شمـــاره ۴، جلـــد ۲۱، زمستـــان ۱۳۸۹
نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنایـــع و مدیـــریت تولیـــد
نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران
ISSN: 2008-4870
http://IJIEPM.iust.ac.ir/

قیمت‌گذاری و کنترل موجودی به صورت توام برای کالاهای فاسدشدنی با در نظر گرفتن هزینه کمبود به صورت پس‌افت پاره‌ای

عیسی نخعی* و رضا میهمی

کلمات کلیدی

قیمت‌گذاری،
کنترل موجودی،
کالای فاسدشدنی،
پس‌افت پاره‌ای،
مقدار اقتصادی سفارش

چکیده:

تعیین سیاست کنترل موجودی مناسب و قیمت فروش بهینه برای کالاهای مختلف همواره یکی از موضوعات اصلی تحقیقات علمی و صنعتی به‌شمار آمده است. به علاوه زمانی که کالای مورد نظر فاسدشدنی باشد، به دلیل خصوصیات ویژه‌ای که این کالاها دارند، تعیین این موارد از اهمیت بالاتری برخوردار است. در این مقاله یک مدل موجودی همراه با قیمت‌گذاری برای کالاهای فاسدشدنی به صورت توام در نظر گرفته می‌شود. نرخ تقاضا قطعی، پیوسته و به صورت تابعی از زمان و قیمت فرض شده است. کمبود در سیستم وجود دارد و به صورت پس افت پاره‌ای فرض شده است. هدف تعیین مقادیر بهینه قیمت، زمان بهینه بازپرسازی و اندازه سفارش است، تا بدین وسیله سود حداکثر شود. بنابراین بعد از ارائه مدل نشان داده می‌شود که در هر قیمتی، زمان بازپرسازی موجود، منحصربه فرد و بهینه است. سپس ثابت می‌شود که با در دسترس بودن زمان بهینه بازپرسازی، تابع هدف، تابعی مقعر از قیمت است و بنابراین مقدار بهینه آن موجود است. در ادامه الگوریتمی ساده برای به دست آوردن متغیرهای مدل بیان می‌شود و در انتها مثال عددی برای تشریح مدل و الگوریتم ارائه می‌گردد.

۱. مقدمه

در حالت کلی کالای فاسدشدنی به کالایی گفته می‌شود که با گذشت زمان ارزش خود را از دست می‌دهند. کالاهایی مانند داروها، میوه و سبزیجات، کالاهای فصلی و مد، وسایل الکترونیکی و غیره در راستای کالاهای فاسدشدنی قرار می‌گیرند. در سال‌های اخیر به دلیل پیشرفت در فناوری، بازارهای رقابتی شدید و مشتریان سخت‌گیر تعداد کالاهای فاسدشدنی بسیار بیشتراز قبل شده است. با وجود چنین بازارهایی یک امر حیاتی برای بنگاه‌های مختلف تعیین سیاست مناسب موجودی و قیمت کالاهای مورد نظر است. در گذشته سیاست موجودی و قیمت‌گذاری کالا دو بخش کاملا جدا از هم بودند که به ترتیب توسط بخش‌های عملیاتی و بازاریابی در بنگاه‌ها تعیین می‌شد. اما امروزه دیگر نمی‌توان به مدل‌های سنتی و قدیمی اکتفا کرد و باید از مدل‌های ترکیبی برای رسیدن به حداکثر سود استفاده کرد.

کسب‌وکارهای مختلف به این نکته پی برده‌اند که برای آنکه سود خود را حداکثر کنند باید، رضایت مشتریان در اولویت قرار بگیرد. اندازه درست سطح موجودی در یک سیستم باید بر اساس ارتباط بین سرمایه‌گذاری در موجودی و سطح سرویس‌دهی باشد. با در نظر گرفتن فروش از دست رفته تقاضای مشتری برای کالای مورد نظر هدر می‌رود و بوسیله سایر رقبا این تقاضا برآورده می‌گردد. این پدیده باعث کاهش در سود بنگاه می‌شود و علاوه براین باعث کاهش در تعداد مشتریان و خسارت به سابقه بنگاه در نگاه مشتریان

تاریخ وصول: ۸۸/۱۲/۲۳
تاریخ تصویب: ۸۹/۵/۱۸

*نویسنده مسئول مقاله: دکتر عیسی نخعی دانشیار دانشکده فنی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران. Nakhai.Isa@gmail.com
رضا میهمی ، کارشناس ارشد دانشکده فنی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران. maihami_reza@yahoo.com

می‌شود. بنابراین در صورتی که این مورد در مدل کنترل موجودی همراه با قیمت در نظر گرفته نشود، سود بنگاه به صورت نادرستی بالا می‌رود[۱]. در مدل کلاسیک EOQ معمولا فرض می‌شود که کمبود به صورت کامل یا پس افت است و یا به صورت فروش از دست رفته. برای اینکه این پدیده در مدل نشان داده شود در این مقاله کمبود به صورت پس‌افت پاره‌ای در نظر گرفته شده است. به عبارت ساده بخشی از کمبود پس افت می‌شود و بقیه کمبود به عنوان فروش از دست رفته تلقی می‌شود. نرخ کمبود پس‌افت وابسته به زمان انتظار برای بازپرسازی مجدد است یعنی زمانی که طول می‌کشد که کالا وارد سیستم شود. این پدیده اولین بار بوسیله آباد در سال ۱۹۹۶ بیان شد[۱]. در این مقاله تقاضای وابسته به قیمت و زمان در نظر گرفته شده است. در مدل کمبود مجاز و به صورت پس‌افت پاره‌ای در نظر گرفته شده است. در حالیکه نرخ پس‌افت متغیر و وابسته به زمان انتظار است. بخشی از کمبود که پس افت نباشد به صورت فروش از دست رفته می‌شود که دارای هزینه جداگانه‌ای است. هدف دراین مقاله تعیین همزمان قیمت بهینه فروش، طول بازه زمانی که در آن کمبود وجود ندارد، تعیین طول دوره یا زمان بازپرسازی و اندازه سفارش به صورتی است که سود بنگاه حداکثر شود. برای رسیدن به این هدف، سیاست موجودی و قیمت بهینه فروش از طریق اثبات‌های تحلیلی به دست می‌آید و اثبات می‌شود که به ازای هر قیمت فروش طول دوره و همچنین طول زمانی که کمبود وجود ندارد نه تنها وجود دارد بلکه منحصر به فرد است. سپس اثبات می‌شود که به ازای مقادیر بهینه طول دوره و طول دوره‌ای که کمبود وجود ندارد، مقدار بهینه و منحصر به فردی برای قیمت وجود دارد که به ازای آن سود بنگاه حداکثر می‌شود. الگوریتمی ساده برای کسب مقادیر بهینه ارائه می‌شود و در انتها مثالی عددی برای اثبات کارایی مدل و همچنین الگوریتم ارائه شده بیان می‌شود. برای انجام محاسبات از نرم‌افزار Mathematica6.1 استفاده شده است.

۲. مرور ادبیات

سیاست موجودی مقدار اقتصادی سفارش که در ابتدا توسط هریس [۲] ارائه شد هنوز هم کارایی خود را از دست نداده است و به ویژه در بحث‌های آکادمیک بخش‌های مختلف آن مورد توجه قرار می‌گیرد. قاره و اسکرادر[۳] اولین کسانی بودند که فاسدشدن را در مدل خود در نظر گرفتند. آنها یک مدل EOQ را برای کالای فاسدشدنی که دارای نرخ فاسدشدن ثابت بود ارائه کردند. بعد از ایشان کارهای فراوانی پیرامون ارائه مدل‌های موجودی برای کالاهای فاسدشدنی ارائه شد. آباد [۴و۵] مدل موجودی EOQ خود را با در نظر گرفتن کمبود به صورت پاره‌ای در نظر گرفت. ایشان فرض کرد که کمبود به صورت پاره‌ای و تابعی از زمان انتظار[1] برای رسیدن کالا جهت بازپرسازی است. دو تابعی که ایشان معرفی کردند به صورت $\beta(x)=k_0/(1+\delta x)$ و $\beta(x)=k_0e^{-\delta x}$ بود که در آن x طول زمان انتظار برای بازپرسازی مجدد می‌باشد و $0<k_0\le 1,\delta>0$. دای [۶] مدل آباد را با در نظر گرفتن کمبود به صورت پس‌افت و فروش از دست رفته در نظر گرفت. ایشان فرض کرد بخشی از کمبود به صورت فروش از دست رفته می‌شود و بنابراین دارای هزینه جداگانه‌ای برای بنگاه خواهد بود که باید در مدل لحاظ شود. در این مقاله هم تقاضای کمبود هم به صورت پس‌افت پاره‌ای و هم به صورت فروش از دست رفته در نظر گرفته شده است. به دلیل اهمیت بالایی که قیمت در حداکثرسازی سود بنگاه دارد بخش زیادی از ادبیات به تعیین همزمان قیمت با تعیین سیاست بهینه موجودی اختصاص یافته است. الیون و مالایا [۷] اولین کسانی بودند که مدل موجودی را با در نظر گرفتن تقاضای وابسته به قیمت در نظر گرفتند. کوهن [۸] مدل قیمت‌گذاری و موجودی را در حالتی در نظر گرفت که نرخ فاسدشدن در طول زمان پیوسته بود. وی [۹] سیاست بازپرسازی و قیمت‌گذاری را با در نظر رفتن تقاضای وابسته به قیمت در نظر گرفتند که این قیمت در طول زمان کاهش پیدا می‌کرد. وی[۱۱و۱۰] مدل کوهن را گسترش داد و ایشان علاوه بر در نظر گرفتن تقاضای وابسته به قیمت، فاسدشدن را به صورت تابع وایبل در نظر گرفت و مدل در حالتی که تخفیف قیمتی وجود دارد و همچنین بدون تخفیف در نظر گرفت. موخوپادهیای و همکاران[۱۲] مدل کوهن را با در نظر گرفتن فاسدشدن وابسته به زمان بهبود دادند. چنگ و همکاران[۱۳] مدل موجودی و قیمت‌گذاری را با تقاضای وابسته به قیمت و تقاضای کمبود به صورت پس‌افت پاره‌ای در نظر گرفتند. وی و لاو[۱۴] مساله را در حالتی در نظر گرفتند که علاوه بر وابسته بودن تقاضا به قیمت، ارزش زمانی پول هم در محاسبات وارد شده بود.

یانگ و همکاران[۱۵] مدل موجودی و قیمت‌گذاری را برای کالاهای فاسدشدنی غیرآنی[2] (منظور از آنی این است که به محض اینکه کالا وارد سیستم می‌شود فاسدشدن آن آغاز می‌گردد. تعدادی از کالاهای فاسدشدنی هستند که دوره فاسدشدن آنها بعد از گذشت زمان مشخصی آغاز می‌گردد که به آنها کالاهای فاسدشدنی غیرآنی می‌گویند.) در نظر گرفتند. تقاضا به صورت تابعی خطی وابسته به قیمت و کمبود به صورت پاره‌ای پس‌افت فرض شده بود. تساو و شین[۱۶] مساله قیمت‌گذاری و کنترل موجودی را در حالتی در نظر گرفتند که کمبود در سیستم موجود نباشد اما ایشان مساله تاخیر در پرداخت ها برای خریدار و همچنین مساله ترفیعات[3] در سیستم را در نظر گرفتند و سیاست موجودی و قیمت را با توجه به این موارد بهینه کردند. تنگ و همکاران[۱۷] مقایسه‌ای بین دو

[1] *Waiting time*

[2] *Non-instantaneous items*
[3] *promotion*

مقاله آباد(۲۰۰۳) و گویال وگیری(۲۰۰۳) انجام داد. در هر دوی این مطالعات مدل موجودی همراه با قیمت‌گذاری ارائه شده بود و کمبود در هر دو نیز به صورت پاره‌ای پس‌افت در نظر گرفته شده بود.

نتیجه این مقاله نشان داد که دو مدل برتری خاصی بر همدیگر ندارند و با توجه به شرایط می‌توان از هر دو استفاده کرد. میشرا و میشرا[۱۸] مساله تعیین قیمت در مدل EOQ برای کالاهای فاسدشدنی در حالتی در نظر گرفتند که بنگاه در رقابت کامل باشد. آباد[۱۹] در چندمین مقاله خود بار دیگر مساله تعیین موجودی و قیمت را در نظر گرفت و در این مقاله مدلی جامع برای کالاهای فاسدشدنی و غیرفاسدشدنی ارائه کرد. مو و همکاران [۲۰] مدل تعیین موجودی و قیمت را در حالتی در نظرگرفتند که تقاضا وابسته به قیمت وسطح موجودی بود. هی و همکاران[۲۱] مساله را در حالتی در نظر گرفتند که بازارهای مختلفی برای فروش کالای فاسدشدنی وجود داشت. سی و همکاران [۲۲] مساله‌ای مشابه با کار مو و همکاران[۲۰] را در نظر گرفتند در حالیکه تابع تقاضا وابسته به سطح موجودی در دسترس باشد و به تدریج کاهش پیدا کند تا به صفر برسد.

کارهای زیادی در رابطه به تعیین قیمت وسیاست موجودی برای کالاهای فاسدشدنی در سطح جهان انجام گرفته است که در بالا به تعدادی از آنها اشاره شد. اما، تنها در تعداد معدودی از کارهای انجام گرفته کمبود به صورت پاره‌ای پس‌افت در نظر گرفته شده است. در کارهایی هم که کمبود به صورت پس‌افت پاره‌ای در نظر گرفته شده است، تابع تقاضا فقط یا به صورت خطی و یا فقط به صورت نمایی وابسته به قیمت در نظر گرفته شده است و حالتهایی که تقاضا وابسته به زمان و قیمت به صورت همزمان باشد بسیار کم است. در این مقاله، هم تقاضا به صورت قطعی و وابسته به قیمت و زمان به صورت همزمان در نظر گرفته شده است وهم کمبود به صورت پس‌افت پاره‌ای فرض شده است. نزدیکترین مطالعه به این مقاله کار چانگ و همکاران[۱۳] است. اما در مقاله حاضر دوره زمانی از زمانی آغاز می‌شود که موجودی در حداکثر خود است و سپس بر اثر تقاضا و فاسدشدن به صفر می‌رسد و سپس کمبود رخ می‌دهد. نقطه پایان دوره جایی است که کمبود به حداکثر خود می‌رسد و در این نقطه زمانی است که بازپرسازی انجام می‌گیرد. در حالیکه در کار چانگ و همکاران[۱۳] دوره زمانی از زمانی که موجودی به صفر رسیده است آغاز می‌شود سپس کمبود رخ می‌دهد و در حداکثر کمبود بازپرسازی انجام می‌گیرد و نقطه پایان دوره مجددا زمانی است که موجودی به صفر می‌رسد.

این تفاوت باعث شده است که شکل معادلات در دو مقاله متفاوت باشد. ضمن اینکه محاسبات در کار چانگ و همکاران[۱۳] برای n دوره انجام گرفته است در حالیکه در این مقاله یک دوره فرض شده است و همچنین تابع کمبود در چانگ و همکاران[۱۳] به صورت $\beta(x)=\frac{k_0}{1+\delta x}$ است، در حالیکه در این مقاله $\beta(x)=k_0e^{-\delta x}$ است. دیگر مطالعه‌ای که به این کار شباهت فراوانی دارد مقاله یانگ و همکاران[۱۵] است. در کار یانگ و همکاران[۱۵] تقاضا به صورت تابعی خطی از قیمت فرض شده است ضمن اینکه محاسبات برای کالاهای فاسدشدنی غیرآنی انجام گرفته است در حالیکه در این مقاله تقاضا هم تابع خطی از قیمت است و هم تابع نمایی از زمان و کالاهای فاسدشدنی آنی در نظر گرفته شده است.

۳. نمادگذاری و مفروضات

جهت ارائه مدل فرضیات و نمادهای زیر در مقاله در نظر گرفته می‌شوند:

۳-۱. نمادها

A: هزینه سفارشدهی برای هر دوره.

p^* : قیمت فروش بهینه هر واحد کالا

c: هزینه خرید هر واحد کالا

t_1^* : طول بهینه زمانی که در آن کمبود رخ نمی‌دهد.

a,b: پارامترهای ثابت

h: هزینه نگهداری هر واحد کالا در هر دوره

T^*: طول بهینه دوره بازپرسازی

s: هزینه هر واحد کمبود پس‌افت

Q^*: مقدار بهینه سفارش

o: هزینه هر واحد فروش از دست رفته.

$I_1(t)$: سطح موجودی در بازه t که در آن $t\in(0,t_1)$

p: قیمت فروش هر واحد کالا(p>c)

$I_2(t)$: سطح موجودی در بازه t که در آن $t\in(t_1,T)$

θ: پارامتر تابع نرخ فاسدشدن

I_0: حداکثر سطح موجودی

t_1: طول زمانی که در آن کمبود رخ نمی‌دهد.

S: حداکثر مقدار کمبود پس‌افت

T: طول دوره بازپرسازی

$TP(p,t_1,T)$: مجموع سود بنگاه به ازای هر واحد زمانی

Q: مقدار سفارش در هر دوره

TP^*: مقدار بهینه سود به ازای هر واحد زمانی $(TP^*=TP(p^*,t_1^*,T^*))$

۳-۲. مفروضات

تقریبا در تمامی مدل‌هایی که در زمینه کنترل موجودی وجود دارد فرض‌هایی در نظرگرفته می‌شوند. بخشی از این فرض‌ها واقعی هستند و بخشی دیگر جنبه تئوری دارند که بیشتر برای انجام

محاسبات و جلوگیری از پیچیدگی بالای مدل‌ها ارائه می‌گردد. در این مقاله فرض‌های زیر در نظر گرفته شده است:

۱. مدل برای یک کالای فاسدشدنی آنی ارائه می‌گردد.

۲. زمان تدارک[1] صفر و نرخ بازپرسازی نامحدود فرض می‌شود.

۳. تابع تقاضا به صورت $D(p,t)=(a-bp)e^{\lambda t}$ در نظر گرفته شده است. این تابع پیوسته، خطی صعودی نسبت به قیمت و صعودی و یا نزولی نسبت به زمان است با توجه به $\lambda > 0$ و یا $\lambda < 0$. (نرخ تقاضا به صورت تابعی از قیمت و زمان در نظر گرفته می‌شود. این تابع تقاضا شرایط واقعی را بهتر نمایان می‌کند. به عبارت دیگر زمانی که قیمت کاهش پیدا می‌کند تقاضا افزایش می‌یابد. در این مقاله شکلی از تابع تقاضا در نظر گرفته شده است که به صورت ضرب یک تابع نمایی بر حسب زمان در تابع خطی قیمت است. این شکل تابع برای تقاضای متغیر در طول زمان و همچنین وابسته به قیمت مناسب است. با توجه به مقدار λ که می‌تواند مثبت یا منفی باشد، مقدار تقاضا در طول زمان می‌تواند متغیر باشد. این شکل تابع تقاضا برای نشان دادن خصوصیات کالاهای فاسدشدنی بسیار مناسب است[۳].

۴. کالایی که در طول دوره فاسد می‌شوند تعویض و یا تعمیر نمی‌شوند.

۵. کمبود در سیستم رخ می دهد اما تنها بخشی از تقاضایی که با کمبود مواجه شده است به صورت تقاضای پس افت در نظر گرفته می‌شود. نرخ پس افت بر اساس کار آباد[۴] به صورت $\beta(x)=k_0e^{-\delta x}$ $(0<k_0\le 1,\delta>0)$ نشان داده شده است که در آن x زمان انتظار[2] است یعنی زمانی که پرسازی مجدد انجام می‌گیرد و δ پارامتر مثبت پس افت است. $0\le \beta(x)\le 1,\beta(0)=1$ برای تضمین وجود جواب بهینه فرض می‌شود $\beta(x)+H(\beta'(x))>0$ که در آن $\beta'(x)$ مشتق اول $\beta(x)$ است. توجه شود که اگر ۱ یا $\beta(x)=0$ آنگاه همه کمبود پس افت (فروش از دست رفته) می‌شود.

۶. بخش دیگرکمبود به صورت فروش از دست رفته در نظر گرفته می‌شود که به صورت تابع $1-\beta(x)$ نشان داده می‌شود.

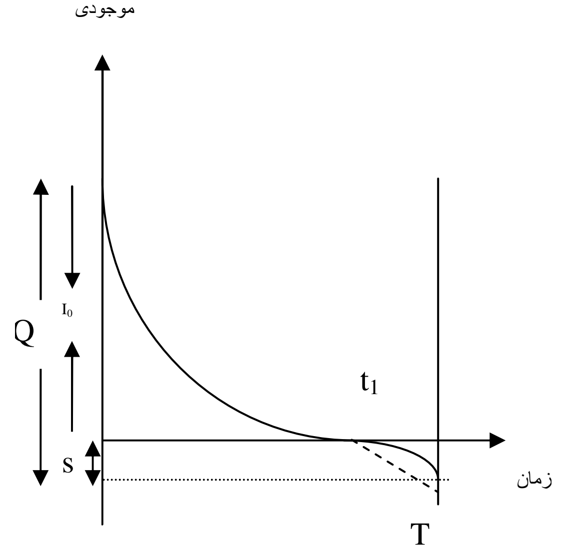
۷. افق زمانی در سیستم به صورت نامحدود فرض می‌شود.

۴. فرمول سازی مدل

برای آنکه بتوان مقدار بهینه سفارش و قیمت را تعیین نمود، در مرحله اول باید مدل بر اساس فرمول‌های ریاضی بیان شود. همچنین مدل‌سازی بر اساس فرمول‌های ریاضی نیازمند این موضوع است که عملکرد سیستم تشریح شود. در ادامه چگونگی عملکرد سیستم بیان می‌شود تا مدل‌سازی بر اساس آن انجام گیرد. در ابتدای هر دوره حداکثر موجودی به اندازه I_0 وجود دارد و یا در صورت عدم موجود بودن تا این اندازه سفارش داده شده است. این میزان موجودی در طول دوره به دو دلیل، برآورده کردن تقاضا و فاسدشدن به صفر می‌رسد. بعد از رسیدن موجودی به صفر کمبود در سیستم رخ می‌دهد که در این مقاله این کمبود به صورت پاره‌ای پس‌افت در نظر گرفته شده است. یعنی بخشی از آن پس‌افت می‌شود (به عبارت دیگر این بخش از کمبود در ابتدای دوره آینده جبران برآورده می‌شود) و بخش دیگر فروش از دست رفته است (به عبارت دیگر مشتری از دست می‌رود و نیاز خود را از جایی دیگر تامین می‌کند). نمودار۱ این فرایند را نشان می‌دهد. بر اساس نمودار نشان داده شده طول یک دوره به دو بازه زمانی تقسیم می‌شود:

الف) بازه زمانی $(0,t_1)$: در این بازه سطح موجودی به دلیل برآورده کردن تقاضا و فاسدشدن تا صفر پایین می‌آید اما کمبودی رخ نمی‌دهد. در این بازه موجودی با $I_1(t)$ نشان داده می‌شود.

ب) بازه زمانی (t_1,T): در این بازه کمبود وجود دارد. S حداکثر میزان سطح کمبود به صورت پس‌افت است. در این بازه موجودی با $I_2(t)$ نشان داده می‌شود.



نمودار۱. نمایش گرافیکی سیستم موجودی

معادله دیفرانسیل زیر وضعیت موجودی در سیستم را در بازه اول نشان می‌دهد: [۱۵]

$$\frac{dI_1(t)}{dt}+\theta dI_1(t)=-D(p,t) \qquad 0\le t\le t_1 \qquad (۱)$$

$$I_1(t)=\frac{(a-bp)e^{-\theta t}}{\lambda+\theta}\left[e^{(\lambda+\theta)t_1}-e^{(\lambda+\theta)t}\right] , \quad 0\le t\le t_1 \qquad (۲)$$

از روی نمودار ۱ کاملا واضح است که $I_1(t_1)=0$ بنابراین:

[1] lead time
[2] Waiting time

همچنین در این بازه با توجه به اینکه $I_1(0)=I_0$ مقدار حداکثر موجودی (I_0) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$I_0=\frac{(a-bp)}{\lambda+\theta}\left[e^{(\lambda+\theta)t_1}-1\right] \tag{۳}$$

در بازه دوم (t_1,T) که کمبود رخ می‌دهد بخشی از تقاضای کمبود در زمان t بر اساس کسر $\beta(T-t)$ پس افت می‌شود. بنابراین سطح موجودی در زمان t بوسیله معادله زیر نشان داده می‌شود.

$$\frac{dI_2(t)}{dt}=-D(p,t)\beta(T-t)=\frac{-D(p,t)}{e^{\delta(T-t)}}\quad , \; t_1\le t\le T \tag{۴}$$

با توجه به اینکه $I_2(t_1)=0$ ، مقدار موجودی در بازه (t_1,T) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_2(t)=\frac{(a-bp)e^{-\delta T}\left(e^{(\delta+\lambda)t_1}-e^{(\lambda+\delta)t}\right)}{\lambda+\delta}\quad t_1\le t\le T \tag{۵}$$

با قرار دادن $t=T$ در $I_2(t)$، حداکثر مقدار تقاضای پس افت (S) به دست می‌آید:

$$S=-I_2(T)=-\frac{(a-bp)e^{-\delta T}\left(e^{(\delta+\lambda)t_1}-e^{(\lambda+\delta)T}\right)}{\lambda+\delta} \tag{۶}$$

همانطور که از شکل هم مشخص است، مقدار سفارش در هر دوره (Q) از جمع کردن مقادیر S و I_0 محاسبه می‌شود بنابراین:

$$Q=S+I_0=-\frac{(a-bp)e^{-\delta T}\left(e^{(\delta+\lambda)t_1}-e^{(\lambda+\delta)T}\right)}{\lambda+\delta}+\frac{(a-bp)}{\lambda+\theta}\left[e^{(\lambda+\theta)t_1}-1\right] \tag{۷}$$

با توجه به اینکه وضعیت موجودی در دو بازه در هر دوره محاسبه شد اینک، هزینه‌های موجود در سیستم بر اساس موجودی‌های به دست آمده، محاسبه می‌شود.

الف) هزینه سفارشدهی: برابر با مقدار ثابت A در هر دوره فرض شده است.

ب) هزینه نگهداری موجودی(HC): با توجه به اینکه موجودی فقط در بازه اول وجود دارد بنابراین فقط در این بازه هزینه نگهداری تعریف می‌شود که مقدار آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}HC&=h\int_0^{t_1}I_1(t)dt=h\left[\int_0^{t_1}\frac{(a-bp)e^{-\theta t}}{\lambda+\theta}\left[e^{(\lambda+\theta)t_1}-e^{(\lambda+\theta)t}\right]dt\right]\\&=\frac{h\left(\theta-e^{\lambda t_1}(\theta+\lambda-e^{\theta t_1})\right)(a-bp)}{\theta\lambda(\theta+\lambda)}\end{aligned} \tag{۸}$$

ج) هزینه کمبود پس افت(SC): هزینه کمبود پس افت فقط در بازه دوم رخ می‌دهد که مقدار آن برابر است با:

$$\begin{aligned}SC&=s\int_{t_1}^{T}\left[-I_2(t)\right]dt\\&=\frac{e^{-\delta T}(a-bp)s\left(e^{(\delta+\lambda)T}+e^{(\delta+\lambda)t_1}(-1-(\delta+\lambda)(T-t_1))\right)}{(\delta+\lambda)^2}\end{aligned} \tag{۹}$$

د) هزینه فروش از دست رفته (OC): بخشی از کمبود که به صورت فروش از دست رفته می‌شود دارای هزینه زیر است:

$$\begin{aligned}OC&=o\int_{t_1}^{T}D(p,t)(1-\beta(T-t))dt\\&=\frac{(\delta(e^{\lambda T}-e^{\lambda t_1})+e^{\lambda t_1}(-1+e^{\delta(-T+t_1)})\lambda)o(a-bp)}{\lambda(\delta+\lambda)}\end{aligned} \tag{۱۰}$$

ذ) هزینه خرید (PC): با توجه به مقدار به دست آمده برای Q، هزینه خرید با ضرب کردن این مقدار در قیمت خرید هر واحد کالا مطابق معادله زیر به دست می‌آید:

$$PC=cQ=c\left(\frac{e^{\lambda T}-e^{-\delta T+\delta t_1+\lambda t_1}}{\delta+\lambda}+\frac{-1+e^{(\theta+\lambda)t_1}}{\theta+\lambda}\right)(a-bp) \tag{۱۱}$$

با توجه به اینکه در این مقاله قیمت به عنوان یک متغیر در نظر گرفته شده است، بنابراین باید تابع هدف حداکثر سازی سود باشد نه حداقل سازی هزینه. (در بسیاری از مدل‌های موجودی که قیمت یک پارامتر ثابت است تابع هدف حداقل کردن هزینه در نظر گرفته می‌شود. در این مدل‌ها معمولا درآمد در نظر گرفته نمی‌شود و همه توابع فقط هزینه‌ای هستند و در نتیجه تابع هدف نیز حداقل سازی مجموع هزینه‌ها می‌شود. در حالیکه در این مقاله درآمد وجود دارد و و در نتیجه سود (درآمد- هزینه) باید حداکثر سازی شود.) جهت محاسبه تابع سود باید درآمد سیستم نیز محاسبه شود.

ر) درآمد فروش(SR): باید توجه کرد که درآمد فروش به دو قسمت تقسیم می‌شود: بخش اول که در بازه اول (بدون کمبود) به دست می‌آید و بخش دوم که جبران تقاضای پس‌افت هست که با ورود کالا جبران می‌شود بنابراین:

$$\begin{aligned}SR&=p\left[\int_0^{t_1}D(p,t)dt+S\right]\\&=p\left(\frac{\left(-1+e^{\lambda t_1}\right)(a-bp)}{\lambda}-\frac{e^{-\delta T}\left(-e^{(\delta+\lambda)T}+e^{(\delta+\lambda)t_1}\right)(a-bp)}{\delta+\lambda}\right)\end{aligned} \tag{۱۲}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده اینک می‌توان مجموع سود به ازای هر واحد زمانی را مشخص کرد. بنابراین:

$$
\begin{aligned}
TP_{(p,t_1,T)} &= \frac{SR-A-HC-SC-OC-PC}{T}\\
&= -\frac{1}{T}\Big(A + c\Big(\frac{e^{\lambda T}-e^{-\delta T+\delta t_1+\lambda t_1}}{\delta+\lambda}+\frac{-1+e^{(\theta+\lambda)t_1}}{\theta+\lambda}\Big)(a-bp)\\
&+\frac{h(\theta-e^{\lambda t_1}(\theta+\lambda-e^{\theta t_1}))(a-bp)}{\theta\lambda(\theta+\lambda)}\\
&+\frac{(\delta(e^{\lambda T}-e^{\lambda t_1})+e^{\lambda t_1}(-1+e^{\delta(-T+t_1)})\lambda)o(a-bp)}{\lambda(\delta+\lambda)}\\
&-\Big(\frac{-1+e^{\lambda T}-e^{-\delta T+\delta t_1+\lambda t_1}}{\delta+\lambda}\Big)p(a-bp)\\
&+\frac{e^{-\delta T}(a-bp)s(e^{(\delta+\lambda)T}+e^{(\delta+\lambda)t_1}(-1-(\delta+\lambda)(T-t_1)))}{(\delta+\lambda)^2}\Big)
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

۵. نتایج و جواب‌های بهینه

هدف اصلی در این مقاله محاسبه مقادیر $Q,p\ ,t_1,T$ ، به طریقی است که سود حداکثر شود. با توجه به روابط به دست آمده ابتدا باید مقادیر بهینه t_1,T محاسبه شود. باید ثابت شود که به ازای هر مقدار p این دو مقدار نه تنها بهینه هستند بلکه منحصر به فرد هم هستند. سپس با وجود مقادیر بهینه مربوط به این دو مقدار، مقدار قیمت و اندازه سفارش بهینه هم تعیین می‌شود. در مورد قیمت به دست آمده باید ثابت شود که جواب به دست آمده بهینه و منحصر به فرد است. برای رسیدن به اهداف بالا از رویکرد زیر استفاده می‌شود.

تابع هدف سود تابعی از دو متغیر اصلی T و t_1 است، بنابراین شرط لازم برای حداکثر شدن تابع هدف این است که مقدار مشتق اول تابع هدف نسبت به این دو متغیر به ازای هر مقدار p به صورت همزمان برابر با صفر باشد بنابراین:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial TP_{(p,t_1,T)}}{\partial t_1} &= \frac{e^{-\delta T+\lambda t_1}(a-bp)}{\theta T}(c(e^{\delta t_1}-e^{\delta T+\theta t_1})\theta-\\
&e^{\delta T+\delta t_1}h+e^{\delta T}(h+\theta(o+p))-e^{\delta t_1}\theta(o+p-Ts+st_1))=0
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial TP_{(p,t_1,T)}}{\partial T} &= \frac{1}{T^2}\Big(A+c\Big(\frac{e^{\lambda T}-e^{-\delta T+\delta t_1+\lambda t_1}}{\delta+\lambda}+\frac{-1+e^{(\theta+\lambda)t_1}}{\theta+\lambda}\Big)(a\\
&-bp)+\frac{h(\theta-e^{\lambda t_1}(\theta+\lambda-e^{\theta t_1}))(a-bp)}{\theta\lambda(\theta+\lambda)}+\\
&\frac{(\delta(e^{\lambda T}-e^{\lambda t_1})+e^{\lambda t_1}(-1+e^{\delta(-T+t_1)})\lambda)o(a-bp)}{\lambda(\delta+\lambda)}-\\
&\Big(\frac{-1+e^{\lambda t_1}}{\lambda}+\frac{e^{\lambda T}-e^{-\delta T+\delta t_1+\lambda t_1}}{\delta+\lambda}\Big)p(a-bp)\\
&+\frac{e^{-\delta T}(a-bp)s(e^{(\delta+\lambda)T}+e^{(\delta+\lambda)t_1}(-1-(\delta+\lambda)(T-t_1)))}{(\delta+\lambda)^2}+\\
&\frac{1}{(\delta+\lambda)^2}e^{-\delta T}T(a-bp)(-c(\delta\\
&+\lambda)(\delta e^{(\delta+\lambda)t_1}+e^{(\delta+\lambda)T}\lambda)+\lambda(e^{(\delta+\lambda)T}(\lambda p-s)+\\
&e^{(\delta+\lambda)t_1}s)+\delta^2(-e^{(\delta+\lambda)T}o+e^{(\delta+\lambda)t_1}(o+p-Ts\\
&+st_1))+\delta\lambda(e^{(\delta+\lambda)T}(-o+p)+e^{(\delta+\lambda)t_1}(o+p-Ts+st_1))))=0
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

حال باید ثابت شود که مقادیری که از دستگاه معادلات همزمان بالا به دست می‌آید، دارای مقدار یگانه و بهینه‌ای است. قضیه زیر در این مورد برقرار است.

قضیه ۱: به ازای هر مقدار p:

۱-۱- معادلات همزمان ۱۴ و ۱۵ دارای جواب یگانه[1] هستند.

۱-۲- جواب یگانه‌ای که از ۱-۱ حاصل می‌شود، دارای شرایط درجه دوم برای حداکثر شدن تابع هدف به صورت مطلق هستند. به عبارت دیگر تابع هدفی که به ازای مقادیر بهینه به دست می‌آید حداکثر مطلق است نه حداکثر نسبی.

اثبات: اثبات ۱-۱ در مقالات مختلف آورده شده است. خواننده می‌تواند مراجع [۱۳] و [۱۵] را مطالعه نماید. برای اثبات ۱-۲ پیوست الف مشاهده شود.

با حل دستگاه معادلات همزمان معرفی‌شده مقادیر بهینه T^*,t_1^* محاسبه می‌شود. از طرف دیگر بر اساس قضیه ۱ اثبات شد که این مقادیر نه تنها بهینه هستند بلکه منحصر به فرد هم هستند. اکنون باید مقدار بهینه برای قیمت فروش محاسبه شود. به این منظور کافی است که مشتق اول تابع سود نسبت به قیمت به ازای مقادیر بهینه T^*,t_1^*برابر با صفر قرار داده شود. بنابراین:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial TP_{(p,t_1^*,T^*)}}{\partial p} = -\frac{1}{T^*}\Big(-bc\Big(\frac{e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}}{\delta+\lambda}+\\
&\frac{-1+e^{(\theta+\lambda)t_1^*}}{\theta+\lambda}\Big)-\frac{bh(\theta-e^{\lambda t_1^*}(\theta+\lambda-e^{\theta t_1^*}\lambda))}{\theta\lambda(\theta+\lambda)}-\\
&\frac{b(\delta(e^{\lambda T^*}-e^{\lambda t_1^*})+e^{\lambda t_1^*}(-1+e^{\delta(-T^*+t_1^*)})\lambda)o}{\lambda(\delta+\lambda)}+b\Big(\\
&\frac{-1+e^{\lambda t_1^*}}{\lambda}+\frac{e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}}{\delta+\lambda}\Big)p-\Big(\frac{-1+e^{\lambda t_1^*}}{\lambda}+\\
&\frac{e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}}{\delta+\lambda}\Big)(a-bp)-\\
&\frac{be^{-\delta T^*}s(e^{(\delta+\lambda)T^*}+e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(-1-(\delta+\lambda)(T^*-t_1^*)))}{(\delta+\lambda)^2}\Big)=0
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

حل معادله بالا مقدار بهینه قیمت فروش را به دست می‌دهد. اکنون باید اثبات شود که این معادله نه تنها جواب دارد بلکه جواب آن بهینه و یگانه است. قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۲: با فرض $\lambda<0,|\lambda|>\theta,|\lambda|>\delta,bp<a<2bp$ داریم:

۲-۱- معادله ۱۶ دارای جواب یگانه است.

۲-۲- مقداری که به ازای جواب یگانه ۲-۱ به دست می‌آید بهینه است. یعنی سود حداکثر مطلق است.

اثبات: پیوست ب مشاهده شود.

[1] unique

بر اساس قضیه ۲ مقدار قیمت فروشی که از حل معادله ۱۶ به دست می‌آید مقدار تابع سود را بهینه خواهد نمود به عبارت دیگر یک مقدار حداکثر مطلق برای سود به دست خواهد آمد.

۶. الگوریتم

با توجه به توضیحاتی که بیان شد الگوریتم ساده‌ای برای محاسبه مقادیر بهینه مورد نظر ارائه می‌گردد:

۱. مقدار اولیه p_1 برای قیمت تعیین می‌شود. قرار می‌دهیم $p_j = p_1$. در پیوست ب اثبات شد که معادله ۱۶ تنها زمانی جواب خواهد داشت که $bc - bp + a < 0$. مقدار قیمتی که از حل این معادله به دست می‌آید به عنوان حد پایینی(p_1) و همچنین مقدار اولیه برای قیمت بهینه در نظر گرفته می‌شود. بنابراین: $p_l = p_1 = \dfrac{a+bc}{2b}$

۲. برای p_j با استفاده از معادلات۱۴ و ۱۵ مقدار بهینه t_1^*, T^* تعیین می‌شود.

۳. با توجه به مقادیر به دست آمده در مرحله ۲ و استفاده از معادله ۱۶مقدار قیمت p_{j+1} تعیین می‌شود.

۴. اگر اختلاف بین p_j, p_{j+1} (خطا) به اندازه کافی کوچک باشد قرار می‌دهیم $p^* = p_{j+1}$ و در نتیجه t_1^*, T^*, p^* مقادیر بهینه هستند. الگوریتم متوقف می‌شود و به مرحله ۵ می‌رویم. اما اگر، اختلاف بین p_j, p_{j+1} بزرگ باشد، $p_j = p_{j+1}$ و بازگشت به مرحله ۲ انجام می‌گیرد. (مقدار خطای قابل گذشت ۰٫۰۰۰۱ فرض می‌شود یعنی اگر $|p_j - p_{j+1}| \le 0.0001$ باشد الگوریتم متوقف می‌شود).

۵. مقادیر TP^* و Q^* به ترتیب با استفاده از روابط ۱۳ و ۷ محاسبه می‌شود.

۷. مثال عددی

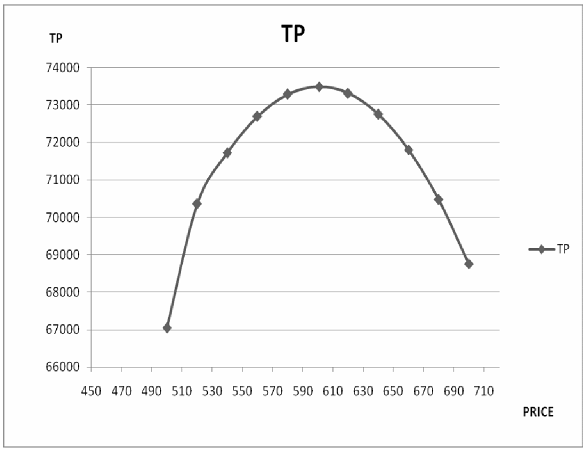
در این مقاله مثال عددی که در کار وی(۱۹۹۵) با اندکی تغییرات در نظر گرفته می‌شود. توابع و پارامترها به صورت زیر هستند:

$$f(t,p) = (500 - 0.5p)e^{-0.98t}, h = 40, s = 80, o = 120,$$
$$c = 200, A = 250, \theta = 0.08, \beta(x) = e^{0.2x}$$

همانطور که بیان شد $p_l = p_1 = bc - bp + a = 600$. با استفاده از الگوریتم معرفی شده بعد از ۳ تکرار مقادیر بهینه زیر حاصل می‌شود:

$$p^* = 600.748\ ,\ t_1^* = 0.0596757\ ,\ T^* = 0.0779141\ ,$$
$$TP^* = 73493.5\ ,\ Q^* = 14.9959$$

برای آنکه اطمینان حاصل شود که تابع هدف نسبت به قیمت مقعر است و در نتیجه جواب به دست آمده در این مثال حداکثر مطلق است، مقدار تابع هدف به ازای قیمتهای مختلف اولیه محاسبه شده است. با رسم نمودار تابع هدف نسبت به قیمت های مختلف اولیه این نکته به خوبی مشخص می‌شود که تابع هدف اکیدا مقعر است و در نتیجه جواب این مثال حداکثر مطلق است. نمودار ۲ این موضوع را نشان می‌دهد.



نمودار۲. وضعیت تابع هدف نسبت به قیمت‌های مختلف

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل برای کنترل موجودی و قیمت‌گذاری یک کالای فاسدشدنی به صورت همزمان ارائه شد. با توجه به اینکه در دنیای واقعی کمبود کالا هم به صورت پس‌افت و هم به صورت فروش از دست رفته روی می‌دهد، بنابراین در این مقاله کمبود به صورت پاره‌ای پس‌افت در نظر گرفته شد. در مقاله اثبات شد که تابع هدف سود به ازای مقادیر بهینه به دست آمده بهینه و منحصر به فرد است. الگوریتمی ساده و روشن برای حل مدل ارائه شد و در انتها با استفاده از مثال عددی مدل و نتایج آن تشریح گردید. نتایج به دست آمده نشان داد که تابع هدف نسبت به قیمت یک تابع اکیدا مقعر است و در نتیجه جواب بهینه به دست آمده برای مقدار سود به ازای قیمت بهینه حداکثر مطلق است. مدل معرفی شده در این مقاله مدلی جامع و کامل است و نسبت به حالت‌های مختلف تابع تقاضا و تابع کمبود منعطف می‌باشد. همچنین همه هزینه‌های موجود در سیستم موجودی در آن وجود دارد. مقاله می‌تواند از چند جهت گسترش یابد، تقاضا در این مقاله به صورت قطعی و وابسته به قیمت و زمان در نظر گرفته شد، در نظر گرفتن تقاضا به صورت احتمالی می‌تواند موضوع بسیار مناسبی برای تحقیقات آتی باشد. از جنبه دیگر مدل معرفی شده می‌تواند با سایر سیاست‌های موجود در سیستم مانند سیاست‌های تبلیغات، ترفیعات، تاخیر در پرداخت‌ها و مدل‌های هماهنگی در سیستم ترکیب شود و نتایج جالب و در خوری حاصل شود.

پیوست‌ها:

الف)

اثبات ۱-۲:

برای آنکه نشان داده شود که مقدار به دست آمده برای TP حداکثر مطلق است، باید ابتدا ماتریکس هشین (H)[1] تابع سود نسبت به T^*و t_1^* بهینه محاسبه شود و در صورتی که دترمینان ماتریکس بزرگتر از صفر باشد اثبات کامل می‌شود. بنابراین:

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 TP}{\partial {t_1}^2} & \dfrac{\partial^2 TP}{\partial t_1 \partial T}\\ \dfrac{\partial^2 TP}{\partial t_1 \partial T} & \dfrac{\partial^2 TP}{\partial T^2}\end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial {t_1}^2}\right|_{(t_1^*,T^*)}$$

$$=-\frac{1}{\theta T^*}e^{-\delta T^*+\lambda t_1^*}(a-bp)(e^{\delta T^*+\theta t_1^*}h(\theta+\lambda)+c\theta(-\delta e^{\delta t_1^*}-e^{\delta t_1^*}\lambda$$
$$+e^{\delta T^*+\theta t_1^*}(\theta+\lambda))-e^{\delta T^*}\lambda(h+\theta(o+p))+e^{\delta t_1^*}\theta(s+\delta(o+p$$
$$-T^*s+st_1^*)+\lambda(o+p-T^*s+st_1^*)))$$

$$\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial T^2}\right|_{(t_1^*,T^*)}$$

$$=-\frac{1}{T^{*3}}(2(A+c(\frac{e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}}{\delta+\lambda}+\frac{-1+e^{(\theta+\lambda)t_1^*}}{\theta+\lambda})(a-bp)+$$
$$\frac{h(\theta-e^{\lambda t_1^*}(\theta+\lambda-e^{\theta t_1^*}\lambda))(a-bp)}{\theta\lambda(\theta+\lambda)}-(\frac{-1+e^{\lambda t_1^*}}{\lambda}+\frac{e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}}{\delta+\lambda})p(a$$
$$-bp)+\frac{(\delta(e^{\lambda T^*}-e^{\lambda t_1^*})+e^{\lambda t_1^*}(-1+e^{\delta(-T^*+t_1^*)})\lambda)o(a-bp)}{\lambda(\delta+\lambda)}+$$
$$\frac{e^{-\delta T^*}(a-bp)s(e^{(\delta+\lambda)T^*}+e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(-1-(\delta+\lambda)(T^*-t_1^*)))}{(\delta+\lambda)^2}$$
$$+\frac{1}{(\delta+\lambda)^2}e^{-\delta T^*}T^*(a-bp)(-c(\delta+\lambda)(\delta e^{(\delta+\lambda)t_1^*}+e^{(\delta+\lambda)T^*}\lambda)+$$
$$\lambda(e^{(\delta+\lambda)T^*}(\lambda p-s)+e^{(\delta+\lambda)t_1^*}s)$$
$$+\delta^2(-e^{(\delta+\lambda)T^*}o+e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(o+p-T^*s+st_1^*))+\delta\lambda(e^{(\delta+\lambda)T^*}(-o+$$
$$p)+e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(o+p-T^*s+st_1^*))))+\frac{1}{(\delta+\lambda)^2}e^{-\delta T^*}T^{*2}(a-bp)(-c(\delta+$$
$$\lambda)(\delta^2e^{(\delta+\lambda)t_1^*}-e^{(\delta+\lambda)T^*}\lambda^2)-e^{(\delta+\lambda)T^*}\lambda^2(\lambda p-s)+\delta\lambda(e^{(\delta+\lambda)T^*}\lambda(o$$
$$-p)+2e^{(\delta+\lambda)t_1^*}s)+\delta^3e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(o+p-T^*s+st_1^*)+$$
$$\delta^2(e^{(\delta+\lambda)T^*}\lambda o+e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(s+\lambda(o+p-T^*s+st_1^*)))))$$

$$\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial t_1 \partial T}\right|_{(t_1^*,T^*)}$$

$$=\frac{e^{-\delta T^*+\lambda t_1^*}(a-bp)}{\theta T^{*2}}((e^{\delta T^*+\theta t_1^*}h-c\theta(-e^{\delta T^*+\theta t_1^*}+e^{\delta t_1^*}(1+\delta T^*))-$$
$$e^{\delta T^*}(h+\theta(o+p))+e^{\delta t_1^*}\theta(o+\delta T^*o+p+\delta T^*p+s(t_1^*$$
$$+\delta T^*(-T^*+t_1^*)))))$$

بعد از محاسبه عناصر ماتریکس هشین اکنون دترمینان آن محاسبه می‌شود. بنابراین:

$$\det(H)=\left(\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial {t_1}^2}\right|_{(t_1^*,T^*)}\right)\times\left(\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial T^2}\right|_{(t_1^*,T^*)}\right)-\left[\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial t_1\partial T}\right|_{(t_1^*,T^*)}\right]^2$$
$$=\frac{1}{\theta^2T^{*4}}e^{-2\delta T^*}(a-bp)(e^{\lambda t_1^*}(a-bp)(e^{\delta T^*+\theta t_1^*}h+c\theta(e^{\delta T^*+\theta t_1^*}-$$
$$e^{\delta t_1^*}(1+\delta T^*))-e^{\delta T^*}(h+\theta(o+p))+e^{\delta t_1^*}\theta(o+\delta T^*o+p+st_1^*+$$
$$\delta T^*(p+s(-T^*+t_1^*))))^2+e^{\delta T^*}\theta(e^{\delta T^*+\theta t_1^*}h(\theta+\lambda)+c\theta(-e^{\delta t_1^*}(\delta+$$
$$\lambda)+e^{\delta T^*+\theta t_1^*}(\theta+\lambda))-e^{\delta T^*}\lambda(h+\theta(o+p))+e^{\delta t_1^*}\theta(s+(\delta+\lambda)(o+$$
$$p+s(-T^*+t_1^*))))(\frac{1}{(\delta+\lambda)^2}e^{-\delta T^*}T^{*2}(a-bp)(e^{(\delta+\lambda)T^*}\lambda((\delta+\lambda)(c\lambda+$$
$$\delta o-\lambda p)+\lambda s)-\delta e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(c\delta(\delta+\lambda)-2\lambda s-\delta^2(o+p-T^*+st_1^*)-\delta(s+$$
$$\lambda(o+p-T^*s+st_1^*))))+2(A+c(\frac{e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+(\delta+\lambda)t_1^*}}{\delta+\lambda}+\frac{-1+e^{(\theta+\lambda)t_1^*}}{\theta+\lambda})(a-$$
$$bp)+\frac{h(\theta-e^{\lambda t_1^*}(\theta+\lambda-e^{\theta t_1^*}\lambda))(a-bp)}{\theta\lambda(\theta+\lambda)}$$
$$+\frac{(\delta(e^{\lambda T^*}-e^{\lambda t_1^*})+e^{\lambda t_1^*}(-1+e^{\delta(-T^*+t_1^*)})\lambda)o(a-bp)}{\lambda(\delta+\lambda)}-$$
$$(\frac{-1+e^{\lambda t_1^*}}{\lambda}+\frac{e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+(\delta+\lambda)t_1^*}}{\delta+\lambda})p(a-bp)$$
$$+\frac{e^{-\delta T^*}(a-bp)s(e^{(\delta+\lambda)T^*}+e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(-1-(\delta+\lambda)(T^*-t_1^*)))}{(\delta+\lambda)^2}+$$
$$\frac{1}{(\delta+\lambda)^2}e^{-\delta T^*}T^*(a-bp)(-e^{(\delta+\lambda)T^*}((\delta+\lambda)(c\lambda+\delta o-\lambda p)+\lambda s)+$$
$$e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(-c\delta(\delta+\lambda)+\lambda s+\delta^2(o+p-T^*s+st_1^*)+\delta\lambda(o+p$$
$$-T^*s+st_1^*))))))$$

به دلیل زیاد بودن پارامترها در دترمینان، ساده کردن آن کار مشکلی بود. لذا کل محاسبات با نرم‌افزار Mathematica6.1 انجام گرفت و نتیجه مثبت بود یعنی:

$$\det(H)=\left(\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial {t_1}^2}\right|_{(t_1^*,T^*)}\right)\times\left(\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial T^2}\right|_{(t_1^*,T^*)}\right)-\left[\left.\frac{\partial^2 TP}{\partial t_1\partial T}\right|_{(t_1^*,T^*)}\right]^2>0$$

این نشان می‌دهد که ماتریس هشین در نقطه بهینه معین مثبت[2] است و در نتیجه جواب بدست آمده حداکثر مطلق است. روش دومی که می‌توان استفاده کرد این است که برای هر مثال عددی

[1] *Hessian matrix*

[2] *definitive positive*

که ارائه می‌شود مقدار دترمینان ماتریکس هشین محاسبه شود. این روش ارزش کمتری دارد ولی با توجه به زیاد بودن تعداد پارامترها در روش اول می‌توان برای اطمینان بیشتر استفاده کرد. در مثال عددی ارائه شده در مقاله دترمینان محاسبه شده مثبت بوده است.

ب)

اثبات ۲-۱:

معادله ۱۶ را مد نظر قرار می‌دهیم:

از دو عامل $e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}$ و $-1+e^{\lambda t_1^*}$ فاکتورگیری می‌کنیم و سایر معادلات را بدون تغییر می‌نویسیم:

$$\frac{\partial TP_{(p,t_1^*,T^*)}}{\partial p}=\left[\frac{1}{T^*}(e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*})\left(\frac{bc-2bp+a}{\delta+\lambda}\right)\right]-$$
$$\left[\frac{1}{T^*}(-\frac{bc}{\theta+\lambda})\left(-1+e^{(\theta+\lambda)t_1^*}\right)\right]-$$
$$\left[\frac{1}{T^*}(-\frac{bh}{\theta\lambda(\theta+\lambda)})\left(\theta-e^{\lambda t_1^*}(\theta+\lambda-e^{\theta t_1^*}\lambda)\right)\right]-$$
$$\left[\frac{1}{T^*}(-\frac{bo}{\lambda(\delta+\lambda)})\left(\delta(e^{\lambda T^*}-e^{\lambda t_1^*})+e^{\lambda t_1^*}(-1+e^{\delta(-T^*+t_1^*)})\lambda\right)\right]-$$
$$\left[\frac{1}{T^*}(-1+e^{\lambda t_1^*})\left(\frac{2bp-a}{\lambda}\right)\right]-$$
$$\left[\frac{1}{T^*}(-\frac{bs}{(\delta+\lambda)^2})\left(e^{-\delta T^*}(e^{(\delta+\lambda)T^*}+e^{(\delta+\lambda)t_1^*}(-1-(\delta+\lambda)(T^*-t_1^*)))\right)\right]=0$$

برای آنکه بتوان اثبات را انجام داد چند فرض ساده زیر در نظر گرفته می‌شود:

$\lambda<0,|\lambda|>\theta,|\lambda|>\delta,bp<a<2bp$ این فرض‌ها تاثیر منفی چندانی بر کلی‌بودن مدل ندارند. همچنین در دنیای واقعی هم مشخص است که نرخ فاسدشدن (θ) و پارامتر تابع کمبود پس‌افت (δ) معمولا از مقدار پارامتر تابع نمایی تابع تقاضا (λ) کمتر است.

با توجه به محدودیت‌های بالا و توجه به این نکته که $T^*>t_1^*>0$ مقدار براکت‌های دوم، سوم، چهارم، پنجم و ششم مثبت هستند. بنابراین برای آنکه معادله بالا جواب داشته باشد باید مقدار براکت اول منفی باشد. این براکت را مد نظر قرار می‌دهیم:

پرانتز اول این براکت مقدار $e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}$ است. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این مقدار همواره کمتر از صفر است. بنابراین:

$$e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}>0\Rightarrow e^{\lambda T^*}>e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}\Rightarrow$$
$$\lambda T^*>-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*\Rightarrow$$
$$T^*(\lambda+\delta)>t_1^*(\lambda+\delta),\lambda+\delta<0\Rightarrow T^*<t_1^*$$

با توجه به اینکه همواره $T^*>t_1^*>0$، اثبات کامل می‌شود و در نتیجه $e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}<0$. بنابراین برای آنکه براکت اول منفی باشد باید: $\frac{bc-2bp+a}{\delta+\lambda}>0$ و چون فرض کردیم $\lambda+\delta<0$، پس باید: $bc-2bp+a<0$

اثبات ۲-۲:

در قسمت الف اثبات شد که معادله دارای جواب است. چون معادله یک تابع غیرخطی یک متغیره(متغیر p) است، بنابراین اگر تابع اکیدا مقعر باشد جواب آن بهینه خواهد بود. برای تعیین مقعر بودن مشتق دوم تابع هدف نسبت به قیمت محاسبه می‌شود. پس:

$$\frac{\partial^2 TP_{(p,t_1^*T^*)}}{\partial p^2}=-\frac{2b(\frac{-1+e^{\lambda t_1^*}}{\lambda}+\frac{e^{\lambda T^*}-e^{-\delta T^*+\delta t_1^*+\lambda t_1^*}}{\delta+\lambda})}{T^*}<0$$

رابطه بالا همواره برقرار است. بنابراین اثبات کامل شد.

منابع

[1] Dye, C.Y., "*Joint Pricing and Ordering Policy for a Deteriorating Inventory with Partial Backlogging*", Omega, Vol. 35, 2007, pp. 184–189.

[2] Harris, F.W., "*How Many Parts to Make at Once Factory*", The Magazine of Management, Vol. 10, 1913, pp. 135–136.

[3] Ghare, P.M., Schrader, G.H., "*A Model for an Exponentially Decaying Inventory*", Journal of Industrial Engineering, Vol. 14, 1963, pp. 238–243.

[4] Abad, P.L., "*Optimal Pricing and Lot Sizing Under Conditions of Perishability and Partial Backordering*", Management Science, Vol. 42, 1996, pp. 1093–1104.

[5] Abad, P.L., "*Optimal price and Order Size for a Reseller Under Partial Backordering*", Computers & Operations Research, Vol. 28, 2001, pp. 53–65.

[6] Dye, C.Y., "*Joint Pricing and Ordering Policy for a Deteriorating Inventory with Partial Backlogging*", Omega, Vol. 35, 2007, pp. 184–189.

[7] Eilon, S., Mallaya, R.V., "*Issuing and Pricing Policy of Semi-Perishables*", in Proceedings of the 4th International Conference on Operational Research,Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1966.

[8] Cohen, M.A., "*Joint Pricing and Ordering Policy for Exponentially Decaying Inventory with Known Demand*", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 24, 1977, pp. 257–268.

[9] Wee, H.M., "*Joint Pricing and Replenishment Policy for Deteriorating Inventory with Declining Market*", International Journal of Production Economics, Vol. 40, 1995, pp. 163–171.

[10] Wee, H.M., "*A Replenishment Policy for Items with a Price-Dependent Demand and a Varying Rate of Deterioration*", Production Planning & Control, Vol. 8, 1997, pp. 494–499.

[11] Wee, H.M., "*Deteriorating Inventory Model with Quantity Discount, Pricing and Partial Backordering*",

International Journal of Production Economics, Vol. 59, 1999, pp. 511–518.

[12] Mukhopadhyay, S., Mukherjee, R.N., Chaudhuri, K.S., *"An EOQ Model with Two-Parameter Weibull Distribution Deterioration and Price-Dependent Demand*," International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 36, 2005, pp. 25–33.

[13] Chang, H.J., Teng, J.T, Ouyang., Dye, C.Y., "*Retailer's Optimal Pricing and Lot-Sizing Policies for deteriorating Items with Partial Backlogging*" European Journal of Operational Research, Vol. 168, 2006, pp. 51–64.

[14] Wee, H.M., Law, S.T., "*Replenishment and Pricing Policy for Deteriorating Items Taking into Account the Time Value of Money*" International Journal of Production Economics, Vol. 71, 2001, pp. 213–220.

[15] Yang, C.Te, Quyang, L.Y., WU H.Han, "*Retailers Optimal Pricing and Ordering Policies for Non-Instantaneous Deteriorating Items with Price-Dependent Demand and Partial backlogging*", Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2009, 2009.

[16] Tsao, Y., Chung, Sheen G.Ji, "*Dynamic Pricing , Promotion and Replenishment Policies for a Deteriorating item Under Permissible Delay in Payments"*, Computers & Operation Research, Vol. 35, 2008, pp. 3562-3580.

[17] Tsair Teng, J., Quyang, L., Yuh, Chen, L.Ho, " *A Comparison Between Two Pricing and Lot-Sizing Models Partial Backlogging and Deteriorated Items*", international journal of production economics, Vol. 105, 2007, pp. 190-203.

[18] Mishra, S.S., Mishra, P.P., "*Price Determination for an EOQ Model for Deteriorating Items under Perfect Competition*", Computers and Mathematics with Application, Vol. 56, 2008, pp. 1082-1101.

[19] Abad, P.L., "*Optimal Price and Order Size Under Partial Backordering Incorporating Shortage, Backorder and Lost Sale Costs* ", international journal of production economics, Vol. 114, 2008, pp. 179-186.

[20] Mo, J., Mi, F., Zhou, F., Pan, H., "*A Note on an EOQ Model with Stock and Price Sensitive Demand*", Mathematical and Computer Modeling, Vol. 49, 2009, pp. 2029-2036.

[21] He, Y., Wang, S.H., Lai, K.K., "*An Optimal Production-Inventory Model for Deteriorating Items with Multiple-Market Demand*", European Journal of Operational Research, Vol. 203, 2010, pp. 593-600.

[22] Hsieh, T.P., Dye, C.Y., Ouyang, L.Y., "*Optimal Lot Size for an Item with Partial Backlogging Rate when Demand is stimulated by Inventory Above a Certain Stock Level*", Mathematical and Computer Modeling, Vol. 51, 2010, pp. 13-32