نشریه بین‌المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۳، جلد ۱۹، پاییز ۱۳۸۷، صفحه ۴۹-۳۷
ویژه‌نامه مهندسی مکانیک

استفاده از دستگاه مختصات متعامد محلی در مدل کردن ترک دو بعدی به روش المان محدود توسعه یافته

علی پورکمالی انارکی و مجید میرزائی

چکیده: «روش المان محدود توسعه یافته»، یک روش عددی برای مدل کردن انواع ناپیوستگیها از جمله ترک است که بر مبنای المان محدود استاندارد استوار است و تنها توابع خاصی بر مبنای نوع ناپیوستگی به حل عددی استاندارد اضافه می‌شوند. برای مدل کردن ترک در مادهٔ الاستیک خطی، از یک تابع برای ایجاد ناپیوستگی در امتداد طول ترک و از تابع دیگری برای ایجاد شرایط «تکینه» در المان نوک ترک استفاده می‌گردد. در نتیجهٔ اعمال توابع، درجهٔ آزادی گره‌های اطراف المان نوک ترک و گره‌های اطراف طول ترک افزایش می‌یابد، که به آن غنی‌سازی گره‌ای گفته می‌شود. با این روش، ترک به صورت مجازی و مستقل از مش مدل می‌شود و نیاز به استفاده از مش ریز، المان تکینه در اطراف نوک ترک و ایجاد مش مجدد در بررسی رشد ترک نخواهد بود. در این مقاله اصول روش المان محدود توسعه یافته توضیح داده می‌شود. یک روش جدید بر مبنای دستگاه مختصات متعامد محلی نوک ترک، جهت غنی‌سازی گره‌ای به کار گرفته می‌شود. برای مدل کردن ترکهای دو بعدی به روش المان محدود توسعه یافته، اصول و روشهای جدید در یک نرم‌افزار تخصصی استفاده شده است که در این مقاله به آن اشاره می‌شود. نتایج حاصل از نرم‌افزار نوشته شده بر پایهٔ روشهای جدید، برای ترکهایی با هندسهٔ مختلف، در مقایسه با نتایج روابط تحلیلی دقیق، تطبیق خوبی نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: المان محدود توسعه یافته، مدل کردن ترک دو بعدی، غنی سازی گره‌ای، افزایش درجات آزادی

۱. مقدمه

مدل کردن ناپیوستگیها و به ویژه ترک به علت ضرورت آن همیشه از نظر طراحانی که با دیدگاه مکانیک شکست و تحمل ترک توسط قطعه، طراحی می‌کرده‌اند از اهمیت خاصی برخوردار بوده است. روشهای «المان محدود[۲]» و «المان مرزی[۳]» از مدتها قبل برای مدل کردن ترک به کار گرفته شده‌اند و در هر یک از این دو روش نیز پیشرفتهایی حاصل گشته ولی مشکل مشترک این دو روش، تطبیق ترک با مش‌بندی و تغییر مش در هر مرحله از رشد ترک می‌باشد.

بنابراین برای حل این مشکل Belytscho و همکارانش (۱۹۹۴) روش «بدون المان[۴]» را که در آن فقط گره در محیط مدل درنظر گرفته می‌شد، بنیانگذاری کردند [۲و۱]. استفاده از مفهوم «تفکیک پیوستگی[۵]» که Melenk و Babuska [۳] و Duate و Oden [۴] در سال ۱۹۹۶ ارائه کردند چشم‌انداز جدیدی برای مدل کردن ترک به وجود آورد و در سال ۱۹۹۹، Moes و همکارانش روشی بر پایهٔ المان محدود که نیاز به مش‌بندی مجدد نداشت را براساس مفهوم تفکیک پیوستگی بنیانگذاری کردند [۵]. Dolbow در سال۱۹۹۹ جزئیات مربوط به تعیین گره‌های اطراف ترک و غنی‌سازی آنها را بیان کرد و روابط پایه جهت اضافه کردن توابع پله‌ای واحد و تکینه را برای مدلهای ساده با المانهای چهار گره‌ای ارائه نمود [۶]. در سال ۲۰۰۰ Daux و همکارانش با تکمیل روش Moes مبانی روشی به نام المان محدود توسعه یافته را بنا نهادند

این مقاله در تاریخ ۸۲/۸/۲۰ دریافت و در تاریخ ۸۳/۳/۳۰ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر علی پورکمالی انارکی، استادیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شهید رجایی ali_pourkamali@srttu.edu
دکتر مجید میرزائی، دانشیار دانشگاه تربیت مدرس mirzaei@modares.ac.ir

[2] *Finite Element*
[3] *Boundary Element*
[4] *Element Free- Mesh Free*
[5] *Partition of Unity*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

[۷]. در این روش برای مدل کردن ترک درون یک المان پیوسته (به صورت مستقل از مش)، با استفاده از مفهوم تفکیک پیوستگی شرایط مرزی ترک را به گره‌ها منتقل نمودند. با این کار درجات آزادی گره‌های اطراف ترک به صورت مجازی افزایش می‌یابد که این کار «غنی‌سازی گره‌ای[1]» نامیده می‌شود. در سال ۲۰۰۰ Dolbow و همکارانش با استفاده از توابع غنی‌ساز مناسب از طریق روابط انرژی (J-Integral) پارامترهای نوک ترک را به دست آوردند [۸]. در سال ۲۰۰۰، Daux و همکارانش ترکهای چند شاخه و سوراخها را به روش المان محدود توسعه یافته بررسی کردند [۷]. برای اولین بار کاربرد روش المان محدود توسعه یافته در مدل کردن ترکهای سه بعدی توسط Sukumar و همکارانش ارائه شد [۹]. در بررسی ترکهای دو بعدی ارائه معیار تشخیص و انتخاب گره‌هایی که باید غنی‌سازی برایشان انجام شود کار دشواری بوده است و این مشکل در مدلهای سه بعدی بیشتر نمود پیدا کرده است از این رو روشی به نام Level Sets در سال ۲۰۰۱ توسط Stolarska و همکارانش در حالت دو بعدی [۱۰] و نیز Sukumar و همکارانش [۱۱] و همچنین روش دیگری در سال ۲۰۰۳ به نام Fast Marching توسط Sukumar و همکارانش در حالت سه بعدی ارائه گردیده است [۱۲].

در این مقاله ضمن اشاره مختصر به کارهای تحقیقاتی انجام شده در راستای پیشرفت المان محدود توسعه یافته، اصول پایهٔ این روش تشریح خواهد شد. سپس چگونگی استفاده از روش جدید دستگاه مختصات متعامد محلی نوک ترک برای شناسایی گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی دارند تشریح می‌گردد و از طریق آن پارامترهای لازم جهت افزایش درجات آزادی گره‌ها به دست آورده می‌شود. اصول این روش و نیز معیار جدید فوق توسط مؤلفین مقاله در یک نرم‌افزار تخصصی به نام MEXFEM2D به کار گرفته شده است. این نرم‌افزار به زبان Visual - Fortran 6.5 برای بررسی انواع حالتهای ترک دو بعدی در مدلهایی با المانهای مثلثی، توسط مؤلفین نوشته شده است.

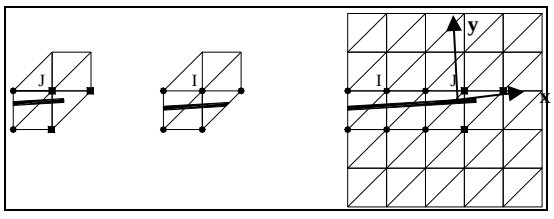
۲. مدل کردن ترک دو بعدی به روش المان محدود توسعه یافته

در المان محدود استاندارد به هر گره از المان «تابع شکل[2]» نسبت داده می‌شود و در حالت دو بعدی هر گره ۲ درجه آزادی دارد که ترکیب خطی حاصلضرب تابع شکل هر نقطه داخل المان در تغییر مکانهای گره‌ای می‌تواند تغییر مکان نقاط داخل المان را مشخص کند. در المان محدود توسعه یافته از همان توابع شکل المان محدود استاندارد استفاده می‌شود [۵] و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش پیدا می‌کند (غنی‌سازی) که این کار بر اساس مفهوم نظریهٔ تفکیک پیوستگی [۳] انجام می‌شود یعنی با اعمال توابع خاصی، که در مورد آنها بحث می‌شود، درجات آزادی که به واسطه ناپیوستگی در محل ترک درون المان بوجود می‌آید به نقاط گره‌ای اطراف آن المان اختصاص پیدا می‌کند.

برای تعیین نوع تابع مناسب جهت افزایش درجات آزادی گره‌ها (غنی‌سازی)، محل برخورد ترک با اضلاع المانها مشخص می‌گردد اگر ترک در دو ناحیه اضلاع یک المان را ببرد از تابع پله‌ای واحد جهت غنی‌سازی گره‌های اطراف آن المان استفاده خواهد شد و اگر ترک تنها یکی از اضلاع المان را قطع کند و نقطهٔ برخورد دیگری نداشته باشد یا به عبارت دیگر نوک ترک داخل المان باشد برای گره‌های اطراف آن المان غنی‌سازی به روش تابع تکینه انجام خواهد گردید.

البته چون هر گره بین چند المان مشترک است در مجموعهٔ المانی اطراف آن گره انواع موقعیت نسبی بین ترک و المان اعم از بدون برخورد، دو نقطهٔ برخورد و احتمالاً یک نقطهٔ برخورد بوجود می‌آید که برای غنی‌سازی گره مورد نظر از توابع مراتب بالاتر استفاده می‌گردد[۶].

به عنوان مثال مطابق شکل (۱- الف) گره‌های اطراف ترک که با دایرهٔ توپر مشخص شده‌اند از طریق تابع پله‌ای واحد غنی می‌شوند و سه گرهٔ اطراف نوک ترک که با مربع توپر مشخص شده از طریق تابع تکینه غنی می‌گردند. در شکل (۱- ب) مجموعهٔ المانی مرتبط با گره I ترسیم شده که سه المان بالا توسط ترک بریده نمی‌شود و سه المان پایین در دو نقطه برش می‌خورد لذا غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد برای I در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۱- ج) مجموعهٔ المانی مرتبط با گره J مشخص شده است، سه المان بالا توسط ترک قطع نشده، دو المان پایین از سمت چپ در دو نقطه بریده شده و آخرین المان فقط در یک نقطه برش خورده، بنابراین برای گـــره J غنی‌سازی از طریق تابع تکینه انجام می‌شود.



ج ب الف

شکل۱. نمایش گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی جهت افزایش درجات آزادی دارند

برای غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد از یک تابع دو مقداری H به صورت زیر استفاده می‌شود[۵].

$$H=\begin{cases}+1 & ; \quad \text{اگر} \quad y>0\\ -1 & ; \quad \text{اگر} \quad y<0\end{cases} \qquad (۱)$$

[1] *Node Enrichment*
[2] *Shape Function*

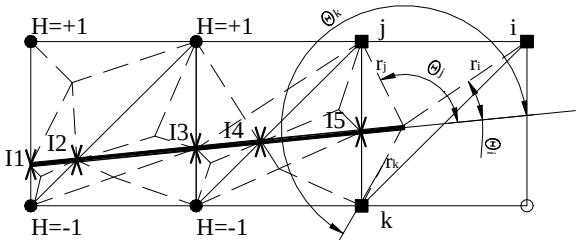
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

برای استفاده از تابع فوق محور Xها را به صورت محلی روی امتداد ترک قرار داده به گونه‌ای که جهت مثبت آن به سمت نوک ترک باشد در این شرایط نقاط بالای محور Xها ($y>0$) دارای H برابر ۱+ و در غیر اینصورت برابر ۱- می‌شود.

غنی‌سازی در گره‌های اطراف نوک ترک از طریق تابع تکینه انجام می‌شود تا بهترین تطبیق را با شرایط واقعی جابه‌جاییهای اطراف نوک ترک پیدا کند. عبارتی که ایجاد حالت تکینه در نقاط اطراف ترک می‌نماید $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$ می‌باشدکه r,θ مختصات قطبی نقاط اطراف نوک ترک در دستگاه مختصات قطبی واقع در نوک ترک است. البته برای افزایش دقت جوابها عبارات دیگری نیز به عبارت مربوط به تکینه‌سازی اضافه می‌شود که این عبارات از رابطهٔ بین جابجاییهای نقاط اطراف نوک ترک برحسب موقعیت آن نقاط و «ضرایب شدت تنش[1]» در نوک ترک به دست می‌آیند که در نهایت تابع‌چهار جمله‌ای به صورت زیر برای غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک‌ترک‌مورد استفاده قرار می‌گیرد[۱۳].

$$[\phi_\alpha,\alpha=1,4]=\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right] \quad (۲)$$

در شکل (۲) تقسیم بندی المانی المانهای ترک خورده و المان نوک ترک نیز مشاهده می‌شود که به واسطه این تقسیم بندی تعدادی المان مثلثی جدید در دو سمت ترک ایجاد می‌گردد که برای به دست آوردن ماتریس سفتی کل المان، مورد استفاده قرار می‌گیرد. مطابق شکل (۲) دو گره بالای ترک با $H=+1$ و دو گره پایین ترک با $H=-1$ غنی می‌شوند و گره i از المانی که نوک ترک درون آن واقع است توسط تابع ϕ و مختصات (r_i,θ_i) غنی می‌شود و گره‌های j و k به ترتیب با (r_j,θ_j) و (r_k,θ_k) درجات آزادی‌شان افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۲. پارامترهای مربوط به غنی‌سازی گره‌های اطراف ترک و اطراف نوک ترک و تقسیم بندی المانهای ترک خورده

۳. روابط حاکم بر غنی‌سازی گره‌ها

پس از تعیین گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی دارند و مشخص نمودن نوع تابع مناسب برای غنی‌سازی آنها، باید با استفاده از مفهوم نظریهٔ تفکیک پیوستگی و اعمال تابع مناسب، ایجاد ناپیوستگی مجازی در محل ترک نمود. این کار از طریق روابط زیر انجام می‌شود[۳].

$$v=\sum_{I=1}^{N}N_I\left(\sum_{J=1}^{M}\psi_J a_J\right) \quad (۳)$$

$$u=\sum_{I=1}^{N}N_I\left(\sum_{J=1}^{M}\psi_J c_J\right) \quad (۴)$$

در روابط فوق v و u جابه‌جاییهای گره به ترتیب در راستای x ، y ، N_I تابع شکل در روش المان محدود استاندارد، $\psi(J)$ توابع غنی‌ساز و a_J ، c_J ضرایب مجهول مرتبط با توابع غنی‌ساز به ترتیب در جهات y و x است که در نهایت توسط این روابط ، ضرایب مجهول a_J ، c_J به درجات آزادی گره‌های اطراف ترک اضافه می‌شوند. در واقع در این روش بر اساس این دو رابطه درجات آزادی گره‌ها افزایش می‌یابد. با توجه به دو نوع تابع غنی‌ساز مشخص شده در قسمت قبل، روابط (۳) و (۴) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$v=\sum_{I=1}^{N}N_I\left[\underbrace{v_I}_{I\varepsilon N}+\underbrace{Ha_I}_{I\varepsilon P}+\sum_{\alpha=1}^{4}\underbrace{\phi_\alpha\quad b_{\alpha I}}_{I\varepsilon Q}\right] \quad (۵)$$

$$u=\sum_{I=1}^{N}N_I\left[\underbrace{u_I}_{I\varepsilon N}+\underbrace{Hc_I}_{I\varepsilon P}+\sum_{\alpha=1}^{4}\underbrace{\phi_\alpha\quad d_{\alpha I}}_{I\varepsilon Q}\right] \quad (۶)$$

در روابط فوق u_I,v_I جابجایی گره I ام به ترتیب در راستای x ، y مربوط به حل المان محدود استاندارد می‌باشد که همهٔ گره‌ها را شامل می‌گردد (مجموعهٔ N). a_I ، c_I ضرایب مجهول مربوط به درجات آزادی افزایش یافته مرتبط با تابع غنی‌ساز پله‌ای واحد به ترتیب در جهات x ، y است که فقط برای گره‌های اطراف المانهای کاملاً بریده شده توسط ترک به کارگرفته می‌شوند (مجموعهٔ گره‌های P). $b_{\alpha I}$ ، $d_{\alpha I}$ ضرایب مجهول نظیر افزایش درجات آزادی مرتبط با تابع غنی‌کنندهٔ تکین به ترتیب در جهات x ، y می‌باشد که فقط برای سه گره اطراف المانی که نوک ترک در آن واقع است (مجموعهٔ Q) به کار گرفته می‌شود.

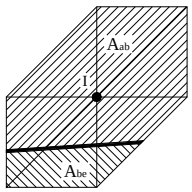
برای قرار گرفتن گره در مجموعهٔ P علاوه بر شرایطی که تا به حال ارائه گردیده، شرط دیگری نیز باید برقرار باشد. وقتی ترک المانی را در دو ناحیه قطع کند و برای گره اطراف آن شرایط غنی‌سازی به روش تابع پله‌ای واحد ایجاد شود، مجموعهٔ المانی اطراف آن گره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. اگر اندازهٔ سطح در یک سمت ترک A_{ab} و در سمت‌دیگر ترک A_{be} و سطح کل مجموعهٔ المانی آن گره A باشد، نسبتهای زیر طبق شکل(۳) قابل‌تعریف است.

$$r_{ab}=\frac{A_{ab}}{A}\quad,\quad r_{be}=\frac{A_{be}}{A} \quad (۷)$$

[1] *Stress Intensity Factors*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

اگر هر یک از نسبتهای r_{ab} یا r_{be} کوچکتر از 10^{-4} باشد، گره I ام مربوط به آن مجموعهٔ المانی از مجموعهٔ گره‌های P حذف می‌شود[۶].



شکل ۳. تقسیم سطح مجموعهٔ المانی مربوط به گره I ام به دو سطح نسبت به موقعیت ترک

۴. استخراج رابطهٔ سفتی برای انواع المان

«انرژی پتانسیل کل[۱]» (Π) در حالت الاستیک از طریق جمع «انرژی کرنشی کل[۲]» سازه (U) و «پتانسیل کار[۳]» حاصل از نیروهای خارجی (متمرکز، سطحی و حجمی) به دست می‌آید [۱۴].

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_v \sigma^T \varepsilon dv - \int_v u^T f dv - \int_s u^T T ds - \sum_i u_i^T P_i \qquad (۸)$$

در رابطهٔ فوق σ تنش، ε کرنش، u جابجایی، f نیروهای حجمی، T نیروهای سطحی و P_i نیروهای متمرکز می‌باشد. در المان محدود استاندارد که حجم، توسط تعدادی المان مدل می‌شود رابطهٔ انرژی پتانسیل کل بر حسب مشخصات المان به صورت زیر ارائه می‌گردد [۱۴].

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2}\int_e \varepsilon^T D \varepsilon t dA - \sum_e \int_e u^T f t dA - \int_L u^T T t dL - \sum_i u_i^T P_i \qquad (۹)$$

$$\Pi = \sum_e U^e - \sum_e (f^e + T^e + P^e) \qquad (۱۰)$$

در رابطهٔ (۹)، D ماتریس تنش- کرنش ماده است که متقارن می‌باشد و در حالت دو بعدی با توجه به نوع تحلیل «تنش صفحه‌ای[۴]» و یا «کرنش صفحه‌ای[۵]» مشخص می‌گردد و t ضخامت المان می‌باشد. در المان محدود استاندارد از طریق رابطهٔ انرژی کرنشی المان می‌توان ماتریس سفتی المان را به دست آورد که به صورت زیر است [۱۴].

$$K_e = t_e A_e [B]^T [D][B] \qquad (۱۱)$$

در رابطهٔ فوق، t_e ضخامت، A_e مساحت و $[B]$ «ماتریس کرنش- جابجایی[۶]» المان است. مساحت هر المان با دترمینان ماتریس ژاکوبین انتقال مختصات (از مختصات عمومی به مختصات ایزو پارامتریک) به صورت زیر ارتباط دارد [۱۴].

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

$$A_e = \frac{1}{2}\left|\det J\right| \qquad (۱۳)$$

اگر گره‌های هر المان در جهت عکس عقربه‌های ساعت با k, j, i مشخص شوند، $\det J$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴].

$$\det J = x_{ik}\, y_{jk} - x_{jk}\, y_{ik} \qquad (۱۴)$$

$$y_{jk} = y_j - y_k \quad , \quad x_{kj} = x_k - x_j \qquad (۱۵)$$

ماتریس $[B]$ از طریق جاگذاری روابط ۵ و ۶ درون رابطه کرنش بر حسب جابجایی (رابطهٔ ۱۶) و استفاده از ماتریس ژاکوبین انتقال و معکوس آن به دست می‌آید [۱۴].

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad , \quad [\varepsilon] = [B]\ [q] \qquad (۱۶)$$

$[\varepsilon]$ کرنش در هر المان و $[q]$ جابجاییهای مربوط به درجات آزادی متناظر گره‌های اطراف هر المان می‌باشد. در المان محدود توسعه یافته نیز پس از تقسیم‌بندی المانهای ترک خورده المانهای مثلثی پیوسته در دو طرف ترک ایجاد می‌شود. لذا می‌توان به صورت مستقیم از رابطهٔ (۱۱) برای یافتن ماتریس سفتی هر المان استفاده کرد، فقط باید با تعیین موقعیت نسبی ترک و المانها، گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی دارند و پارامترهای مورد نیاز جهت غنی‌سازی آنها مشخص گردد و با توجه به معیار غنی‌سازی ارائه شده در قسمت قبل، تأثیر درجات آزادی افزوده شده به آن گره‌ها، در ابعاد ماتریس $[B]$ وارد شود. لذا ابعاد ماتریس $[B]$ نیز تفاوت می‌کند و برای هر نوع گره باید سهم مناسبی در ماتریس $[B]$ در نظر گرفته شود.
اگرگره i نیاز به غنی‌سازی نداشته باشد در حالت دو بعدی ۲ درجهٔ آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس $[B]$ به صورت زیر خواهد بود [۱۵].

[1] *Total Potential Energy*
[2] *Total Strain Energy*
[3] *Work Potential*
[4] *Plane Stress*
[5] *Plane Strain*
[6] *Element Strain-displacement matrix*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$B_i = \frac{1}{\det J}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 \\ 0 & x_{kj} \\ x_{kj} & y_{jk} \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

اگرگره i نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد داشته باشد در حالت دو بعدی ۴ درجهٔ آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس $[B]$ به صورت زیر به دست می‌آید[۱۵].

$$B_i = \frac{1}{\det J}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{jk}H_i & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{kj}H_i \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{kj}H_i & y_{jk}H_i \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

اگرگره i نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع تکین داشته باشد در حالت دو بعدی ۱۰ درجهٔ آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس $[B]$ به صورت زیرخواهد بود [۱۵].

$$a_i = \sqrt{r_i}\sin\frac{\theta_i}{2}, b_i = \sqrt{r_i}\cos\frac{\theta_i}{2}, \quad (۱۹)$$
$$c_i = \sqrt{r_i}\sin\theta_i\sin\frac{\theta_i}{2}, d_i = \sqrt{r_i}\sin\theta_i\cos\frac{\theta_i}{2}$$

$$B_i = \frac{1}{\det J}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{jk}a_i & y_{jk}b_i & y_{jk}c_i & y_{jk}d_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{kj}a_i & x_{kj}b_i & x_{kj}c_i & x_{kj}d_i \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{kj}a_i & x_{kj}b_i & x_{kj}c_i & x_{kj}d_i & y_{jk}a_i & y_{jk}b_i & y_{jk}c_i & y_{jk}d_i \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

بنابراین سهم هر سه نوع کلی گره به طور جداگانه در روش المان محدود توسعه یافته، درون ماتریس [B] به دست آورده شد (روابط ۱۷، ۱۸، ۱۹و۲۰) که با توجه به نوع گره‌های اطراف هر المان می‌توان ماتریس کلی [B] را برای آن المان بدست آورد. البته این امکان وجود دارد که گره‌های اطراف هر المان با توجه به موقعیت نسبی آن المان و ترک از نوعهای مختلف باشد ولی چون تعداد سطرهای ماتریس [B] متناظر با آنها همواره یکسان است لذا به راحتی می‌توان ماتریس کلی [B] مربوط به هر المان را به دست آورد که ابعاد آن می‌تواند از [۶×۳] تا [۳۰×۳] متغیر باشد. سپس از طریق رابطهٔ ۱۱ ماتریس سفتی مربوط به آن المان مشخص می‌گردد که در ماتریس سفتی کل مدل مونتاژ می‌شود.

از جمع ماتریس سفتی تک تک المانهای داخل المان ترک خورده که پس از تقسیم بندی المانی به دست آمده‌اند می‌توان ماتریس سفتی کل المان ترک خورده را به دست آورد.

جمع ماتریسهای سفتی درون المانی مشابه روش مونتاژ ماتریسهای سفتی هر المان در ماتریس سفتی کل می‌باشد که در نهایت تنها سطرها و ستونهای مربوط به نقاط برخورد ترک با اضلاع المانها $(I1, I2, ...)$ از ماتریس سفتی کل المان ترک خورده حذف می‌شود [۱۵].

$$K_e = \sum_S K_S \quad (۲۱)$$

بدیهی است ابعاد ماتریس سفتی المان که وابسته به ابعاد ماتریس [B] می‌باشد از [۶×۶] تا [۳۰×۳۰] می‌تواند متفاوت باشد اما از لحاظ ریاضی به راحتی قابل اثبات است که همواره ماتریس سفتی برای هر نوع المان متقارن خواهد بود که در نتیجه ماتریس سفتی کل سازه نیز متقارن می‌شود [۱۵].

۵. اعمال روش المان محدود توسعه یافته در برنامهٔ کامپیوتر

اصول روش المان محدود توسعه یافته در قسمتهای قبل ارائه شد. در این قسمت چگونگی اعمال آن اصول در قالب یک نرم‌افزار المان محدود توسعه یافته به نام MEXFEM2D جهت تحلیل سازه‌های ترک‌دار دو بعدی توضیح داده می‌شود. این نرم‌افزار برای تحلیل مدلهایی با المانهای مثلثی خطی به زبان Visual - Fortran 6.5 ارائه شده است. قسمتهای اصلی این برنامه به صورت زیر است:

الف) مرحلهٔ «پیش از تحلیل»

۱. ورود اطلاعات به برنامه

۲. تشخیص موقعیت نسبی ترک و المانها

۳. تعیین ماتریس سفتی هر المان و مونتاژ آن در ماتریس سفتی کل سازه

ب) مرحلهٔ «تحلیل»

۱. حل دستگاه معادلات حاصله و تعیین مجهولات گره‌ای

ج) مرحلهٔ «پس از تحلیل»

۱. محاسبهٔ کمیتهای مورد نیاز جهت تعیین پارامترهای نوک ترک

در ادامه هر یک از بخشهای فوق مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

۵-۱. ورود اطلاعات به برنامه

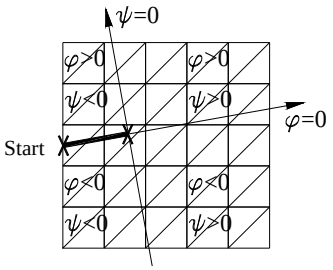
در این قسمت فایل ورودی که با روش خاصی تهیه شده به برنامه معرفی می‌شود و برنامه با توجه به ویژگی ساختاری آن فایل، اطلاعاتی از قبیل هندسهٔ مدل، تعداد گره، تعداد المان، مختصات گره، شمارهٔ هر المان، شمارهٔ محلی و عمومی گره‌ها، شرایط مرزی و بارگذاری را به دست می‌آورد. همچنین مشخصات ترک به دو روش در برنامه قابل تعریف است. روش اول ارائه مختصات نقطهٔ شروع و پایان ترک است و روش دوم مشخص کردن نقطهٔ شروع، طول و زاویهٔ ترک نسبت به محور x + می‌باشد. برای مشخص کردن ترکها در وسط مدل و نیز مدل کردن ترکهایی با فرم منحنی و نیز امکان تعریف ترکهایی در چند ناحیه، این قابلیت در نرم افزار ایجاد شده که بتوان چند ترک را به صورت ورودی در برنامه معرفی نمود.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

۲-۵. تشخیص موقعیت نسبی ترک و المانها

جهت تشخیص موقعیت نسبی ترک و المانها و متعاقب آن تعیین نوع غنی‌سازی مناسب برای آنها از روشهای Level Sets در مرجع [۱۰] و Fast Marching در مرجع [۱۲] استفاده شده است.

در این بخش از برنامه مشخص می‌شود که آیا ترک به صورت کامل المانی را بریده، یا اینکه نوک ترک در داخل المان است و یا کلاً ترک دور از المان می‌باشد و برمبنای آن، نوع غنی‌سازی مناسب برای گره‌های اطراف المان تشخیص داده می‌شود و درجات آزادی گره‌ها افزایش می‌یابد. در این مقاله از روش جدید دستگاه مختصات متعامد محلی نوک ترک $(\phi-\psi)$ استفاده می‌شود [۱۵]. در این روش مطابق شکل ۴ محور $\phi=0$ را در راستای ترک و به سمت خارج از آن و محور $\psi=0$ عمود بر ϕ به صورت راستگرد تعریف می‌شود.

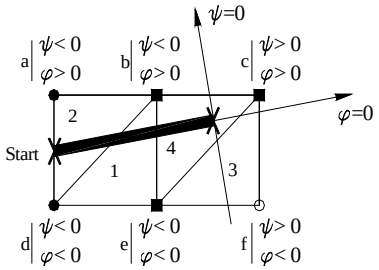


شکل۴. دستگاه مختصات متعامد محلی نوک ترک

مطابق شکل ۴ تمام گره‌های بالای محور $\phi=0$ ، دارای $\phi>0$ و گره‌های پایین محور، $\phi<0$ دارند. همچنین گره‌های سمت چپ $\psi=0$ ، دارای $\psi<0$ و گره‌های سمت راست، دارای $\psi>0$ می‌باشند. با توجه به علامت ϕ و ψ در گره‌های اطراف هر المان می‌توان موقعیت نسبی ترک و آن المان را تشخیص داد. برای هر گره در محدودهٔ اطراف نوک ترک ϕ و ψ محاسبه می‌شود و سپس در هر المان مقدار بیشترین و کمترین مقدار ϕ و ψ تعیین می‌گردد.

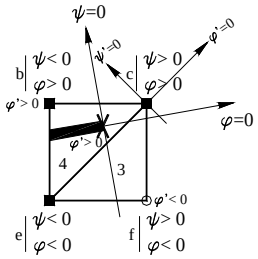
اگر در المانی حاصلضرب $\phi_{\min}.\phi_{\max}\geq 0$ ترک آن المان را قطع نمی‌کند و اگر حاصلضرب $\phi_{\min}.\phi_{\max}<0$ باشد، احتمالاً ترک با المان برخورد می‌کند. جهت تعیین وضعیت به علامت ψ توجه می‌شود.

مطابق شکل ۵ اگر در آن المان $\psi_{\max}$ و $\psi_{\min}\leq 0$ باشد ترک در دو نقطه المان را قطع می‌کند و در نتیجه غنی‌سازی به روش تابع پرشی (پله‌ای) واحد برای افزایش درجات آزادی گره‌های اطراف المان لازم خواهد بود و درجات آزادی از ۲ به ۴ افزایش می‌یابد و اگر $\psi_{\max}$ و $\psi_{\min}\geq 0$ باشد ترک با المان برخوردی نخواهد داشت و اگر حاصلضرب $\psi_{\min}.\psi_{\max}<0$ باشد، نوک ترک احتمالاً درون آن المان قرار گرفته است [۱۵].



شکل ۵. بررسی علامت ϕ و ψ در گره‌های اطراف المانهای ترک خورده

ممکن است دو یا چند المان به طور همزمان شرط آخر را ارضاء کنند و دارای شرایط در برگیرندهٔ احتمالی نوک ترک باشند که در چنین شرایطی برای تشخیص دقیق موقعیت نوک ترک مطابق شکل ۶ پس از شناسایی گره‌های مشترک در المانهای مشخص شده، دستگاه مختصات جدید $(\phi'\text{-}\psi')$ به صورت راستگرد روی یکی از دو گره مشترک شناسایی شده قرار داده می‌شود به طوریکه محور ϕ' در راستای خط واصل بین دو گره مشترک باشد سپس مقادیر ϕ' نوک ترک و گره‌های سوم هر یک از المانها در دستگاه جدید محاسبه می‌شود. علامت ϕ' نوک ترک با علامت ϕ' مربوط به یکی از گره‌های سوم المانها یکسان خواهد بود که در نتیجه نوک ترک در داخل همان المان قرار می‌گیرد. در نهایت تنها یک المان که نوک ترک در آن واقع شده مشخص می‌گردد که گره‌های اطراف آن توسط تابع تکین غنی می‌شود و درجات آزادی آنها از ۲ به ۱۰ افزایش می‌یابد [۱۵].



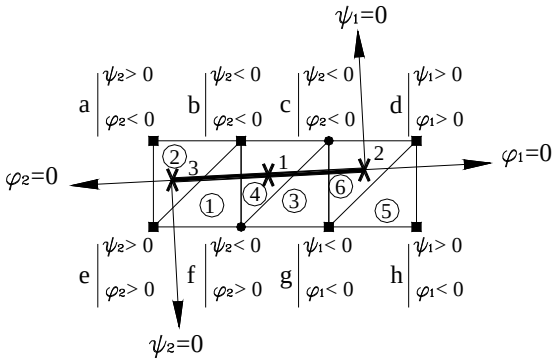
شکل ۶. موقعیت دستگاه مختصات $(\psi'\text{-}\phi')$ جهت تشخیص المان حاوی نوک ترک

با توجه به معیار فوق گره‌های مشترک بین چند المان ممکن است از نظر هر المان درجات آزادی متفاوتی کسب کنند، در این موارد با توجه به اصول‌روش‌المان محدود توسعه‌یافته، بیشترین تعداد درجات‌آزادی برای آن گره در نظر گرفته می‌شود [۶].

مطابق شکل ۷ برای مدل کردن ترکهای غیر مرزی (داخلی)، نقطه‌ای در میان ترک به عنوان نقطهٔ شروع در نظر گرفته می‌شود و سپس دو ترک از آن نقطه به سمت دو طرف تعریف می‌گردد و چون در این حالت دو نوک ترک تعریف شده است لذا دو دستگاه

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

مختصات متعامد محلی در دو نوک ترک در نظر گرفته می‌شود بنابراین دو المان حاوی نوک ترک مشخص می‌گردد. برای هر ترک مرزی یک دستگاه مختصات و برای هر ترک داخلی دو دستگاه مختصات در نظر گرفته می‌شود [۱۵].



شکل ۷. نمایش دو دستگاه مختصات متعامد محلی برای ترک داخلی

در این قسمت پس از یافتن نقاط برخورد ترک با اضلاع المان، تقسیم‌بندی المانی انجام می‌شود سپس با استفاده از رابطهٔ (۱۳) سطح مثلثهای بوجود آمده در هر سمت ترک را محاسبه نموده و از طریق رابطهٔ (۷) و معیار ارائه شده برای نسبت سطوح مجموعهٔ المانی گره در مرجع [۶]، نسبت به غنی‌سازی گره مورد نظر یا عدم غنی‌سازی تصمیم‌گیری می‌شود.

پس از تشخیص وضعیت گره‌ها و افزایش تعداد درجات آزادی آنها، با توجه به روش مناسب برای غنی‌سازی پارامترهای لازم مشخص می‌شود. برای گره‌های ۴ درجهٔ آزادی اگر مقدار $\phi > 0$ باشد مقدار H برابر ۱+ و در غیراینصورت ۱- خواهد بود و برای بقیهٔ گره‌ها H صفر می‌شود. با بدست آوردن مقدار H در گره‌ها می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۱۸) غنی‌سازی مناسب برای گره‌های ۴ درجهٔ آزادی را انجام داد. برای گره‌های ۱۰ درجهٔ آزادی نیز مطابق شکل ۲ فاصله تا نوک ترک (r) و زاویه با امتداد ترک (θ) تعیین می‌شود و از طریق روابط (۱۹ و ۲۰) غنی‌سازی مطلوب برای این گره‌ها انجام می‌گردد. شایان ذکر است که مقدار r و θ برای گره‌هایی که المان آنها حامل نوک ترک نیست برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. در پایان این قسمت تعداد درجات آزادی گره‌ها و پارامترهای مورد نیاز جهت غنی‌سازی آنها مشخص می‌گردد.

۵-۳. تعیین ماتریس سفتی هر المان و مونتاژ آن در ماتریس سفتی عمومی

در این بخش با توجه به تعداد درجات آزادی گره‌ها و پارامترهای به دست آمده از قسمت قبل ماتریس [B] از طریق روابط ۱۷ یا ۱۸ و یا ۱۹ و ۲۰ به دست آورده می‌شود و سپس از طریق رابطهٔ ۱۱ ماتریس سفتی هر المان مشخص می‌گردد. پس از آن جهت مونتاژ این ماتریس در ماتریس سفتی عمومی ارتباطی بین شماره درجهٔ آزادی محلی هر گره از المان و شمارهٔ درجهٔ آزادی عمومی همان گره از المان برقرار می‌شود.

البته جهت برنامه‌نویسی بهتر، در این قسمت براساس روابط ۱۷، ۱۸ ، ۱۹ و ۲۰ یک ماتریس کلی برای [B] ارائه گردیده است که در این ماتریس تمام پارامترهای مربوط به غنی‌سازی به روش تابع پله‌ای واحد و غنی‌سازی از طریق تابع تکین به صورت همزمان گنجانده شده است. بدیهی است که در برنامه، تمام پارامترها برای تمام گره‌ها تعریف می‌شود و اگر نیاز به غنی‌سازی نباشد پارامتر مربوط به آن صفر تعریف می‌گردد و در نتیجه اثر آن از ماتریس [B] حذف می‌شود.

در پایان این قسمت دستگاه معادلات بر اساس روش المان محدود توسعه یافته به فرم کلی [F]=[K][U] به دست می‌آید. [K] ماتریس سفتی کل مدل است که متقارن می‌باشد، [U] ماتریس مجهولات گره‌ای است که در آن، مجهولات مربوط به درجات آزادی استاندارد (جابجایی در جهت y,x هرگره) و درجات آزادی مرتبط با غنی‌سازی هر گره (در صورت وجود) به صورت متوالی قرار گرفته است. [F] نیز ماتریس نیروهای خارجی اعمال شده به گره‌ها می‌باشد [۱۵].

۵-۴. تحلیل دستگاه معادلات حاصله و تعیین مجهولات

در این مرحله ابتدا شرایط مرزی به «روش پنالتی[1]» اعمال می‌شود. در این روش جابجاییهای گره‌ای مشخص (شرایط مرزی) در ماتریس [U] قرار داده شده و سپس متناظر با آن در ماتریس سفتی [K] و ماتریس نیرو [F] تغییرات مناسب ایجاد می‌گردد [۱۴]. پس از آن به «روش حذفی گاوس[2]» دستگاه معادلات حاصله تحلیل می‌شود. در روش حذفی گاوس ابتدا [K] به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌شود و سپس از آخرین مجهول در [U] محاسبات انجام می‌گردد [۱۴].

مجهولات گره‌ای حاصله پس از تحلیل دستگاه معادلات، جابجاییهای استاندارد گره‌ها در جهات y,x و نیز ضرایب مجهول مربوط به توابع غنی‌ساز مناسب (در صورت وجود) می‌باشد که این ضرایب مجهول در روابط (۵) و (۶) وجود داشتند که در پایان این قسمت این ضرایب معلوم شده‌اند.

۵-۵. محاسبهٔ کمیتهای مورد نیاز جهت تعیین پارامترهای نوک ترک

در این قسمت ضرایب مجهول به دست آمده در قسمت قبل درون روابط (۵) و (۶) قرار داده می‌شود تا جابجاییهای گره‌ای در هر جهت مشخص گردد. بدیهی است گره‌هایی که تحت تأثیر توابع غنی‌ساز

[1] *Penalty Approach*
[2] *Gaussian Elimination Method*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

قرار گرفته‌اند تحت تأثیر ضرایب مجهول حاصله و نوع تابع غنی‌ساز، جابه‌جاییهایشان تغییر می‌کند هرچند که پیوستگی المان حفظ شده است به عبارت دیگر همانطور که قبلاً اشاره شد ترک و ناپیوستگی در روش المان محدود توسعه یافته به صورت مجازی مدل می‌شود.

از طریق رابطهٔ $[\varepsilon]=[B][U]$ کرنش در هر المان مثلثی به صورت ثابت به دست آورده می‌شود که در آن [U] ضرایب مجهول معلوم شده مربوط به المان مورد نظر می‌باشد. سپس از طریق رابطهٔ $[\sigma]=[D][\varepsilon]$ تنش ثابت در هر المان مثلثی محاسبه می‌گردد. تنش و کرنش ثابت از ویژگیهای مربوط به المان مثلثی است که در المان محدود کلاسیک نیز به همین صورت می‌باشد (Constant Strain Triangles) [۱۴].

برای تعیین ضرایب شدت تنش نوک ترک به اندازهٔ جابجایی نقاط اطراف نوک ترک در جهات مختلف و یا اندازهٔ تنش در آن نقاط نیاز می‌باشد. البته در صورت استفاده از اندازهٔ جابجاییها، ضرایب شدت تنش (K_I, K_{II}) با دقت بیشتری محاسبه می‌شوند رابطه ضرایب شدت تنش و جابجایی نقطه‌ای اطراف ترک به صورت زیر است [۱۶].

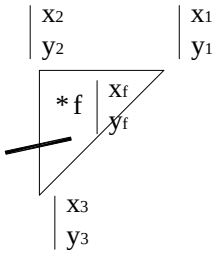
$$u=\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left[\kappa-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]+\frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left[\kappa+1+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \qquad (۲۲)$$

$$v=\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left[\kappa+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]+\frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left[\kappa-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \qquad (۲۳)$$

در روابط فوق u و v جابجایی نقطه‌ای اطراف نوک ترک به ترتیب در جهت x و y می‌باشد، r فاصله آن نقطه تا نوک ترک و θ زاویه نقطه نسبت به امتداد ترک است، K_I ضریب شدت تنش مربوط به حالت I و K_{II} ضریب شدت تنش مربوط به حالت II ترک می‌باشد و μ مدول برشی است و κ به صورت زیر مشخص می‌گردد [۱۶].

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu & ; \quad \text{Plane Strain}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & ; \quad \text{Plane Stress}\end{cases} \qquad (۲۴)$$

برای یافتن جابجایی در جهت x و y (v,u) نقطه‌ای در اطراف نوک ترک مطابق شکل ۸ از یک درونیابی خطی داخل المانی که نقطه در آن واقع است استفاده می‌شود. ابتدا با داشتن مختصات نقطهٔ مورد نظر و مختصات گره‌های اطراف المان، توابع شکل در نقطهٔ مورد نظر به دست آورده می‌شود (Nf_1, Nf_2, Nf_3) سپس طبق رابطهٔ خطی زیر جابجایی گره‌های اطراف المان به نقطه مورد نظر منتقل می‌شود.



شکل ۸. المان مثلثی جهت درونیابی خطی برای یافتن خواص در نقطهٔ f

$$u_f = Nf_1 u_1 + Nf_2 u_2 + Nf_3 u_3 \qquad (۲۵)$$

$$v_f = Nf_1 v_1 + Nf_2 v_2 + Nf_3 v_3 \qquad (۲۶)$$

بدیهی است جابجایی نقاط مختلف اطراف نوک ترک، متفاوت خواهد بود و با وجود تغییر θ, r مربوط به نقاط مختلف نسبت به نوک ترک، K_{II}, K_I حاصل از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول (روابط ۲۲ و ۲۳) یکسان نخواهد بود در نتیجه در این مقاله به دو روش مقدار K_{II}, K_I مربوط به نوک ترک مشخص می‌گردد.

روش اول: در این روش ابتدا با استفاده از روابط درونیابی خطی(۲۵و۲۶)، جابجاییهای دو نقطهٔ I و J در امتداد ترک و پشت آن در دو جهت افقی و عمودی به دست آورده می‌شود. سپس روابط مربوط به جابجاییهای نقاط اطراف نوک ترک (روابط ۲۲ و ۲۳)، برای دو نقطه روی امتداد ترک و پشت آن $(\theta=\pm 180^\circ)$ نوشته می‌شود و با برقراری رابطه بین جابه‌جایی افقی و عمودی نقاط مشخص شدهٔ روی امتداد ترک برحسب فاصله تا نوک ترک (r) دستگاه معادلات دو معادله و دو مجهـــول به صورت زیر حاصل می‌شود که پس از حل آن می‌توان ضرایب شدت تنش را به دست آورد [۱۷]. در واقع در این روش چون امکان محاسبهٔ میزان جابجایی نسبی نوک ترک به صورت مستقیم وجود ندارد لذا از طریق برونیابی با تابع خطی اندازهٔ جابجایی نسبی نوک ترک به دست آورده می‌شود.

$$\begin{cases}\dfrac{|\Delta v_I|}{\sqrt{r_I}} = A + Br_I\\ \dfrac{|\Delta v_J|}{\sqrt{r_J}} = A + Br_J\end{cases} \qquad (۲۷)$$

$$\begin{cases}\dfrac{|\Delta u_I|}{\sqrt{r_I}} = C + Dr_I\\ \dfrac{|\Delta u_J|}{\sqrt{r_J}} = C + Dr_J\end{cases} \qquad (۲۸)$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول (۲۷)، ضرایب مجهول A و B محاسبه می‌شود و به طرز مشابه از دستگاه معادلات (۲۸)، ضرایب C و D به دست آورده می‌شود. K_{II}, K_I نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۷].

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$K_I = \sqrt{2\pi}\,\frac{\mu}{1+\kappa}A \qquad (۲۹)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi}\,\frac{\mu}{1+\kappa}C \qquad (۳۰)$$

روش دوم: این روش مشابه روش اول است با این تفاوت که سه نقطهٔ I ، J و K در امتداد ترک و پشت آن مشخص می‌گردد و با استفاده از رابطه درونیابی خطی جابجاییهای نقاط، به دست آورده می شود. در این حالت رابطه جابجاییهای افقی و عمودی بر حسب r از درجه ۲ در نظر گرفته می شود. با برقراری رابطه بین جابجاییهای عمودی هر یک از سه نقطه، یک دستگاه سه معادله و سه مجهول به صورت زیر حاصل می گردد (روابط شماره ۳۱) که پس از حل آن از قرار دادن ضریب A درون رابطه (۲۹) ضریب شدت تنش K_I حاصل می شود. به همین ترتیب با برقراری رابطه بین جابجاییهای افقی هر یک از سه نقطه، یک دستگاه سه معادله و سه مجهول حاصل می گردد (روابط شماره ۳۲) که پس از حل آن از قرار دادن ضریب C درون رابطه (۳۰) ضریب شدت تنش K_{II} حاصل می شود [۱۵].

$$\begin{cases} \dfrac{|\Delta v_I|}{\sqrt{r_I}} = A + Br_I + Er_I^2 \\ \dfrac{|\Delta v_J|}{\sqrt{r_J}} = A + Br_J + Er_J^2 \\ \dfrac{|\Delta v_K|}{\sqrt{r_K}} = A + Br_K + Er_K^2 \end{cases} \qquad (۳۱)$$

$$\begin{cases} \dfrac{|\Delta u_I|}{\sqrt{r_I}} = C + Dr_I + Fr_I^2 \\ \dfrac{|\Delta u_J|}{\sqrt{r_J}} = C + Dr_J + Fr_J^2 \\ \dfrac{|\Delta u_K|}{\sqrt{r_K}} = C + Dr_K + Fr_K^2 \end{cases} \qquad (۳۲)$$

۶. تحلیل عددی چند سازهٔ ترکدار دو بعدی

ضرایب شدت تنش در نوک ترک در تحلیل سازه‌های ترک‌دار از اهمیت زیادی برخوردارند. از این رو در این قسمت حالتهای مختلف ترک با ابعاد مختلف در صفحه‌ای با ابعاد، بارگذاری و شرایط مرزی مشخص به روش المان محدود توسعه یافته و توسط نرم افزار تخصصی نوشته شده تحلیل می‌گردد و نتایج تحلیل با نتایج حاصل از روابط حل دقیق که از کتابهای مرجع استخراج شده مقایسه می شود و در مورد دقت جوابها در شرایط مختلف بحث می گردد. روابط از مراجع شماره [۱۶ و ۱۸] استخراج شده است.

در تمام حالتها صفحه‌ای به طول 160^{mm}، عرض 70^{mm} و ضخامت 2^{mm} تحت بارگذاری یک جهته در راستای طولی برابر 100^{MPa} قرار گرفته است. مدول الاستیسته جنس ورق $E=200\ GPa$ و ضریب پوآسون $\nu=0.3$ انتخاب شده است. جهت بررسی تأثیر ابعاد المانها و چگونگی مش‌بندی دو نوع مدل با مشهای درشت و ریز ایجاد شده است تا تأثیر ابعاد المان در نتایج روش المان محدود توسعه یافته بررسی شود. مدل با المانهای درشت ۴۲۰ گره و ۷۵۴ المان و مدل با المانهای ریز ۱۲۴۸ گره و ۲۳۴۶ المان دارد که البته درجات آزادی کل مدل بسته به وضعیت ترک متفاوت خواهد بود. المانها از نوع مثلثی خطی به صورت منظم مشابه شکل ۴ می‌باشد. ترکهای مختلفی در مدلها در نظر گرفته شده است که مشخصات آنها به صورت زیر می‌باشد:

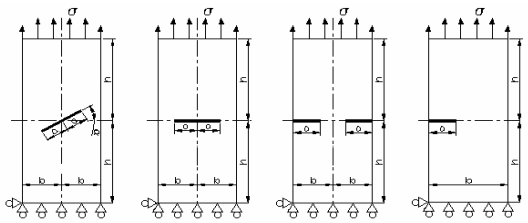
الف) نمونهٔ دارای ترک مرزی یک طرفه[1]

ب) نمونهٔ دارای ترک مرزی دو طرفه[2]

ج) نمونهٔ دارای ترک مرکزی افقی[3]

د) نمونهٔ دارای ترک مرکزی زاویه‌دار[4]

در تمام نمونه‌ها ابعاد، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی ثابت در نظر گرفته می‌شود و فقط با تغییر در ابعاد طولی ترک، تغییرات ضریب شدت تنش و میزان باز شدن ترک بررسی می‌شود. از بررسی این تغییرات در مدلهای مختلف و مقایسهٔ آن با نتایج حاصل از روابط حل دقیق موجود در کتابهای مرجع [۱۶ و ۱۸] نتیجه‌گیری به عمل خواهد آمد. شکل ۹ مشخصات هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی مدلهای مختلف را نشان می‌دهد. نوع تحلیل در همه موارد از نوع تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.



الف. ترک مرزی یک طرفه **ب. ترک مرزی دوطرفه**

ج. ترک مرکزی افقی **د. ترک مرکزی زاویه‌دار**

شکل ۹. مشخصات هندسی، بارگذاری، تکیه‌گاهی و جنس مدلها با انواع ترک

۷. بحث پیرامون نمودارهای حاصل از تحلیل

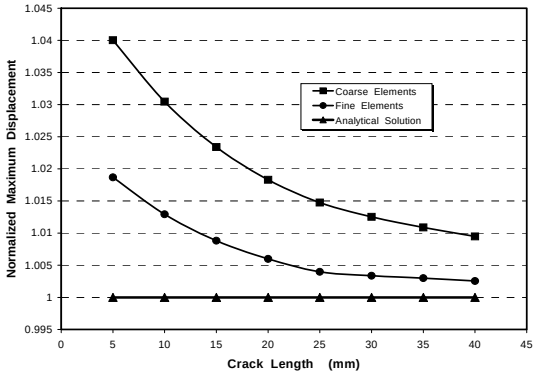
چهار نوع کلی ترک مطابق شکل ۹ در مدلهایی با المانهای درشت و ریز توسط نرم‌افزار المان محدود توسعه یافتهٔ نوشته شده توسط مؤلفین به زبان Visual -Fortron 6.5 به نام MEXFEM2D تحلیل شدند.

در همهٔ موارد، مدل کردن ترک با ورود مشخصات هندسی ترک به سادگی انجام شده است و زمان تحلیل نیز با کامپیوترهای خانگی معمولی کوتاه بوده است (برای مدل با المانهای ریز که ابعاد المانی حدود ۳ میلی‌متر می‌باشد تقریباً ۵ دقیقه). منحنیهای موجود در

[1] *The Single Edge Notch Test Specimen*
[2] *The Double Edge Notch Test Specimen*
[3] *The Center Horizental Cracked Test Specimen*
[4] *The Centre Angled Cracked Test Specimen*

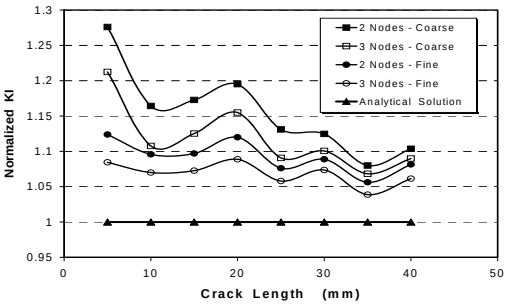
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

نمودارهای زیر براساس نتایج حاصل از تحلیل نرم‌افزار MEXFEM2D و روابط موجود در کتابهای مرجع [۱۶ و ۱۸] رسم شده که مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. نمودارهای ۱ و ۲ مربوط به مدلهای دارای ترک مرزی یک طرفه ، نمودارهای ۳ و ۴ برای مدلهای با ترک مرزی دو طرفه، نمودارهای ۵ و ۶ مربوط به مدلهای با ترک مرکزی افقی و نمودار ۷ مربوط به مدل با ترک مرکزی زاویه‌دار می‌باشد. در تمام نمودارها جهت مقایسهٔ بهتر، نتایج به صورت نرمال شده به کار گرفته شده‌اند که برای محاسبهٔ مقادیر نرمال شده، نتایج حاصل از نرم‌افزار MEXFEM2D بر نتایج حاصل از روابط تحلیلی تقسیم شده‌اند. نمودار ۱ تغییرات بیشترین اندازهٔ باز شدن ترک در لبهٔ آزاد ورق را بر حسب طول ترک نشان می‌دهد که برای مدل با المانهای درشت و ریز به صورت نرمال شده بر مبنای نتایج حاصل از روابط تحلیلی موجود در کتابهای مرجع [۱۶ و ۱۸] ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود دقت نتایج در حد قابل قبولی است (کمتر از ۴ درصد خطا در مدل با المان درشت و حداکثر ۲ درصد خطا در مدل با المان ریز). با ریز شدن المانها دقت افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش طول ترک و زیاد شدن درجات آزادی مدل، نتایج دقیقتر می‌شود.



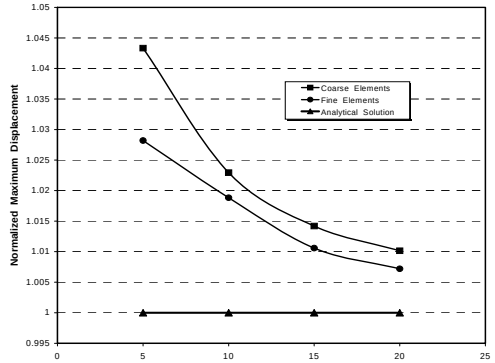
نمودار ۱. بیشترین اندازهٔ باز شدن نرمال شده برای ترک مرزی یک طرفه بر حسب طول ترک

نمودار ۲ تغییرات K_I را بر حسب طول ترک به صورت نرمال شده بر مبنای نتایج روشهای تحلیلی ارائه می‌کند. برای مدلهای با المان ریز و درشت به دو روش ۲ نقطه در پشت ترک و ۳ نقطه در پشت ترک K_I محاسبه شده است که در روش ۳ نقطه در پشت ترک به دلیل اینکه به صورت غیر خطی برونیابی جهت یافتن جابجایی نوک ترک انجام می‌شود و با واقعیت فیزیکی تطبیق بیشتری دارد لذا دقت نتایج این روش بیشتر می‌شود (بین ۱/۵ تا ۶ درصد کاهش خطا). ریز کردن المانها بیش از روش ۳ نقطه در پشت در دقت نتایج مؤثر است و همانطور که مشاهده می‌شود روش ۲ نقطه با المان ریز دقت بیشتری نسبت به المان درشت و روش ۳ نقطه دارد. نکتهٔ دیگر اینکه ریز کردن المانها و انتخاب روش ۳ نقطه در افزایش دقت نتایج در ترکهای با طول کم مؤثرتر است که در نتیجه به خوبی مشاهده می‌شود که در این شرایط پراکندگی جوابها کم می‌شود و نرخ خطا در طولهای مختلف یکنواخت تر می‌شود. بیشترین اندازهٔ باز شدن ترک در لبهٔ آزاد برای مدل با ترک مرزی دو طرفه در نمودار ۳ به صورت نرمال شده نمایش داده شده است. مدلهای با المان ریز دقت بیشتری دارند و با افزایش درجات آزادی، نتایج دقیقتر و پراکندگی کمتر می‌شود.

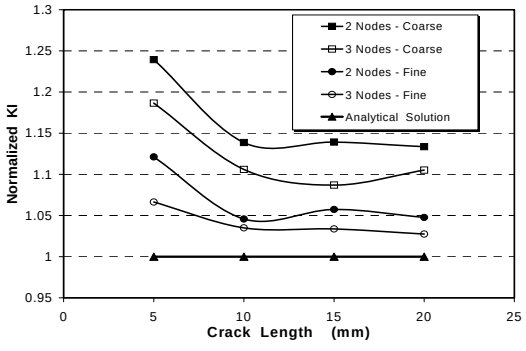


نمودار ۲. منحنی‌های تغییرات K_I نرمال شده برای ترک مرزی یک طرفه بر حسب طول ترک

نمودار ۴ تغییرات K_I نرمال شده را برای مدلهای با المان درشت و ریز به روشهای ۲ نقطه و ۳ نقطه نشان می‌دهد که نتایج آن مشابه نمودار ۲ می‌باشد و با ریز شدن المانها و انتخاب روش ۳ نقطه دقت جوابها افزایش می‌یابد.



نمودار ۳. بیشترین اندازهٔ باز شدن نرمال شده برای ترک مرزی دو طرفه بر حسب طول ترک

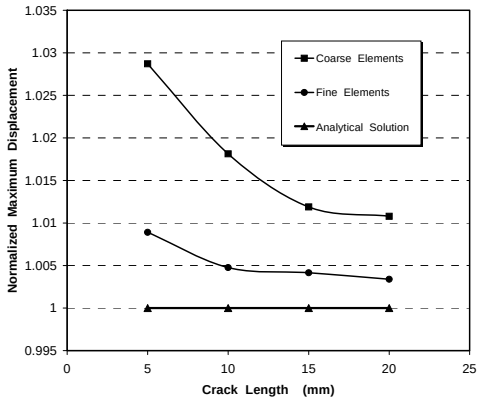


نمودار ۴. منحنیهای تغییرات K_I نرمال شده برای ترک مرزی یک طرفه بر حسب طول ترک

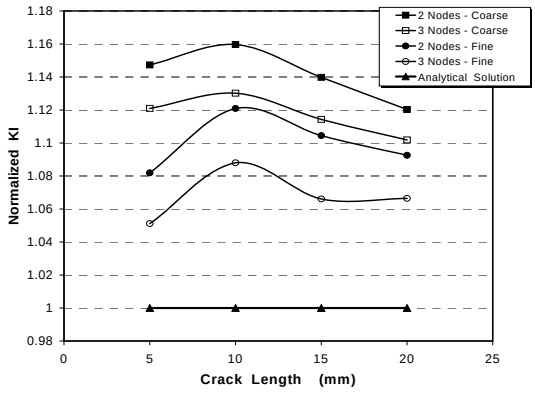
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

نمودار ۵ اندازهٔ بیشترین جابجایی را، در وسط ترک مرکزی افقی بر حسب طول ترک به صورت نرمال شده نشان می‌دهد که با ریز شدن المانها و افزایش طول ترک ، دقت نتایج بیشتر وپراکندگی کمتر می‌شود.

نمودار ۶ نیز مبین این است که با ریز شدن المانها و انتخاب روش ۳ نقطه در نمونهٔ با ترک مرکزی افقی دقت افزایش می‌یابد هرچند که تأثیر ریز شدن المانها در دقت جوابها بیشتر است.



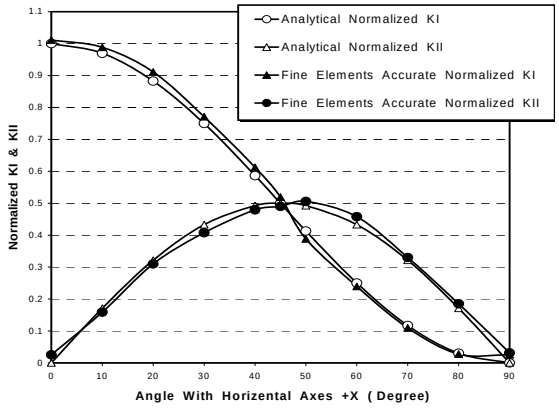
نمودار ۵. بیشترین اندازهٔ باز شدن نرمال شده برای ترک مرکزی افقی بر حسب طول ترک



نمودار ۶. منحنیهای تغییرات K_I نرمال شده برای ترک مرکزی افقی بر حسب طول ترک

جهت حصول اطمینان از نتایج نرم‌افزار MEXFEM2D در حالت ترکیبی شکست، ترک مرکزی زاویه‌دار نیز مدل شده است. البته با توجه به اینکه در نمودارهای قبل دقیق‌ترین نتایج مربوط به مدل با المان ریز و روش سه نقطه در پشت ترک بوده است لذا فقط در همین شرایط و برای ترک با طول ۱۴ میلی‌متر (2a=14)، تحلیل در زوایای مختلف نسبت به محور افق مطابق شکل ۹ انجام شده است که نتایج به صورت نرمال شده بر اساس روابط تحلیلی مرجع [۱۶] ارائه گردیده است.

در نمودار شمارهٔ ۷ نتایج K_I, K_{II} نسبت به K_I در وضعیت ترک مرکزی افقی هم طول آن ترسیم گردیده است. با توجه در این نمودار مشخص می‌شود که در حالت ترکیبی نیز نتایج از دقت خوبی برخوردار بوده و بیشترین خطا کمتر از ۳ درصد بوده است.



نمودار ۷. منحنیهای تغییرات K_I, K_{II} نرمال شده برای ترک مرکزی زاویه‌دار بر حسب زاویه با محور افق

۸. نتیجه گیری

المان محدود توسعه یافته روشی خوب و کارآمد جهت مدل کردن ناپیوستگیهای هندسی از جمله ترک است. از ویژگیهای این روش امکان مدل کردن ترک به سادگی و سرعت تحلیل بالا می‌باشد. بی‌نیازی از بکارگیری المانهای تکین در اطراف نوک ترک و نیز امکان استفاده از المانهای درشت در اطراف ترک از دیگر ویژگیهای این روش است.

استفاده از روش جدید دستگاه مختصات متعامد محلی در نوک ترک جهت تشخیص گره‌های نیازمند غنی‌سازی و تعیین پارامترهای مورد نیاز برای آن مناسب بوده است و اگر اندازهٔ المانها مناسب انتخاب شود با اعمال توابع غنی‌ساز مناسب و افزایش درجات آزادی گره‌ها، جابجاییهای مربوط به آنها با دقت خوبی محاسبه می‌شوند که اگر در این شرایط روش خوبی برای محاسبهٔ K_I, K_{II} در نظر گرفته شود امکان دسترسی به نتایج با دقت خوب فراهم می‌شود. با ریز شدن المانها دقت افزایش می‌یابد البته این موضوع همیشه در تحلیل المان محدود درست است هر چند که المان مثلثی به طور ذاتی نسبت به ابعاد المان حساسیت بیشتری دارد. با افزایش طول ترک و در نتیجه زیاد شدن درجات آزادی مدلها، جابجاییهای گره‌ای دقیقتر محاسبه می‌شوند. از میان روشهای محاسبهٔ K_I, K_{II} روش ۳ نقطه در پشت ترک به دلیل استفاده از برونیابی غیر خطی برای یافتن جابجایی نوک ترک، نسبت به روش ۲ نقطه که به صورت خطی این کار را می‌کند دقیقتر است. ریز کردن المانها نسبت به تغییر روش از ۲ نقطه به ۳ نقطه، در دقت نتایج مؤثرتر است. با ریز شدن المانها و استفاده از روش ۳ نقطه علاوه بر اینکه K_I در تمام

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

طول ترک دقیقتر می‌شود، افزایش دقت بیشتری نیز در دقت نتایج با طول ترک کوتاه مشاهده می‌گردد در نتیجه با توجه به اینکه در ترک با طول کم به طور نسبی، دقت جابجاییهای گره‌ای کم بود بنابراین اثر این دو عامل باعث ایجاد یکنواختی بیشتر وپراکندگی کمتر در نتایج K_I می‌شود.

فهرست علائم

سطح کل مجموعه المانی	A	تابع شکل	N_I
مجموع سطوح المانی بالای ترک	A_{ab}	نیروهای متمرکز	P, P_i
مجموع سطوح‌المانی‌پایین ترک	A_{be}	فاصله گره تا نوک ترک(mm)	r
سطح المان	A_e	نسبت سطح المانی بالای ترک	r_{ab}
طول ترک در مدلهای مختلف	a و 2a	نسبت سطح المانی پایین ترک	r_{be}
ضرایب مجهول (افزاینده درجه آزادی) در تابع غنی ساز کلی	a_J	نیروهای سطحی	T, T^e
ماتریس کرنش-جابجایی	B	ضخامت المان	t, t_e
عرض صفحه‌در مدلهای مختلف	b و 2b	ماتریس مجهولات گره‌ای	U
ضرایب مجهول (افزاینده درجه آزادی)درتابع‌غنی‌سازنوک ترک	$b_{\alpha I}$	انرژی کرنشی المان	U^e
ضرایب مجهول (افزاینده درجه آزادی)در تابع غنی ساز کلی	c_J	جابجایی گره در جهت x	u
ماتریس تنش-کرنش ماده	D	جابجایی گره در جهت y	v
ضرایب مجهول (افزاینده درجه آزادی) درتابع غنی‌ساز نوک ترک	$d_{\alpha I}$	زاویهٔ‌گره تا امتداد ترک درجهت عکس عقربه‌ها (رادیان)	θ
مدول الاستیسیته	E	تابع ۴ جمله‌ای برای غنی سازی نوک ترک	ϕ_α
نیروهای حجمی	f, f^e	توابع غنی ساز	ψ_J
تابع پله‌ای واحد دو مقداره (غنی ساز کلی) (۱+ یا ۱-)	H	انرژی پتانسیل کل	π
طول صفحه در تمام مدلها	2h	تنش	σ
ماتریس ژاکوبین انتقال	J	کرنش	ε
ماتریس سفتی المان وکل مدل	K_e, K	مدول برشی	μ
ضریب شدت تنش ترک در حالت I	K_I	ضریب پوآسون	ν
ضریب شدت تنش ترک در حالت II	K_{II}		

مراجع

[1] Belytshko, T., Lu, YY., Gu, L., *"Element-Free Galerkin Methods"*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.37, 1994, PP. 229-256.

[2] Fleming, M., Chu, YA., Moran, B., Belytshko, T., *"Enriched Element–Free Galerkin Method for Three-Dimensional*", Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, 1997, PP.1483-1504.

[3] Melenk, J.M., Babuska, I., *"The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.139, 1996, PP. 289-314.

[4] Duarte, C.A., Oden, J.T., *"An H-p Adaptive Method Using Clouds"*,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.139, 1996, PP.237-262.

[5] Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T., *"A Fnite Element Method for Crack Growth Without Remeshing*", International Journal for Numerical Methods in engineering Vol.46, No.1, 1999, PP.131-150.

[6] Daux, C., Moes, N., Dolbow, J., Sukumar, N., Belytschko, T., *"Arbitrary Cracks and Holes with the Extended Finite Element Method*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.48, No.12, 2000, PP.1741-1760.

[7] Dolbow, J., "*An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*", Ph.D. Thesis, Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, U.S.A, 1999.

[8] Dolbow, J., Moes, N., Belytschko, T., "*Discontinuous Enrichment in Finite Elements With a Partition of Unity Method"* , Finite Elements in Analysis and Design, Vol.36, 2000a, PP.235-260.

[9] Sukumar, N., Moes, N., Moran, B., Belytschko, T., "*Extended Finite element Method for Three-Dimensional Crack Modeling*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48, No.11, 2000, PP.1549-1570.

[10] Stolarska, M.,Chopp, D.L., Moes, N., Belytschko, T., "*Modeling Crack Growth by Level Sets and the Extended Finite Element Method*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.51, No.8, 2001, PP.943-960.

[11] Sukumar, N., Chopp, D.L., Moes, N., Belytschko, T., *"Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, No. 46, 2001, PP.6183-6200.

[12] Sukumar, N., Chopp, D.L., Moran, B., *"Extended Finite Element Method and Fast Marching Method for Three Dimensional Fatigue Crack Propagation*", Engineering Fracture Mechanics, Vol.70, No.1, 2003, PP. 29-48.

[13] Belytschko, T., Black, T., "*Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, No.5, 1999, PP.601-620.

[14] Chandrupatla, T.R., Belegundu, A.D., *"Introduction to Finite Elements in Engineering"*, Second Edition, Prentice Hall Press, New Jersey, 1997, PP. 1-174.

[15] Pourkamali, Anaraki, A., "*Ph. D. Thesis Report*", November 2003.

[16] Anderson, T.L., "*Fracture Mechanics Fundamentals and*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

Applications", Second Edition, CRC Press USA, 1995.

[17] Ansys, 5.4, Manual, "*POST1-Crack Analysis (KCALC. Command)*", Manual in Help of Ansys Softwere, Part 19.8, 2000, PP. (19-43)-(19-46).

[18] Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G.R., "*The Stress Analysis of Cracks Handbook"*, Third Edition, ASME Press, Professional Engineering Publishing London UK, May 2000, PP. 39-54.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]