نشریه بین‌المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۳، جلد ۱۹، پاییز ۱۳۸۷، صفحه ۸۳-۷۳
ویژه‌نامه مهندسی مکانیک

کنترل فعال ارتعاشات ورق مستطیلی با استفاده از سری فوریه و تبدیل لاپلاس

مهدی شریف‌نیا و منصور رفیعیان

چکیده: در این مقاله کنترل فعال ارتعاشات ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده به روش جدیدی بررسی می‌شود. ابتدا معادله دیفرانسیل ورق وصله‌دار با استفاده از تئوری سنتی ورق برای استفاده در این روش توسعه داده می‌شود و برای لحاظ کردن اثرات سختی و جرم وصله‌ها از یک تابع محلی استفاده می‌شود. سپس با استفاده از سری فوریه فرکانس‌های طبیعی و مودشیپ‌های ورق وصله‌دار و نیز قطب‌های مدار بسته در حین استفاده از کنترل‌کننده‌های PID به دست می‌آید. آنگاه با استفاده از تبدیل لاپلاس و مودشیپ‌های به دست آمده، پاسخ سیستم در حالت ارتعاش اجباری محاسبه می‌شود. با استفاده از این روش تأثیر کنترل‌کننده‌های PID به راحتی بررسی و برای اولین بار اثر کنترل کننده‌های انتگرال‌گیر در کنترل فعال ورق در نظر گرفته می‌شود. اعتبار این روش با حل و بحث چند مثال نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کنترل فعال، ورق مستطیلی، سری فوریه، تبدیل لاپلاس، PID.

۱. مقدمه

تحلیل ارتعاشات و امواج صوتی سازه‌ها به عنوان یکی از مهمترین نیازمندی‌ها در سال‌های اخیر مطرح شده است و در نتیجه کنترل فعال ارتعاشات با استفاده از مواد فعال توجه زیادی را به خود جلب کرده است. ماده‌ای که می‌تواند یک یا چند تحریک خارجی مانند فشار، دما، ولتاژ، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و غیره را حس کرده و به آنها پاسخ دهد، ماده فعال نامیده شود. مواد فعال که گاهی مواد هوشمند نیز نامیده می‌شوند به خاطر کاربردهایشان در شاخه‌های مهندسی، اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده‌اند. رایج‌ترین مواد فعال مبدل‌های پیزوالکتریک هستند که برای کنترل سازه‌های تیر، خرپا، ورق و پوسته به کار می‌روند. یکی از مهمترین سازه‌های کاربردی سازه ورق است که کاهش ارتعاشات آن اهمیت زیادی در صنعت به خصوص در هوافضا دارد. به عنوان یک مسئله مناسب، کنترل ارتعاشات ورق با تکیه‌گاه‌های ساده همواره مد نظر بسیاری از محققان بوده است.

همچنان که توسط مراجع [۱ ، ۲ ، ۳ و ۴] نشان داده شده، وصله‌های پیزوالکتریک را می‌توان به سطح ماده اصلی وصل کرد و یا اینکه می‌توان در ماده اصلی حک کرد[۵]. در تمام این مدل‌ها فرض معمول آن است که بدون اعمال یک میدان الکتریکی، حضور ماده پیزوالکتریک نمی‌تواند تأثیر قابل توجهی روی ویژگی‌های کلی سازه‌ای داشته باشد. همچنین در مدل‌های قبلی فرض می‌شد که ضخامت لایه متصل‌شده قابل چشم‌پوشی و تغییر مشخصات ناچیز باشد.

بررسی کرنش القایی برای یک ورق لایه‌ای کامپوزیتی در [۶] با استفاده از تئوری ورق لایه‌ای کلاسیک توسعه داده شده است. کرنش القا شده مربوط به عملگرهای پیزوالکتریک مجزا به کرنش کل افزوده می‌شود و توزیع این عملگرها در سرتاسر لایه با استفاده از یک تابع پله‌ای به حساب آورده می‌شود. مراجع [۷] و [۸] کنترل یک سازه ورق با تکیه‌گاه ساده را با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک بررسی کرده‌اند. در این کار حس‌کردن مودال و کنترل ورق با استفاده از روش بسط مودال به دست می‌آید و گشتاورهای کنترلی معادل به دست می‌آیند. نویسندگان از تئوری ورق سنتی

این مقاله در تاریخ ۸۶/۴/۱۰ دریافت و در تاریخ ۸۶/۸/۲۳ به تصویب نهایی رسیده است.

مهدی شریف‌نیا، کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد
sharifnia.mehdi@gmail.com
دکتر منصور رفیعیان، استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد
rafeeyan@yazduni.ac.ir

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

استفاده کرده‌اند و اثرات سختی و جرم مربوط به قطعه پیزوالکتریک را در تخمین مشخصات دینامیکی ورق نادیده گرفته‌اند. بسیاری از محققان از این مدل تحلیلی برای کاربردهای مختلف وصله‌های پیزوالکتریک از قبیل کنترل تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها استفاده کرده‌اند.

برای وصله‌های پیزوالکتریک مجزای متصل‌شده به سازه‌های تیر و ورق، محققان بیشتر از روش‌های عددی مثل روش اجزا محدود استفاده کرده‌اند. به دست آوردن جواب دقیق برای این نوع از سازه‌ها مشکل است. بنابراین روش اجزا محدود روشی مناسب برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی چنین سازه‌هایی است. در مرجع [۳] یک المان آجری[1] سه‌بعدی برای مطالعه پاسخ دینامیکی توسعه داده شده اما به هر حال معایب و خطاهایی در این مدل‌کردن وجود دارد. مرجع [۹] یک المان گذار[2] را گسترش داده تا در محدوده پیزوالکتریک به المان‌های جامد[3] وصل شود و از المان‌های پوسته‌مسطح[4] برای ورق استفاده شده است.

در این تحقیق جایگذاری مناسب وصله‌ها برای بهینه‌تر بودن کنترل‌کننده‌ها نیز بررسی شده است. در مرجع [۱۰] از یک المان چهار ضلعی چهار گره‌ای استفاده شده و مرجع [۱۱] یک المان محدود انعطاف‌پذیر برشی را برای مطالعه دینامیک ورق لایه‌ای با حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک گسترش داده است. مرجع [۱۲] کنترل فعال سازه‌های لایه‌ای کامپوزیتی که دارای لایه‌ها یا وصله‌های پیزوالکتریک هستند را به روش اجزا محدود انجام داده است. در این مرجع یک المان محدود بر اساس تئوری سنتی کیرشهف[5] توسعه داده می‌شود. در مراجع [۱۳] و [۱۴] یک فرمول‌بندی اجزا محدود برای کنترل فعال ورق ضخیم به ترتیب در ارتعاشات آزاد و اجباری ارائه شده است. در مرجع [۱۵] یک فرمول‌بندی برای حل کنترل ارتعاش ورق‌های نازک با استفاده از وصله‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارائه می‌شود. روش حل تبدیل مسئله کنترل پیزوالکتریک به یک معادله انتگرالی را شامل می شود و بدین وسیله ناپیوستگی مسئله لحاظ شده و فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آیند. در این مرجع تنها فرکانس‌های طبیعی ورق هوشمند محاسبه شده و برای حل معادله روشی ارائه نشده است. مرجع [۱۶] با استفاده از تئوری سنتی ورق به مدل‌سازی وصله‌های حسگر و عملگر پرداخته و معادله دیفرانسیل ورق با یک وصله حسگر و عملگر را به دست آورده است. اما در این مرجع حل این معادله دیفرانسیل و کنترل فعال ورق به روش تحلیلی انجام نشده است.

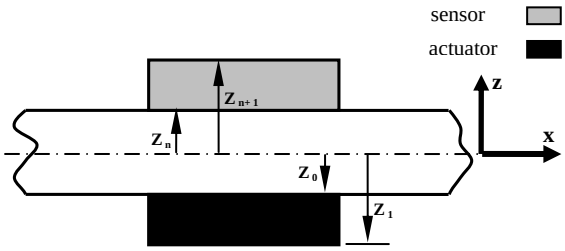
همانطور که مشاهده شد در کارهای گذشته نویسندگان در کنترل فعال سازه‌ها اثرات سختی و جرم وصله‌ها را با استفاده از روش‌های تحلیلی مدل نکرده‌اند و همواره برای در نظر گرفتن این اثرات از روش‌های عددی استفاده کرده‌اند. هر چند تعدادی از محققین وصله‌های حسگر و عملگر را مدل کرده‌اند اما از معادلات به دست آمده در کنترل فعال استفاده نکرده‌اند.

بنابراین ارائه یک روش تحلیلی برای حل معادله دیفرانسیلی حرکت ورق هوشمند و در نتیجه کنترل فعال ارتعاشات آن، مدنظر قرار گرفته است.

در این تحقیق کنترل سازه ورق با تکیه‌گاه ساده با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک مجزا با روشی تحلیلی و جدید بررسی می‌شود. در ابتدا استخراج معادله دیفرانسیل ورق با وصله‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری سنتی ورق، از مرجع [۱۶]، با اعمال تغییراتی ارائه می‌شود و سپس برای حل آن در حالت همگن از سری فوریه و در حالت ناهمگن از تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود. از آنجا که تمام اثرات وصله‌ها در معادله دیفرانسیلی حرکت ورق لحاظ شده است، با حل معادله دیفرانسیل، کنترل فعال ورق نیز با دقت بالایی برای ورق‌های نازک انجام می‌شود. در این کار ضمن اینکه اثرات سختی و جرم مربوط به قطعه پیزوالکتریک در تخمین مشخصات دینامیکی ورق نادیده گرفته نمی‌شوند، نتایج کنترل فعال و اثر کنترل‌کننده‌های PID روی کنترل ورق گسترش داده می‌شود.

۲. مدل‌سازی و فرمول‌بندی

شکل (۱) یک سازه هوشمند را نشان می‌دهد که قطعه حسگر و عملگر پیزوالکتریک روی آن متصل شده‌اند.



شکل ۱. وصله پیزوالکتریک متصل به سطح

وصله‌های پیزوالکتریک در جهت ضخامت قطبی می‌شوند و سطوح اصلی آنها به وسیله الکترودهای با ضخامت ناچیز پوشیده می‌شوند. صفحه $z = 0$ صفحه میانی ورق را نشان می‌دهد. تئوری ورق لایه‌ای سنتی که توسعه تئوری ورق سنتی (کیرشهف) برای ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای است، میدان‌های جابجایی را به صورت زیر فرض می‌کند:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \qquad (۱)$$

[1] - *brick element*
[2] - *transition element*
[3] - *solid elements*
[4] - *falt-shell elements*
[5] - *Kirchhoff*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

که u ، v و w به ترتیب جابجایی‌ها در امتداد محورهای x ، y و z هستند که از یک نقطه روی صفحه میانی یعنی $z = 0$ اندازه‌گیری می‌شوند. فرضیات کیرشهف براساس نادیده گرفتن اثر برش عرضی است. به عبارت دیگر تغییر شکل به طور کامل وابسته به خمش و کشیدگی داخل صفحه‌ای است. این فرض منجر به صفر شدن مؤلفه‌های کرنش عرضی یعنی ε_{zz}، γ_{xz} و γ_{yz} خواهد شد. بنابراین برای کرنش‌های کوچک و دوران‌های متوسط روابط جابجایی- کرنش شکل زیر را به خود می‌گیرند:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned} \qquad (۲)$$

و یا به طور کوتاه‌تر $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + z\varepsilon^{(1)}$ که:

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(0)}\\ \varepsilon_{yy}^{(0)}\\ \gamma_{xy}^{(0)}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\end{Bmatrix} \quad , \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}^{(1)}\\ \varepsilon_{yy}^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{Bmatrix}$$

روابط متشکله خطی برای سازه لایه‌ای میزبان در جهت‌های اصلی مادی به صورت زیر هستند:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & 0\\ C_{21} & C_{22} & 0\\ 0 & 0 & C_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۳\text{- الف})$$

روابط متشکله خطی بر حسب مولفه‌های تنش و کرنش غیر صفر، برای وصله‌های پیزوالکتریک به صورت زیر هستند:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}^{a,s} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & 0\\ C_{21} & C_{22} & 0\\ 0 & 0 & C_{33}\end{bmatrix}^{a,s}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}^{a,s} - \begin{bmatrix}0 & 0 & e_{31}\\ 0 & 0 & e_{32}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{a,s}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix}^{a,s} \qquad (۳\text{- ب})$$

$$\begin{Bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{Bmatrix}^{a,s} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ e_{31} & e_{32} & 0\end{bmatrix}^{a,s}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}^{a,s} + \begin{bmatrix}\xi_{11} & 0 & 0\\ 0 & \xi_{22} & 0\\ 0 & 0 & \xi_{33}\end{bmatrix}^{a,s}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix}^{a,s} \qquad (۳\text{- ج})$$

که $C_{ij}^{a.s}$، $e_{ij}^{a,s}$ و $\xi_{ij}^{a,s}$ به ترتیب ضرایب سختی در میدان الکتریکی ثابت، ثوابت پیزوالکتریک و ضرایب یا ظرفیت دی‌الکتریک در حالت تنش ثابت برای وصله‌های حسگر و عملگر هستند. σ_i و D_i مؤلفه‌های تنش و جابجایی الکتریکی هستند. بالانویس‌های a و s به وصله‌های عملگر و حسگر برمی‌گردند. مناطق دارای وصله‌های پیزوالکتریک علاوه بر ارضای معادلات تعادل باید معادله بار الکتریکی $\nabla \cdot D = 0$ را ارضا کنند. اگر وصله‌ها نازک باشند، می‌توان فرض کرد که مؤلفه‌های x و y میدان‌های جابجایی الکتریکی در امتداد x و y درون وصله ثابت هستند، بنابراین معادله بار الکتریکی به $\frac{dD_z}{dz} = 0$ کاهش می‌یابد.

۱-۲. مدل وصله عملگر

پتانسیل الکتریکی درون وصله عملگر در امتداد ضخامت به صورت درجه دو فرض می‌شود:

$$\varphi^a = \varphi_0^a + z\varphi_1^a + z^2\varphi_2^a \qquad (۴)$$

در مورد وصله‌های عملگر فرض می‌شود الکترودهایی که در سطح داخلی وصله لایه‌ای قرار دارند (در $z = z_0$)، همیشه به زمین وصل باشند (پتانسیل صفر) و یک پتانسیل V^a در الکترودهای سطح دیگر (در $z = z_1$) اعمال شود. با اعمال این شرایط در معادله (۴) خواهیم داشت:

$$\varphi_1^a = \frac{V^a}{h^a} - 2h_m^a\varphi_2^a \qquad (۵)$$

که $h^a = (z_0 - z_1)$ ضخامت وصله عملگر و $h_m^a = (z_0 + z_1)/2$ فاصله سطح میانی عملگر از سطح میانی سازه لایه‌ای است. با استفاده از روابط متشکله و معادله بار الکتریکی کاهش یافته خواهیم داشت:

$$\varphi_2^a = \frac{e_{31}}{2\xi_{33}}(\varepsilon_{xx}^{(1)} + \varepsilon_{yy}^{(1)})^a \qquad (۶)$$

از معادلات (۴) ، (۵) و (۶) پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی درون وصله عملگر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_z^a = -\frac{d\varphi^a}{dz} = -\frac{V^a}{h^a} - e_{31}\left(\frac{z - h_m^a}{\xi_{33}}\right)(\varepsilon_{xx}^{(1)} + \varepsilon_{yy}^{(1)})^a \qquad (۷)$$

با جایگذاری معادله (۷) در معادله (۳- ب) رابطه تنش- کرنش برای وصله‌های عملگر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^a &= C_{11}^a\varepsilon_{xx}^a + C_{12}^a\varepsilon_{yy}^a + \frac{e_{31}V^a}{h^a} + \frac{e_{31}^2(z - h_m^a)}{\xi_{33}}(\varepsilon_{xx}^{(1)} + \varepsilon_{yy}^{(1)})^a\\ \sigma_{yy}^a &= C_{12}^a\varepsilon_{xx}^a + C_{22}^a\varepsilon_{yy}^a + \frac{e_{31}V^a}{h^a} + \frac{e_{31}^2(z - h_m^a)}{\xi_{33}}(\varepsilon_{xx}^{(1)} + \varepsilon_{yy}^{(1)})^a\\ \tau_{xy}^a &= C_{66}^a\gamma_{xy}^a\end{aligned} \qquad (۸)$$

روابط متشکله فوق تنها درون وصله‌های عملگر معتبر هستند.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

۲-۲. مدل وصله حسگر

از معادله بار الکتریکی کاهش یافته مشاهده می‌شود که جابجایی الکتریکی مؤلفه z باید در امتداد ضخامت وصله حسگر ثابت باشد. همچنین برای حسگر هیچ منبع خارجی بار الکتریکی به وصله وجود ندارد، بنابراین کل بار الکتریکی که روی سطوح الکترود وصله حسگر ظاهر می‌شود باید صفر باشد. این شرط برای حالت موجود می‌تواند به صورت $D_z\big|_{z=z_n} = -D_z\big|_{z=z_{n+1}}$ نوشته شود. این شرط همراه با معادله بار الکتریکی کاهش یافته باعث می‌شود که D_z هر جا درون وصله برابر با صفر باشد. بنابراین از معادله (۳- ج) نتیجه می‌شود که:

$$E_z^s = -\frac{e_{31}}{\xi_{33}}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})^s = -\frac{e_{31}}{\xi_{33}}\{(\varepsilon_{xx}^{(0)}+\varepsilon_{yy}^{(0)})^s + z(\varepsilon_{xx}^{(1)}+\varepsilon_{yy}^{(1)})^s\} \quad (۹)$$

اگر پتانسیل الکتریکی درون وصله حسگر هم فرض شود که به صورت درجه دوم در امتداد z تغییر می‌کند، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\varphi^s = \varphi_0^s + z\varphi_1^s + z^2\varphi_2^s \quad (۱۰)$$

سپس میدان الکتریکی درون وصله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_z = -\frac{d\varphi^s}{dz} = -\varphi_1^s - 2z\varphi_2^s \quad (۱۱)$$

با مقایسه معادلات (۹) و (۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$\varphi_1^s = \frac{e_{31}}{\xi_{33}}(\varepsilon_{xx}^{(0)}+\varepsilon_{yy}^{(0)})$$

$$\varphi_2^s = \frac{e_{31}}{2\xi_{33}}(\varepsilon_{xx}^{(1)}+\varepsilon_{yy}^{(1)})$$

پتانسیل الکتریکی متوسط حسگر (به عبارت دیگر ولتاژی که بین الکترودهای دو سطح حسگر ظاهر می‌شود) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} V^s &= \frac{1}{A_s}\int_{A_s}(\varphi^s\big|_{z=z_{n+1}} - \varphi^s\big|_{z=z_n})dA_s \\ &= \frac{h^s e_{31}}{A_s\xi_{33}}\int_{A_s}\{(\varepsilon_{xx}^{(0)}+\varepsilon_{yy}^{(0)}) - h_m^s(\varepsilon_{xx}^{(1)}+\varepsilon_{yy}^{(1)})\}dA_s \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که در آن $h^s = z_{n+1} - z_n$ ضخامت وصله حسگر و $h_m^s = (z_{n+1}+z_n)/2$ فاصله سطح میانی وصله حسگر از سطح میانی سازه لایه‌ای است. با جاگذاری معادله (۱۱) در معادله (۳- ب) رابطه تنش- کرنش برای وصله حسگر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^s &= (C_{11}^s + \frac{e_{31}^2}{\xi_{33}})\varepsilon_{xx}^s + (C_{12}^s + \frac{e_{31}^2}{\xi_{33}})\varepsilon_{yy}^s \\ \sigma_{yy}^s &= (C_{21}^s + \frac{e_{31}^2}{\xi_{33}})\varepsilon_{xx}^s + (C_{22}^s + \frac{e_{31}^2}{\xi_{33}})\varepsilon_{yy}^s \\ \tau_{xy}^s &= C_{66}^s\gamma_{xy}^s \end{aligned} \quad (۱۳)$$

۲-۳. مدل ورق هوشمند

معادلات تعادل برای ورق با وصله‌های حسگر و عملگر متصل به سطح به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \bar{\rho}h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \bar{\rho}h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \bar{\rho}h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x,y,t) \end{aligned} \quad (۱۴)$$

که بنا به تعریف:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{z_n}^{z_1}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^E \\ \sigma_{yy}^E \\ \sigma_{xy}^E \end{Bmatrix}dz + \int_{z_1}^{z_0}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^a \\ \sigma_{yy}^a \\ \sigma_{xy}^a \end{Bmatrix}Rdz + \int_{z_n}^{z_{n+1}}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^s \\ \sigma_{yy}^s \\ \sigma_{xy}^s \end{Bmatrix}Rdz \quad (۱۵)$$

منتجه‌های نیروی غشایی هستند. در اینجا σ_{ij}^E مؤلفه‌های تنش برای ورق میزبان هستند و R تابع محلی است که بر حسب تابع پله‌ای U برای وصله‌ای به ابعاد $2a\times 2b$ که مرکز آن مبدأ مختصات است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} R(x,y) &= [U(x+a)-U(x-a)]\,[U(y+b)-U(y-b)] \\ &= 1 \quad ; \quad -a<x<a\,,\ -b<y<b \\ &= 0 \quad ; \quad in\ other\ \text{points} \end{aligned} \quad (۱۶)$$

منتجه‌های گشتاور M_i به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{z_n}^{z_1}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^E \\ \sigma_{yy}^E \\ \sigma_{xy}^E \end{Bmatrix}zdz + \int_{z_1}^{z_0}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^a \\ \sigma_{yy}^a \\ \sigma_{xy}^a \end{Bmatrix}Rzdz + \int_{z_n}^{z_{n+1}}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^s \\ \sigma_{yy}^s \\ \sigma_{xy}^s \end{Bmatrix}Rzdz \quad (۱۷)$$

تابع چگالی جرم محلی به صورت $\bar{\rho}h = \rho^E h^E + \rho^a h^a R + \rho^s h^s R$ تعریف می‌شود که $h = h^E + Rh^a + Rh^s$ و ρ^a و ρ^s چگالی‌های جرمی وصله‌های حسگر و عملگر هستند و ρ^E چگالی ورق میزبان است. در معادله (۱۴)، $q(x,y.t)$ بار هارمونیک گسترده است که روی سطح ورق به سمت پایین وارد می‌شود. با جایگذاری روابط تنش- کرنش برای ورق، حسگر و عملگر از معادلات (۸)، (۱۳) و (۱۵) در معادلات (۱۷)، منتجه‌های نیرو و گشتاور محاسبه می‌شوند. با جایگذاری منتجه‌های نیرو و گشتاور در معادله تعادل ورق (۱۴)، معادله حرکت ورق هوشمند به دست می‌آید. برای یک ورق ایزوتروپیک با جفت وصله‌های حسگر و عملگر، معادله حرکت کلی به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} -D\nabla^4 w = \bar{\rho}h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &- q(x,y,t) \\ + \sum_{j=1}^{N_p} &\{\sum_{i=a,s} D^i\{ (\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4})^i R \\ &+ 2(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2})^i R_x + 2(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3})^i R_y \\ &+ (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^i R_{xx} + (\upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^i R_{yy} \\ &+ [2(1-\upsilon)(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})^i]R_{xy}\} \quad \}^j \\ - \sum_{j=1}^{N_a} &(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\,(e_{31}V^a h_m^a R)^i \end{aligned} \quad (۱۸)$$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

که در آن $R_x = \partial R/\partial x$ ، $R_y = \partial R/\partial y$ ، $R_{xx} = \partial^2 R/\partial x^2$ ، $R_{yy} = \partial^2 R/\partial y^2$ و $R_{xy} = \partial^2 R/\partial x \partial y$ هستند. مشتق‌های اول R به توابع دلتای دیراک در جهت‌های x و y مربوط می‌شوند. ولی از مشتقات دوم آن، بیان رایجی وجود ندارد.

باید توجه شود که در حین به دست آوردن معادلات بالا برای ورق، بر روی میدان‌های کرنش هیچ فرضی به جز فرض‌های اساسی تئوری سنتی ورق اعمال نشده است.

۳. حل معادله دیفرانسیل حرکت

در این قسمت برای اولین بار روشی تحلیلی برای حل معادله دیفرانسیل (۱۸) ارائه می‌شود. این معادله دیفرانسیل را مانند هر معادله دیفرانسیل دیگر می‌توان در دو حالت همگن و ناهمگن حل کرد.

۳-۱. حل همگن معادله دیفرانسیل حرکت

در ابتدا معادله دیفرانسیل (۱۸) برای حالتی که هیچگونه تحریک خارجی (ازجمله تحریک عملگر) وجود ندارد در شرایط تکیه‌گاهی ساده حل می‌شود تا فرکانس‌های طبیعی ومودشیپ‌های ورق با وصله‌های پیزوالکتریک به دست آید.

شرایط تکیه‌گاهی برای ورق با تکیه‌گاه ساده به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad & @ \ x = 0 \ , \ x = l_x \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad & @ \ y = 0 \ , \ y = l_y \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

اکنون برای حل معادله (۱۸) از روش آنالیز مودال (جداسازی متغیرها) استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که جواب w را به صورت $w = A(x,y)T(t)$ فرض می‌کنیم. اما با علم بر شرایط تکیه‌گاهی می‌توان تابع $A(x,y)$ را به صورت سری فوریه دوگانه سینوسی فرض کرد. همچنین برای حرکت نوسانی تابع $T(t)$ به صورت $e^{\omega t}$ در نظر گرفته می‌شود. پس عبارت w را می توان به صورت زیر نوشت:

$$w = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn} \sin(\frac{m\pi x}{l_x}) \sin(\frac{n\pi y}{l_y}) \, e^{\omega t} \qquad (۲۰)$$

در روش آنالیز مودال، مقصود یافتن جواب‌هایی است که در آنها تمام نقاط با فرکانس یکسان ارتعاش کنند یعنی در یک زمان همگی دارای ماکزیم دامنه و در یک زمان دیگر همگی دارای دامنه صفر باشند.

حال عبارت w از معادله (۲۰) در معادله دیفرانسیل (۱۸) قرار داده می‌شود. سپس طرفین معادله در عبارت $\sin(p\pi x/l_x)\sin(q\pi y/l_y)$ که q=1,…,N و p=1,…,M ضرب شده و از طرفین معادله در میدان $0 \le x \le l_x$ و $0 \le y \le l_y$ انتگرال گرفته می‌شود. با انتگرال‌گیری و در نظر داشتن شرایط مرزی، مشتقات تابع محلی R ساده می‌شوند و در نهایت دستگاه معادلات خطی به صورت زیر تشکیل می شود:

$$[C_t]\{A\} = \{0\} \qquad (۲۱)$$

که در آن بردار $\{A\}$ برابر با $[A_{11} \, A_{12} \, \dots \, A_{MN}]^T$ و ماتریس $[C_t]$ یک ماتریس مربعی $MN \times MN$ است. از آنجا که ضرایب A_{mn} نمی‌توانند همگی صفر باشند، بنابراین برای آنکه دستگاه فوق جواب غیر صفر داشته باشد، باید دترمینان ماتریس $[C_t]$ برابر با صفر باشد. ماتریس $[C_t]$ شامل پارامتر ω^2 است و با صفر قرار دادن دترمینان آن، مقادیری برای ω به دست می‌آید که همان فرکانس‌های طبیعی هستند. ماتریس $[C_t]$ را می‌توان به دو ماتریس دیگر که اولی شامل اعداد ثابت و دومی شامل پارامترهای ω^2 است، تجزیه کرد. یعنی:

$$[C_t] = [K] + \omega^2 [M] \qquad (۲۲)$$

اکنون می‌توان پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی و مودشیپ‌ها را به مسئله مقادیر ویژه تبدیل کرد:

$$[C_t]\{A\} = [K]\{A\} + \omega^2 [M]\{A\} = 0 \qquad (۲۳)$$

با ضرب طرفین معادله فوق در $[-M]^{-1} = -[M]^{-1}$ نتیجه می‌شود :

$$[-M]^{-1}[K]\{A\} = \omega^2 \{A\} \qquad (۲۴)$$

معادله اخیر مسئله مقدار ویژه برای ماتریس $[Z]=[-M]^{-1}[K]$ است. بنابراین مقادیر ویژه ماتریس $[Z]$ همان مجذور فرکانس‌های طبیعی و بردارهای ویژه آن همان امتدادهای ویژه برای بردار $\{A\}$ خواهد بود. با داشتن بردارهای ویژه $\{A\}$ مودشیپ‌های سیستم طبق معادله (۲۰) برای ورق با تکیه‌گاه ساده تعیین می‌شوند.

در حالتی که اثرات عملگر (V^a) به معادله اضافه شود با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[C_t]$ می‌توان قطب‌های سیستم را به دست آورد.

۳-۲. حل ناهمگن معادله دیفرانسیل حرکت

بعد از معلوم شدن بردارهای ویژه $\{A\}^i$ توابع مودشیپ ورق وصله‌دار یعنی z_1 و z_2 و ... و $z_{M\times N}$ که دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده است به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$z_i = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}^i \sin(\frac{m\pi x}{l_x}) \sin(\frac{n\pi y}{l_y}) \qquad (۲۵)$$

اگر پاسخ کلی ورق به صورت $w(x,y,t)$ باشد آنگاه ضرایب $E_1(t)$ و $E_2(t)$ و ... و $E_{M\times N}(t)$ وجود دارند به طوریکه:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) &= E_1(t)\, z_1 + E_2(t)\, z_2 + \dots + E_{M\times N}(t)\, z_{M\times N} \\ &= \sum_{i=1}^{M\times N} E_i(t)\, z_i \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

با استفاده از رابطه فوق به حل معادله دیفرانسیل ناهمگن پرداخته می‌شود. طبق رابطه (۱۲) اختلاف پتانسیل الکتریکی القا شده در حسگر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V^s = \frac{-h^s h_m^s e_{31}}{\xi_{33}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (۲۷)$$

با قرار دادن w از معادله (۲۶) در معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$V^s = \frac{-h^s h_m^s e_{31}}{\xi_{33}} \sum_{i=1}^{M\times N} E_i(t) \left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}\right) \qquad (۲۸)$$

اکنون از طرفین معادله دیفرانسیل (۱۸) نسبت به زمان t تبدیل لاپلاس گرفته می‌شود، بنابرین این معادله دیفرانسیل از حوزه زمان t به حوزه s (میدان s) منتقل می‌شود. پس $w(x,y,s)$ از عبارت زیر در معادله دیفرانسیل قرار داده می‌شود:

$$\begin{aligned} w(x,y,s) &= E_1(s)\, z_1 + E_2(s)\, z_2 + \ldots + E_{M\times N}(s)\, z_{M\times N} \\ &= \sum_{i=1}^{M\times N} E_i(s)\, z_i \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

اما ولتاژ اعمال شونده به عملگر j ام یعنی V_j^a بر حسب ولتاژ جفت حسگر آن یعنی V_j^s نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} V_j^a(s) &= C_j(s) V_j^s(s) \\ &= \frac{-h^s h_m^s e_{31}}{\xi_{33}} \sum_{i=1}^{M\times N} C_j(s) E_i(s) \left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

که $C_j(s)$ تابع انتقال کنترل‌کننده j ام را نشان می‌دهد. اکنون با قرار دادن معادله‌های (۲۹) و (۳۰) در معادله دیفرانسیل (۱۸)، معادله‌ای بر حسب مجهولات $E_i(t)$ به دست می‌آید. حال زمان آن رسیده که از تعامد مودشیپ‌های z_i استفاده شود. پس طرفین معادله در مودشیپ i ام یعنی z_i که $i=1,2,\ldots,M\times N$ ضرب شده و در میدان $0<x<l_x$ و $0<y<l_y$ انتگرال‌گیری می‌شود. بنابراین تابعیت معادله دیفرانسیل و از جمله بار خارجی $q(x,y,s)$ ، نسبت به x و y از بین می‌رود و فقط تابعیت s باقی می‌ماند. پس دستگاه معادلات به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$[C_t(s)]\{E(s)\} = \{F(s)\} \qquad (۳۱)$$

که بردار $\{F(s)\}$ تحت تأثیر تبدیل لاپلاس و سپس ضرب در z_i و سپس انتگرال‌گیری از تابع بار خارجی $q(x,y,t)$ به وجود آمده است:

$$F_i(s) = \int_0^{l_x}\int_0^{l_y} \left(z_i \left(\int_0^{\infty} q(x,y,t)\, e^{-st} dt \right) \right) dx dy \qquad (۳۲)$$

با حل دستگاه معادله (۳۱) مجهولات $E_i(s)$ محاسبه می‌شوند و با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس مجهولات $E_i(t)$ بر حسب زمان t محاسبه می‌شوند. با به دست آمدن مجهولات $E_i(t)$ با استفاده از معادله (۲۶) عبارت جابجایی کلی w برای ورق با وصله‌های پیزوالکتریک به دست می‌آید. در هنگام تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله (۱۸) شرایط اولیه نیز ظاهر می‌شوند، یعنی می‌توان از این روش برای تحلیل ارتعاش آزاد نیز استفاده کرد.

۴. نتایج عددی برای ورق با تکیه‌گاه ساده

نتایج را می‌توان به سه دسته فرکانس‌های طبیعی، ارتعاش آزاد و ارتعاش اجباری تقسیم کرد.

۴-۱. فرکانس‌های طبیعی و مودشیپ‌ها

در شکل (۲) مشخصات یک سازه ورق با تکیه‌گاه‌های ساده که از جنس آلومینیم است همراه با وصله‌های از جنس PZT نشان داده شده است. مود شیپ‌ها و فرکانس‌های طبیعی به دست آمده برای این سازه در شکل (۳) نشان داده شده است. فرکانس‌های طبیعی ورق بدون وصله نیز در جدول (۱) داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، فرکانس‌های طبیعی ورق وصله‌دار در مقایسه با ورق بدون وصله تغییراتی داشته که نمی‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. همچنین به عنوان یک نتیجه مهم فرکانس‌های مود ۱-۳ و ۳-۱ دیگر با هم برابر نیستند.

همانطور که گفته شد در این تحقیق از توابع کنترل PID استفاده می‌شود. بنابراین با استفاده از معادلات (۳۰) و (۳۱) و در نظر گرفتن درجه دترمینان ماتریس $[C_t]$ به راحتی نشان داده می‌شود که به وسیله n جفت وصله پیزوالکتریک می‌توان برای n مود اول جایدهی دلخواه قطب انجام داد (شرط لازم و کافی). بنابراین برای کنترل تعداد معینی از مودهای ورق، استفاده از همان تعداد جفت وصله حسگر و عملگر کافی (و نه لازم) است. از آنجا که برای تخمین جابجایی عرضی ورق از ۹ مود اول استفاده خواهد شد لذا از ۹ جفت وصله استفاده شده است.

۴-۲. ارتعاش آزاد

ارتعاش آزاد ورق با ۹ وصله، شکل (۲)، تحت تأثیر شرایط اولیه و ضرایب کنترل زیر بررسی می‌شود:

$$\begin{cases} w(x,y,0) = 0.7 \sin^2\left(\frac{\pi x}{l_x}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{l_y}\right) & mm \\ \dot{w}(x,y,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_d^i = 0.001 \\ G_p^i = -10 \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,9$$

جابجایی نقطه وسط وصله‌های ۱ و ۵ در شکل (۴- الف) و ولتاژ حسگر و عملگر ۵ در شکل (۴- ب) نشان داده شده‌اند.

قطب‌های سیستم در این حالت در جدول (۲) آورده شده است. با توجه به قطب‌های سیستم همانطور که از شکل (۴- الف) نیز ملاحظه می‌شود، واضح است که نوسان مودهای بالاتر خیلی سریع کاهش می‌یابد. به طور کلی به ازای ضرایب کنترل مساوی برای تمام وصله‌ها، این حالت رخ می‌دهد.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

۳-۴. ارتعاش اجباری

ارتعاش اجباری ورق با ۹ وصله، شکل (۲)، تحت تأثیر شرایط اولیه صفر، بار مکانیکی پله واحد و ضرایب کنترل زیر بررسی می‌شود:

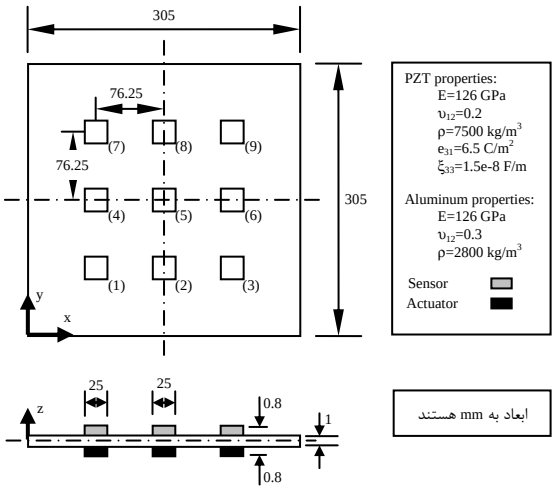
$$q(x,y,t)=U(t) \quad N/m^2 \qquad \begin{cases} G_d^i = 0.01 \\ G_p^i = -1 \\ G_i^i = 1000 \end{cases} \qquad i=1,...,9$$

جدول ۱. فرکانس‌های طبیعی ورق بدون وصله با تکیه‌گاه ساده

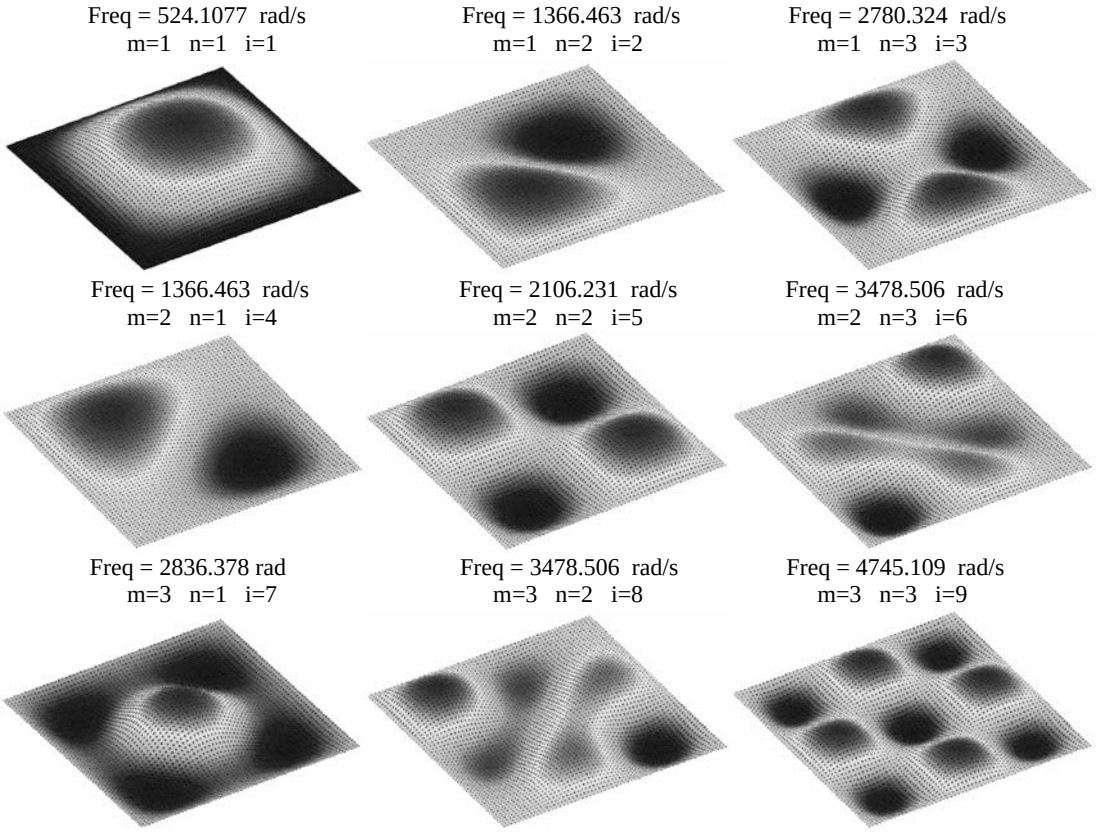
مقدار اندیس i در $E_i(t)$	۱	۲	۴	۵	۳	۷	۶	۸	۹
n , m	۱ و ۱	۱ و ۲	۲ و ۱	۲ و ۲	۱ و ۳	۳ و ۱	۲ و ۳	۳ و ۲	۳ و ۳
فرکانس (rad/s)	۴۳۰/۷۵	۱۰۷۶/۸۷	۱۰۷۶/۸۷	۱۷۲۳/۰۰	۲۱۵۳/۷۵	۲۱۵۳/۷۵	۲۷۹۹/۸۷	۲۷۹۹/۸۷	۳۸۷۶/۷۵

جدول ۲. قطب‌های سیستم در مثال ارتعاش آزاد

مود ۱و۱ (n,m)	- 2.47 ± 476.55 i
مود ۱و۲	-13.87 ± 1262.18 i
مود ۲و۱	-13.87 ± 1262.17 i
مود ۲و۲	-33.41 ± 1940.83 i
مود ۱و۳	-51.23 ± 2589.01 i
مود ۳و۱	-54.35 ± 2640.19 i
مود ۲و۳	-85.47 ± 3221.71 i
مود ۳و۲	-85.47 ± 3221.71 i
مود ۳و۳	-159.01±4392.13 i

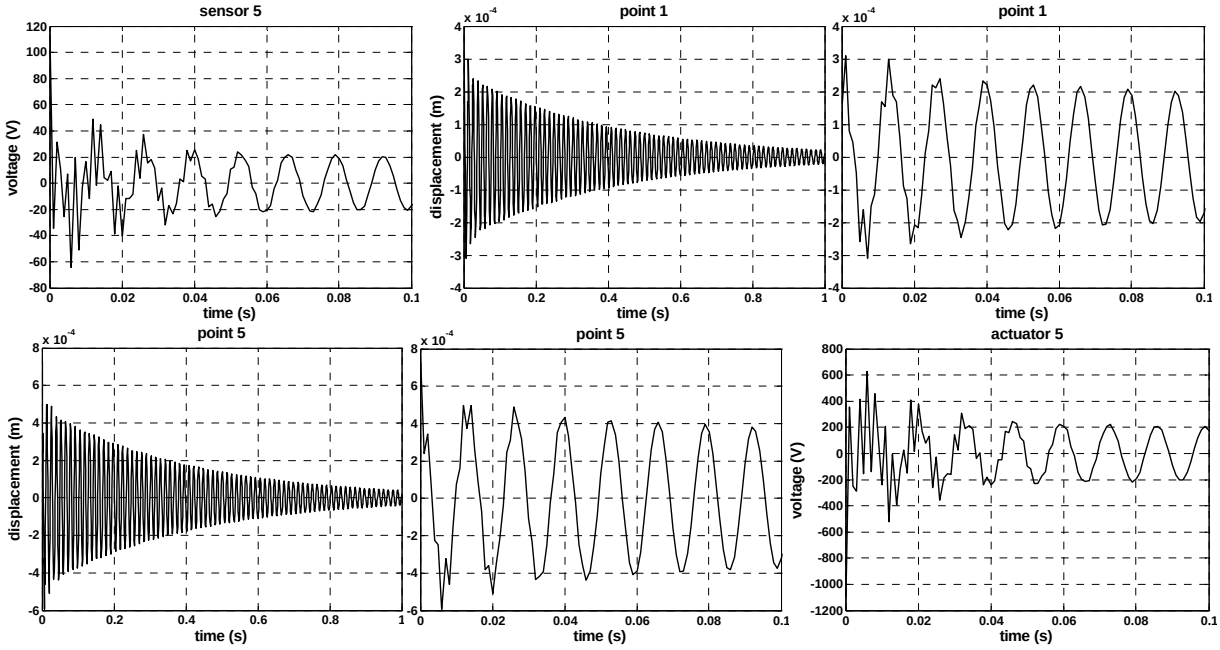


شکل ۲. ورق با تکیه‌گاه ساده همراه با وصله‌های پیزوالکتریک



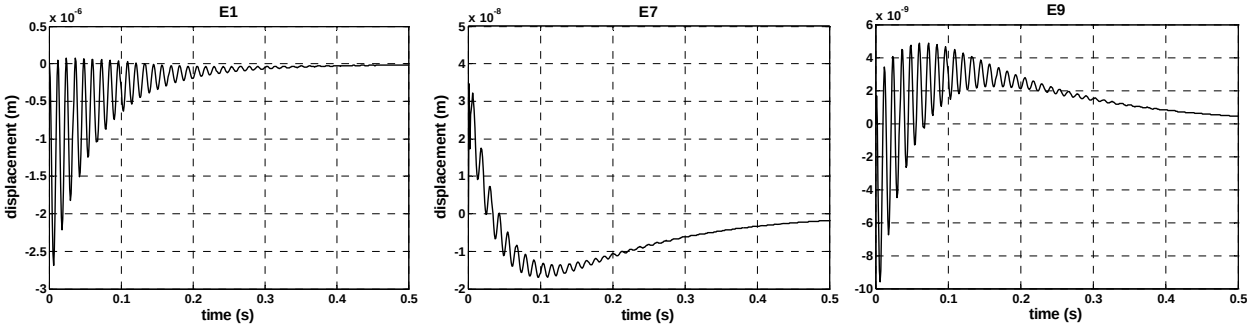
شکل ۳. فرکانس‌های طبیعی و مودشیپ‌های ورق وصله‌دار با تکیه‌گاه ساده و مقدار اندیس i در $E_i(t)$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]



(ب) (الف)

شکل ۴. الف) جابجایی نقاط ۱ و ۵ در مثال ارتعاش آزاد و در دو بازه زمانی مختلف
ب) ولتاژ حسگر و عملگر شماره ۵ در مثال ارتعاش آزاد



شکل ۵. ضرایب $E_i(t)$ تحت تأثیر بار پله‌ای واحد

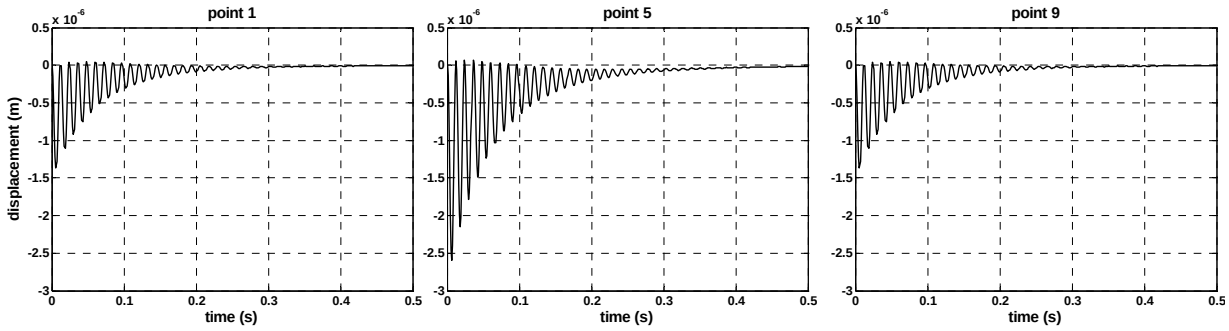
یکی از مزیت‌های بسیار مهم روش استفاده شده آن است که با به دست آوردن ضرایب $E_i(t)$ با توجه به معادله (۲۹)، می‌توان تأثیر ضرایب کنترل انتخاب شده بر رفتار هر یک از مودها را بررسی کرد. در شکل (۵) نمودار ضرایب $E_i(t)$ بر حسب زمان آورده شده است. در این شکل فقط ضرایب $E_1(t)$ و $E_7(t)$ و $E_9(t)$ نشان داده شده‌اند. زیرا بارگذاری متقارن بوده و فقط مودهای متقارن تحریک می‌شوند و لذا سایر ضرایب صفر هستند.

ترکیب کنترل‌کننده‌های تناسبی و مشتق‌گیر می‌تواند پایداری ایجاد کند اما استفاده از کنترل‌کننده انتگرال‌گیر باعث می‌شود که خطای ماندگار سیستم صفر شود. در شکل (۶) نمودار جابجایی نقاط وسط وصله‌های ۱ و ۵ و ۹ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود تأثیر استفاده از کنترل‌کننده انتگرال‌گیر بسیار قابل توجه است و باعث صفر شدن خطای ماندگار می‌شود. جابجایی نقاط ۱ و ۹ به علت تقارن مسئله با هم برابر است. در شکل (۷) نمودار پتانسیل الکتریکی حسگرها و عملگرهای شماره ۱ و ۵ نشان داده شده است. پتانسیل الکتریکی حسگرها با افزایش زمان به صفر می‌رسد. اما پتانسیل الکتریکی عملگرها افزایش یافته و به مقدار ثابتی می‌رسد، ولی ارتعاش آن صفر می‌شود. این ولتاژهای پسماند تحت تأثیر کنترل‌کننده انتگرال‌گیر در عملگرها به وجود آمده است. به عبارت دیگر مقدار نهایی این نمودارها مقدار ولتاژ لازم در عملگرها را نشان می‌دهد که به ازای آنها ورق در حالت اولیه خود نگه داشته می‌شود. این نمودارها برای اولین بار به دست آورده شده‌اند که این نشان دهنده قدرت این روش حل می‌باشد.

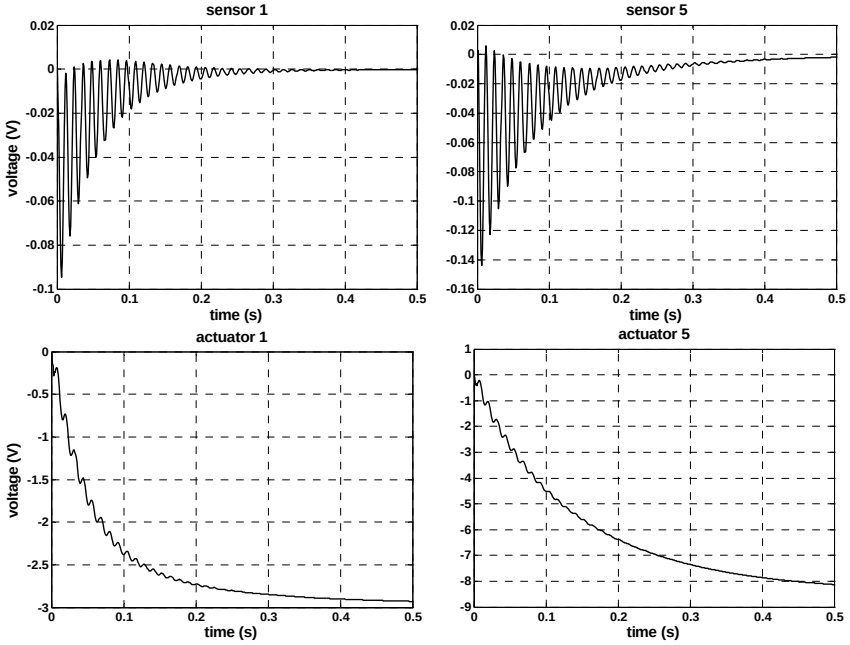
اثر کنترلی وصله‌ها بر پدیده تشدید بسیار چشمگیر است. ضرایب کنترل‌کننده به صورت $G_p^i=-1$, $G_i^i=1000$, $G_d^i=0.01$ که $i=1,...,9$ و بار مکانیکی هارمونیک در فرکانس طبیعی اول ورق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$q(x,y,t)=100\sin(524.1t) \qquad N/m^2$$

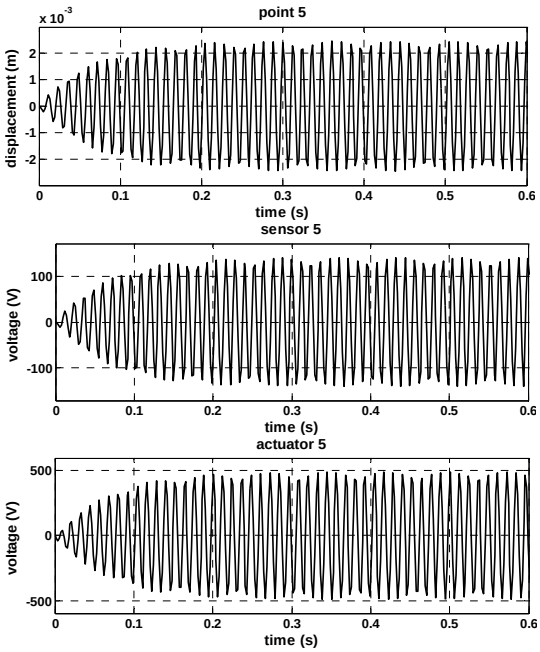
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]



شکل ۶. جابجایی نقاط ۱ و ۵ و ۹ تحت تأثیر بار پله‌ای واحد

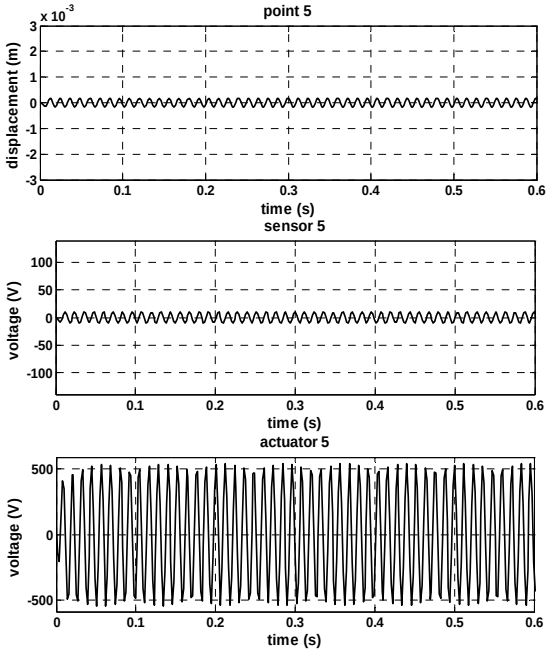


شکل ۷. پتانسیل الکتریکی حسگرها و عملگرهای شماره ۱ و ۵ تحت تأثیر بار پله‌ای واحد



شکل ۸. نتایج وصله ۵ در حالت تشدید و ضرایب کنترل

$G_d = 0.01$, $G_i = 1000$, $G_p = -1$



شکل ۹. نتایج وصله ۵ در حالت تشدید و ضرایب کنترل

$G_d = 0.1$, $G_i = 1000$, $G_p = -10$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

آنگاه نمودار جابجایی نقطه وسط وصله ۵ به صورت شکل (۸) خواهد بود. در پدیده تشدید دامنه ارتعاشات با شیب ثابت افزایش می‌یابد. اما در این حالت همانطور که در این شکل دیده می‌شود، با گذشت زمان دامنه ارتعاش ثابت می‌شود. در شکل (۹) نمودار جابجایی نقطه ۵ به ازای ضرایب کنترل‌کننده $G_d^i = 0.1$, $G_i^i = 1000$, $G_p^i = -10$ که $i = 1,...,9$ نشان داده شده است. برای دو حالت فوق نمودار پتانسیل الکتریکی حسگرها و عملگرها نیز در شکل‌های (۸) و (۹) آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش ضرایب کنترل‌کننده تناسبی و مشتق‌گیر و در عین حال ثابت ماندن ضریب کنترل‌کننده انتگرال‌گیر، کنترل تشدید در زمان و دامنه کمتر انجام می‌شود. در حالیکه ولتاژ ماکزیمم که توسط عملگر ۵ وارد می‌شود، در هر دو حالت تقریباً یکسان است.

۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق کنترل فعال ارتعاشات ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده به روشی جدید ارائه شد. معادله دیفرانسیل ورق وصله‌دار با استفاده از فرضیات تئوری سنتی ورق برای استفاده در این روش توسعه داده شده و برای لحاظ کردن اثرات سختی و جرم وصله‌ها از یک تابع محلی استفاده شد. در نظر گرفتن اثرات مزبور تغییراتی را در فرکانس‌های طبیعی نشان داد. در روش حل ارائه شده با استفاده از سری فوریه، فرکانس‌های طبیعی و مودهای ورق وصله‌دار و سپس قطب‌های مدار بسته در حین استفاده از کنترل‌کننده‌های PID به دست آمد.

یکی از مزیت‌های روش ارائه شده آن است که می‌توان به راحتی با تغییر ضرایب کنترل‌کننده و در نتیجه مشاهده تغییر قطب‌های سیستم سرعت پاسخ هر یک از مودها را به اندازه دلخواه درآورد. در نهایت با استفاده از تبدیل لاپلاس و مودشیپ‌های به دست آمده، پاسخ سیستم در حالت ارتعاش اجباری محاسبه شد. تأثیر کنترل‌کننده‌های PID بر ورودی پله بررسی و برای اولین بار اثر کنترل‌کننده‌های انتگرال‌گیر در کنترل فعال ورق در نظر گرفته شد. برای صفر کردن خطای ماندگار در ورودی بار پله لازم است که مقدار ولتاژ معینی همواره بر عملگر وارد شود در حالی که در حالت ارتعاش آزاد با صفر شدن جابجایی سیستم ولتاژ اعمالی به عملگر نیز به صفر می‌رسد. در مزیت روش ارائه شده همین بس که اثر کنترل‌کننده انتگرال‌گیر بر تغییرات ولتاژ عملگر در ارتعاش اجباری ورق وصله‌دار، برای اولین بار ارائه شد. ملاحظه شد که در هنگام استفاده از کنترل‌کننده انتگرال‌گیر درحالت تشدید، با افزایش ضرایب کنترل کننده تناسبی و مشتق‌گیر و در عین حال صرف ولتاژ یکسان، می‌توان نتایج بهتری را به دست آورد.

مراجع

[1] Crawley, E.F., Lazarus, K.B., *"Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates"*, AIAA, Vol.29, 1991, PP. 944-951.

[2] Thomson, S.P., Loughlan, *"The Active Buckling Control of Some Composite Column Strips Using Piezoceramic Actuators"*, Composite Structures, Vol.32, 1995, PP.59-66.

[3] Ha, S.K., Keilers, C., Chang, Fu-Kuo, *"Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators"*, AIAA, Vol. 30, No. 3, 1992, PP. 772-780.

[4] Valey, D., Rao, S.S. *"Two Dimensional Finite Element Modeling of Composites with Embedded Piezoelectric"*, Collection of Technical Papers, Proceeding of the AIAA/ASME/ASCE Structures, Structural dynamics and Materials Conference, No. 5, PP. 2629-2633.

[5] Crawley, E. F., de Luis, J., *"Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures"*, AIAA, Vol.25, 1987, PP. 1373-85.

[6] Wang, B.T., Rogers, C.A., *"Laminated Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain Actuators"*, Composite Mater., Vol. 25, 1991, PP. 433-452.

[7] Tzou, H.S., Fu, H.Q., *"Study of the Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators Part I. Theoretical Analysis"*, Sound and Vibration, Vol. 172, No. 2, 1994, PP. 247-259.

[8] Tzou, H.S., Fu, H.Q., *"Study of the Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators Part II. Parametric Study and Active Vibration Control"*, Sound and Vibration, Vol. 172, No. 2, PP. 261-275.

[9] Kim, J., Vardan, V.V., Vardan, V.K., *"Finite Element Modeling of Structures Including Piezoelectric Active Devices"*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 40, 1997, PP. 817-832.

[10] Hwang, Woo-Seok Park, Hyun Chul, *"Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators"*, AIAA, Vol. 31, No. 5, 1993, PP. 930-937.

[11] Chandrashekhara, K., Agarwal, A., *"Active Vibration Control of Laminated Composite Plates Using Piezoelectric Device: a Finite Element Approach"*, Intell. Mater. Syst. Struct.,Vol. 4, 1993, PP. 496-508.

[12] Moita, J.M.S., Correia, V.M.F., Martins, P.G., Soares, C.M.M., Soares, C.A.M., *"Optimal Design in Vibration Control of Adaptive Structures Using a Simulated Annealing Algorithm"*, Journal of Composite Structures, Vol. 75, 2006, PP. 79-87.

[13] Moita, J.M.S., Correia, I.F.P., Soares, C.M.M., Soares, C.A.M., *"Active Control of Adaptive Laminated Structures with Bonded Piezoelectric Sensors and Actuators"*, Journal of Computers and Structures, Vol. 82, 2004, PP. 1349-1358.

[14] Moita, J.M.S., Soares, C.M.M., Soares, C.A.M., *"Active Control of Forced Vibration in Adaptive Structures Using Higher Order Model"*, Journal of Composite

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

Structures, Vol. 71, 2005, PP. 349-355.

[15] Sadek, I.S., Bruch, Jr. J.C., Sloss, J.M., Adali, S., *"Feedback Control of Vibrating Plates Using Piezoelectric Patch Sensors and Actuators*", Journal of Composite Structures, Vol. 62, 2003, PP. 397-402.

[16] Gopinathan, S., *"Modeling of Piezoelectric Smart Structures for Active Vibration and Noise Control Applications"*, PhD thesis, Dept. of Engineering Science and Mechanics, Pennsylvania State Univ., 2001.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]