررسی خواهد شد. فرض کنید فرآیندی شامل پنج مشخصه کیفی است که این مشخصه‌ها باید به طور همزمان کنترل شوند. برای این منظور هدف، استفاده از نمودار T^2 Hotelling بوده و در شناسایی مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده، در حالت‌های خارج از کنترل، از روش جدید پیشنهادی استفاده خواهد شد. برای رسم نمودار کنترل T^2 Hotelling ابتدا m=۲۵ نمونه n=۴تایی از فرآیند گرفته شده و مقادیر $\left(\underline{\underline{\bar{X}}}, \underline{\underline{S}}\right)$ تخمین زده شده‌اند.

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 13.48 & 0.12 & 10.06 & 9.51 & 4.77 \\ 0.12 & 9.54 & 5.40 & 2.29 & 7.67 \\ 10.06 & 5.40 & 19.62 & 8.06 & 1.77 \\ 9.51 & 2.29 & 8.06 & 14.13 & 5.57 \\ 4.77 & 7.67 & 1.77 & 5.57 & 17.52 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\bar{X}}} = \begin{bmatrix} 24.814 \\ 59.911 \\ 41.293 \\ 100.29 \\ 80.361 \end{bmatrix}$$

ماتریس همبستگی ($\underline{\underline{R}}$) نیز به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.011 & 0.618 & 0.689 & 0.31 \\ 0.011 & 1 & 0.395 & 0.197 & 0.593 \\ 0.618 & 0.395 & 1 & 0.484 & 0.096 \\ 0.689 & 0.197 & 0.484 & 1 & 0.354 \\ 0.31 & 0.593 & 0.096 & 0.354 & 1 \end{bmatrix}$$

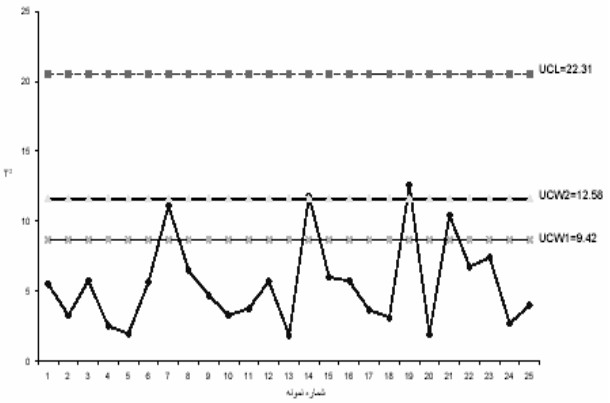
حدود کنترلی نمودار به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} = \frac{5(26)(3)}{100-25-5+1} F_{0.0027,5,71} = 22.31$$

$$UCW2 = \frac{5(26)(3)}{100-25-5+1} F_{0.055,5,71} = 12.58$$

$$UCW1 = \frac{5(26)(3)}{100-25-5+1} F_{0.143,5,71} = 9.416$$

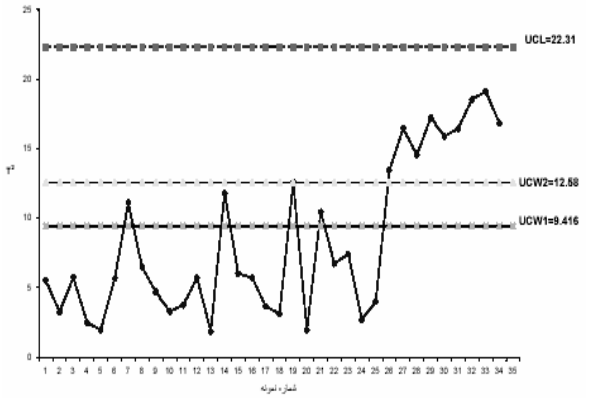
مقادیر T^2 برای ۲۵ نمونه تهیه شده محاسبه و برروی نمودار کنترل شکل۲ رسم شده‌اند.



شکل۲. نمودار کنترل برای داده‌های اولیه

نمودار شکل ۲ بیانگر یک وضعیت تحت کنترل است؛ بنابراین از این نمودار برای کنترل آتی فرآیند استفاده می‌شود.

با ایجاد تغییر کوچک (۰/۵σ+) در میانگین مشخصه‌های کیفی سوم و پنجم از نمونه ۲۶ام، نمودار کنترل شکل ۳ حاصل شده است:



شکل ۳. نمودار کنترل پس از تغییر در میانگین مشخصه‌های کیفی x_3 و x_5 به میزان ۰/۵σ+

از آنجا که دو نقطه متوالی بین حد هشدار UCW2 و UCL قرار گرفته‌اند، بنابراین یک وضعیت خارج از کنترل حادث شده و باید مورد تحلیل قرار گیرد.

همان‌طور که ادامه نقاط رسم شده بر روی نمودار نشان می‌دهد، به دلیل کوچک بودن میزان تغییرات، نمودار T^2 Hotelling بدون حدود هشدار، وضعیت خارج از کنترل را تا نمونه ۳۴ام نیز نشان نمی‌دهد. در تحلیل داده‌ها (جدول ۲)، مقدار ρ =۰/۴ به عنوان حداقل ضریب همبستگی قابل قبول در نظر گرفته شده است. همچنین با در نظر گرفتن مقادیر m=۲۵ و n=۴ می‌توان مقادیر q_1 و q_2 را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$q_1 = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} = \frac{2(26)(3)}{100-25-2+1} F_{0.143,2,74} \approx 4$$

$$q_2 = \frac{2\rho}{q_1} \times 100 = \frac{2(0.4)}{4} = 20\%$$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]

جدول ۲. جدول تحلیل داده‌ها

زوج i,j	T^2	T^2_i	T^2_j	$T^2_{i,j}$	$r_{i,j}$	مشخصه‌های عامل انحراف
1,2	1.20	10.75	88.59	0.66	0.011	---
1,3	4.40	4.75	72.32	22.92	0.62	3
1,4	2.18	11.27	54.57	34.16	0.689	---
1,5	3.13	4.57	83.32	12.11	0.31	---
2,3	2.24	25.53	47.11	-27.36	0.395	3
2,4	1.42	52.91	31.08	-16.01	0.20	---
2,5	2.38	20.09	44.45	-35.46	0.593	5
3,4	1.98	53.63	17.07	-29.29	0.48	---
3,5	3.95	41.52	49.79	-8.69	0.096	---
4,5	2.43	16.29	61.35	-22.36	0.35	5

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که مشخصه‌های کیفی سوم و پنجم تغییر کرده‌اند. همینطور با بررسی دقیق‌تر داده‌های این جدول مشخص می‌شود که تغییر این دو مشخصه کیفی، تأثیری بر روی سایر مشخصه‌ها نداشته است. نتایج نشان می‌دهد که تغییر این دو مشخصه کیفی در یک جهت بوده است.

۶. ارزیابی روش جدید با استفاده از داده های شبیه‌سازی

برای بررسی کارایی روش جدید کشف مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده و حدود هشدار تعریف شده برای نمودار HotellingT^2 در این مقاله، با استفاده از داده‌های اولیه مثال بخش ۲-۵ ، ۱۰۰۰ نمونه ۴تایی شبیه‌سازی شده است. در شبیه‌سازی داده‌ها فرض شده که مشخصه‌های X_2، X_4 و X_5 هر یک به میزان ۰/۵ انحراف معیار از مقدار میانگین در جهت مثبت منحرف شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که تنها ۱۹٪ از وضعیت‌های خارج از کنترل ایجاد شده، با استفاده از نمودار کنترل Hotelling T^2 بدون حدود هشدار، قابل کشف بوده است. در حالیکه با استفاده از نمودار کنترل T^2 با حدود هشدار، ۸۱٪ از وضعیت‌های خارج از کنترل را می‌توان با استفاده از حدود هشدار شناسایی کرد.

بنابراین حدود هشدار، کارایی نمودار Hotelling T^2 را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد. به علاوه از ۳۵۹ حالتی که علامت خارج از کنترل حادث شده است، در ۲۷۴ مورد با بکارگیری روش جدید کشف مشخصه‌های کیفی منحرف‌شده، دقیقاً مشخصه‌های X_2، X_4 و X_5 به عنوان مشخصه‌های منحرف‌شده شناسایی شده‌اند. البته این بدان معنی نیست که در بقیه حالت‌ها این مشخصه‌ها شناسایی نشده‌اند؛ بلکه در ۸۵ مورد بقیه، دقیقاً هر سه مشخصه کیفی X_2، X_4 و X_5 به عنوان مشخصه‌های منحرف‌شده شناخته نشده‌اند و تنها یک یا دو مورد از آنها شناسایی شده است. بنابراین نتایج نشان می‌دهد که در ۷۶٪ از حالت‌هایی که یک وضعیت خارج از کنترل اتفاق افتاده است، روش جدید ارائه شده در این مقاله دقیقاً همه مشخصه‌های اصلی منحرف‌شده را تشخیص و در بقیه حالت‌ها برخی از این مشخصه‌ها را شناسایی کرده است. این مقدار برای روش مشابه حداکثر برابر ۶۴٪ است.

۷. نتیجه‌گیری

روش جدید ارائه شده در این مقاله برای تعیین مشخصه‌های کیفی عامل انحراف در نمودار کنترل HotellingT^2 ، بسیاری از معایب روش‌های موجود در این زمینه را مرتفع کرده است. همچنین کاربرد آن در عمل بسیار آسان و مفید می‌باشد؛ زیرا برخلاف بسیاری از روش‌های موجود، تحلیل نتایج به سهولت امکان‌پذیر است. نادیده گرفتن همبستگی بین مشخصه‌های کیفی و انجام مراحل طولانی برای دستیابی به مشخصه‌های کیفی عامل انحراف که از عمده‌ترین معایب برخی روش‌های فعلی می‌باشند، در روش جدید مورد توجه قرار گرفته‌اند.

نتایج شبیه‌سازی در خصوص تعریف حدود هشدار برای نمودار Hotelling T^2 نشان می‌دهد که این حدود، منجر به ایجاد حساسیت کافی این نمودار در کشف تغییرات کوچک شده و ۸۱٪ از وضعیت‌های خارج از کنترل را به درستی شناسایی کرده است. همچنین نتایج شبیه‌سازی در مورد استفاده از روش جدید تعیین مشخصه‌های کیفی عامل انحراف، بیانگر مؤثر بودن این روش در ۷۶٪ از موارد بوده است. در حالی که در روش مشابه، حداکثر در ۶۴٪ از موارد مشخصه‌های عامل انحراف به خوبی شناسایی می‌شوند.

مراجع

[1] Lowry, C.A., Montgomery, D.C., *"A Review of Multivariate Control Charts"*, IIE Transactions, 27, 1995, pp. 800-810.

[2] Mason, R. L. Young J.C., *"Implementing Multivariate Statistical Process Control Using Hotelling's T^2 Statistic"*, Quality Progress, 34, 2001, pp. 71-73.

[3] Bersimis, S., Panaretos, J., Psarakis S., *"Multivariate Statistical Process Control Charts and the Problem of Interpretation: A Short Overview and Some Applications in Industry"*, 7th Hellenic European Conference on Computer Mathematics and its Applications, Athens Greece, 2005, pp. 1-6.

[4] Rehmert, I.J., *"A Performance Analysis of the Minimax Multivariate Quality Control Chart"*, Thesis, Virginia Tech, USA., 1997.

[5] Hayter, A.J., Tsui, K-L., *"Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems"*, Journal of Quality Technology, 26, 1994, pp. 197-208.

[6] Kourti, T., MacGregor, J.F., *"Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring"*, Journal of Quality Technology, 28, 1996, pp. 409-428.

[7] Mason, R.L., Tracy, N.D., Young, J.C., *"Decomposition of T^2 for Multivariate Control Chart Interpretation"*, Journal of Quality Technology, 27, 1995, pp. 99-108.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]

[8] Maravelakis, P., *"An Investigation of Some Characteristics of Univariate and Multivariate Control Charts"*, Dissertation, Virginia Tech, USA , 2003.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-07]