نشریه بین‌المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۳، جلد ۱۹، پاییز ۱۳۸۷، صفحه ۳۶-۲۷
ویژه‌نامه مهندسی مکانیک

کنترل فعال ارتعاشات موضعی یک ورق مستطیلی با وصله‌های پیزوالکتریک

مهدی شریف نیا و منصور رفیعیان

چکیده: در این تحقیق کنترل فعال ارتعاشات نقطه دلخواهی از ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده انجام می‌شود. ابتدا حل تحلیلی معادله دیفرانسیل ورق وصله‌دار که در آن برای لحاظ کردن اثرات سختی و جرم وصله‌ها از یک تابع محلی استفاده شده، ارائه می‌شود و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی و مودهای ورق نیز به دست می‌آیند. برای تخمین پاسخ عرضی ورق از ۹ مود اول ورق استفاده می‌شود. سپس با در نظر گرفتن آرایشی مناسب، وصله‌های پیزوالکتریک در اطراف یک نقطه معین از ورق، کنترل ارتعاشات این نقطه انجام می‌شود و امکان کاهش ارتعاش موضعی ورق بدون کاهش ارتعاش کلی ورق نشان داده می‌شود. پتانسیل الکتریکی وصله‌های عملگر توسط اعمال کنترل PID بر پتانسیل الکتریکی القا شده در وصله‌های حسگر، تأمین می‌شود. برای کاهش ارتعاش یک نقطه دلخواه ورق از ۴ وصله استفاده می‌شود و برتری آن نسبت به آرایش متقارن ۹ وصله که ارتعاش کلی ورق را کاهش می‌دهد، با ارائه مثال بررسی می‌شود. نتایج بدست آمده استفاده از روش ارائه شده را تأیید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: کنترل فعال، ورق مستطیلی، ارتعاش موضعی، وصله پیزوالکتریک، PID.

۱. مقدمه

پیشرفت علم و تکنولوژی همواره با مطرح شدن نیازهای جدید همراه بوده است. تحلیل ارتعاشات و امواج صوتی سازه‌ها به عنوان یکی از مهمترین نیازمندی‌ها در سال‌های اخیر مطرح شده است و در نتیجه کنترل فعال ارتعاشات با استفاده از مواد فعال توجه زیادی را به خود جلب کرده است. ماده‌ای که می‌تواند یک یا چند تحریک خارجی مانند فشار، دما، ولتاژ، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و غیره را حس کرده و به آنها پاسخ دهد، ماده فعال نامیده شود. مواد فعال که گاهی مواد هوشمند نیز نامیده می‌شوند به خاطر کاربردهایشان در شاخه‌های مهندسی، اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده‌اند. رایج‌ترین مواد فعال، مبدل‌های پیزوالکتریک هستند که برای کنترل سازه‌های تیر، خرپا، ورق و پوسته به کار می‌روند. یکی از مهمترین سازه‌های کاربردی، سازه ورق است که کاهش ارتعاشات آن اهمیت زیادی در صنعت به خصوص در هوافضا دارد. به عنوان یک مسئله مناسب، کنترل ارتعاشات ورق با تکیه‌گاه‌های ساده همواره مد نظر بسیاری از محققان بوده است.

همچنان که توسط مراجع [۱ ، ۲ ، ۳ و ۴] نشان داده شده، وصله‌های پیزوالکتریک را می‌توان به سطح ماده اصلی وصل کرد و یا اینکه می‌توان در ماده اصلی حک کرد[۵]. در تمام این مدل‌ها فرض معمول آن است که بدون اعمال یک میدان الکتریکی، حضور ماده پیزوالکتریک نمی‌تواند تأثیر قابل توجهی روی ویژگی‌های کلی سازه‌ای داشته باشد. این مراجع کاهش ارتعاشات کل سازه ورق را به عنوان هدف نهایی خود قرار داده‌اند.

بررسی کرنش القایی برای یک ورق لایه‌ای کامپوزیتی در[۶] با استفاده از تئوری ورق لایه‌ای کلاسیک توسعه داده شده است. کرنش القا شده مربوط به عملگرهای پیزوالکتریک مجزا به کرنش کل افزوده می‌شود و توزیع یکنواخت این وصله‌های عملگر در سرتاسر لایه با استفاده از یک تابع پله‌ای به حساب آورده می‌شود. مراجع [۷] و [۸] کنترل یک سازه ورق با تکیه‌گاه ساده را با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک مجزا بررسی کرده‌اند. در این کار محاسبه پاسخ ورق بر حسب مودها و کنترل ورق با استفاده از روش بسط مودال انجام می‌شود و گشتاورهای کنترلی معادل به دست

این مقاله درتاریخ ۸۳/۵/۱۰ دریافت و در تاریخ ۸۴/۱۱/۶ به تصویب نهایی رسیده است.

مهدی شریف‌نیا، کارشناسی‌ارشد مهندسی مکانیک دانشگاه یزد
sharifnia.mehdi@gmail.com
دکتر منصور رفیعیان، استادیار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه یزد
rafeeyan@yazduni.ac.ir

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

می‌آیند. نویسندگان از تئوری ورق سنتی استفاده کرده‌اند و اثرات سختی و جرم مربوط به قطعه پیزوالکتریک را در تخمین مشخصات دینامیکی ورق نادیده گرفته‌اند. همچنین وصله‌ها به طور یکنواخت توزیع شده و کاهش ارتعاش چند نقطه به عنوان نماینده‌ای از ارتعاش کل ورق نشان داده شده است. بسیاری از محققان از این مدل تحلیلی برای کاربردهای مختلف قطعات پیزوالکتریک از قبیل کنترل تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها استفاده کرده‌اند.

برای وصله‌های پیزوالکتریک مجزای متصل‌شده به سازه‌های تیر و ورق، محققان بیشتر از روش‌های عددی مثل روش اجزا محدود استفاده کرده‌اند. به دست آوردن جواب دقیق برای این نوع از سازه‌ها مشکل است. بنابراین روش اجزا محدود روشی مناسب برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی چنین سازه‌هایی است.

در مرجع [۳] یک المان آجری[1] سه‌بعدی برای مطالعه پاسخ دینامیکی توسعه داده شده اما خطاهایی در این مدل‌کردن وجود داشته است.

در مرجع [۹] از یک المان چهار ضلعی چهار گره‌ای استفاده شده و مرجع [۱۰] یک المان محدود انعطاف‌پذیر برشی را برای مطالعه دینامیک ورق لایه‌ای با حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک گسترش داده است. مرجع [۱۱] یک المان گذار[2] را گسترش داده تا در محدوده پیزوالکتریک به المان‌های جامد[3] وصل شود و از المان‌های پوسته مسطح[4] برای ورق استفاده کرده است.

در این تحقیق جایگذاری مناسب وصله‌ها برای بهینه‌تر بودن کنترل‌کننده‌ها نیز بررسی شده اما در نهایت استفاده از ۵ وصله در کنترل ۸ مود اول میسر نشده است. مرجع [۱۲] کنترل فعال سازه-های لایه‌ای کامپوزیتی که دارای لایه‌ها یا وصله‌های پیزوالکتریک هستند را به روش اجزا محدود انجام داده است. در این مرجع یک المان محدود بر اساس تئوری سنتی کیرشهف[5] توسعه داده شده است. در مراجع [۱۳] و [۱۴] یک فرمول‌بندی اجزا محدود برای کنترل فعال ورق ضخیم به ترتیب در ارتعاشات آزاد و اجباری ارائه شده است.

در مراجع اخیر نیز کنترل ارتعاش کل ورق مد نظر بوده است. در مرجع [۱۵] یک فرمول‌بندی برای حل کنترل ارتعاش ورق‌های نازک با استفاده از قطعات حسگر و عملگر پیزوالکتریک ارائه می‌شود. روش حل، تبدیل مسئله کنترل پیزوالکتریک به یک معادله انتگرالی بوده و بدین وسیله ناپیوستگی مسئله لحاظ شده و فرکانس‌های طبیعی به دست آمده‌اند. در این مرجع تنها فرکانس‌های طبیعی ورق هوشمند محاسبه شده و برای حل معادله روشی ارائه نشده است.

مرجع [۱۶] با استفاده از تئوری سنتی ورق به مدل‌سازی وصله‌های حسگر و عملگر پرداخته و معادله دیفرانسیل ورق با یک وصله حسگر و عملگر را به دست آورده است اما در این مرجع حل این معادله دیفرانسیل و کنترل فعال ورق انجام نشده است.

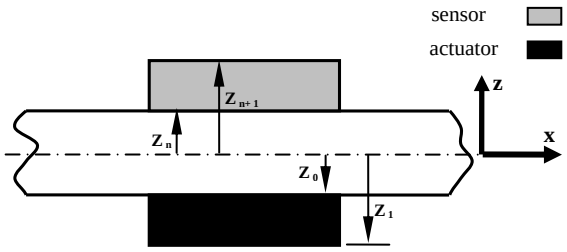
همانطور که مشاهده شد در کارهای گذشته نویسندگان در کنترل فعال سازه ورق، کاهش ارتعاش کل سازه مورد نظر بوده است و اغلب برای کاهش ارتعاش ورق از تعداد زیادی وصله پیزوالکتریک استفاده کرده‌اند. هر چند تعدادی از محققین تعداد وصله‌های حسگر و عملگر را کم کرده‌اند (مثل مرجع [۱۱]) اما نه تنها موفق به پایدارسازی مودهای اولیه (چند مود اول) نشده‌اند بلکه همواره کاهش ارتعاش کل ورق را مد نظر داشته‌اند.

در این تحقیق کاهش ارتعاش یک نقطه خاص از ورق بررسی می‌شود. گاهی ممکن است کاهش ارتعاش نقطه خاصی از ورق برای طراح مهمتر باشد. به عبارت دیگر ممکن است لازم نباشد که همه نقاط ورق با سرعت یکسانی کنترل شوند. این حالت ممکن است زمانی رخ دهد که به عنوان مثال کنار این نقطه معین دستگاه حساسی قرار داشته باشد.

در این تحقیق هدف آن است که با چیدمان مناسب وصله‌ها ارتعاش نقطه مورد نظر اولاً زودتر از همان نقطه در توزیع یکنواخت وصله‌ها در کل ورق کاهش داده شود. ثانیاً کنترل ورق با تعداد وصله‌های کمتر و در نتیجه مصرف انرژی کمتر انجام گیرد. برای نیل به این هدف، کارایی چیدمان دایره‌ای وصله‌ها در اطراف نقطه مورد نظر که پیشنهاد اصلی این تحقیق است، بررسی می‌شود.

۲. حل معادله دیفرانسیلی حرکت ورق هوشمند

شکل (۱) یک سازه هوشمند را نشان می‌دهد که قطعه حسگر و عملگر پیزوالکتریک روی آن متصل شده‌اند.



شکل ۱. وصله پیزوالکتریک متصل به سطح

قطعات پیزوالکتریک در جهت ضخامت قطبی می‌شوند و سطوح اصلی آنها به وسیله الکترودهای با ضخامت ناچیز پوشیده می‌شوند. صفحه z=0 صفحه میانی ورق را نشان می‌دهد. با استفاده از تئوری سنتی ورق معادله دیفرانسیلی حرکت ورق وصله‌دار از مرجع [۱۶] با اعمال تغییراتی به صورت زیر به دست می‌آید:

[1]. *brick element*
[2]. *transition element*
[3]. *solid elements*
[4]. *flat-shell elements*
[5]. *Kerchief*

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$
\begin{aligned}
-D\nabla^4 w = \overline{\rho} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \; - q(x,y,t) \\
+\sum_{j=1}^{N_p} \{ \sum_{i=a,s} D^i \{ (\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4})^i R \\
+ 2(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2})^i R_x + 2(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3})^i R_y \\
+ (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \upsilon \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^i R_{xx} + (\upsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^i R_{yy} \\
+ [2(1-\upsilon)(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^i] R_{xy} \} \; \}^j \\
- \sum_{j=1}^{N_p} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(e_{31} V^a h_m^a R)^i
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

که در آن R تابع محلی است که بر حسب تابع پله‌ای U بـه صـورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
R(x,y) &= [U(x+a) - U(x-a)][U(y+b) - U(y-b)] \\
&= 1 \;\; ; \;\; -a < x < a \,, \; -b < y < b \\
&= 0 \;\; ; \;\; in \;\; other \text{ points}
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

و همچنین $R_x = \partial R / \partial x$ ، $R_y = \partial R / \partial y$ ، $R_{xx} = \partial^2 R / \partial x^2$ ، $R_{yy} = \partial^2 R / \partial y^2$ و $R_{xy} = \partial^2 R / \partial x \partial y$ هستند.

این معادله دیفرانسیل را مانند هر معادله دیفرانسیل دیگر می‌توان در دو حالت همگن و ناهمگن حل کرد.

۲-۱. حل همگن معادله دیفرانسیل حرکت

در ابتدا معادله دیفرانسیل (۱) برای حالتی که هیچگونه تحریک خارجی (ازجمله تحریک عملگر) وجود ندارد در شرایط تکیه‌گاهی ساده حل می‌شود تا فرکانس‌های طبیعی ومودشیپ‌های ورق با وصله‌های پیزوالکتریک به دست آید.

شرایط تکیه‌گاهی برای ورق با تکیه‌گاه ساده به صورت زیر ساده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad @ \; x = 0 \,, \; x = l_x \\
w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad @ \; y = 0 \,, \; y = l_y
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

اکنون برای حل معادله (۱) از روش آنالیز مودال (جداسازی متغیرها) استفاده می‌شود یعنی جواب w به صورت $w = A(x,y)T(t)$ فرض می‌شود. اما با علم بر شرایط تکیه‌گاهی می‌توان تابع $A(x,y)$ را به صورت سری فوریه دوگانه سینوسی فرض کرد. همچنین برای حرکت نوسانی تابع $T(t)$ به صورت $e^{\omega t}$ در نظر گرفته می‌شود. پس عبارت w را می توان به صورت زیر نوشت:

$$
w = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{A_{mn}} \sin(\frac{\mathrm{m}\pi \mathrm{x}}{\mathrm{l_x}}) \sin(\frac{\mathrm{n}\pi \mathrm{y}}{\mathrm{l_y}}) \, \mathrm{e}^{\omega t}
\qquad (۴)
$$

در روش آنالیز مودال مقصود یافتن جواب‌هایی است که در آنها تمام نقاط با فرکانس یکسان ارتعاش کنند یعنی در یک زمان همگی دارای ماکزیمم دامنه و در یک زمان دیگر همگی دارای دامنه صفر باشند.

حال عبارت w از معادله (۴) در معادله دیفرانسیل (۱) قرار داده می‌شود. سپس طرفین معادله در عبارت $\sin(p\pi x / l_x) \sin(q\pi y / l_y)$ که $q=1,\ldots,N$ و $p=1,\ldots,M$ ضرب شده و از طرفین معادله در محدوده‌ی $0 \le x \le l_x$ و $0 \le y \le l_y$ انتگرال گرفته می‌شود. دستگاه معادلات خطی به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$
[C_t]\{A\} = \{0\}
\qquad (۵)
$$

که در آن بردار $\{A\}$ برابر با $[A_{11}\ A_{12} \ldots A_{MN}]^T$ و ماتریس $[C_t]$ یک ماتریس مربعی $MN \times MN$ است. از آنجا که ضرایب A_{mn} نمی‌توانند همگی صفر باشند بنابراین برای آنکه دستگاه فوق جواب غیر صفر داشته باشد باید دترمینان ماتریس $[C_t]$ برابر با صفر باشد. ماتریس $[C_t]$ شامل پارامتر ω^2 است و با صفر قرار دادن دترمینان آن مقادیری برای ω به دست می‌آید که همان فرکانس‌های طبیعی هستند. ماتریس $[C_t]$ را می‌توان به دو ماتریس دیگر تحت عنوان سختی و جرم تجزیه کرد به طوریکه اولی شامل اعداد ثابت و دومی شامل پارامترهای ω^2 خواهد بود. یعنی:

$$
[C_t] = [K] + \omega^2 [M]
\qquad (۶)
$$

اکنون می‌توان پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی و مودشیپ‌ها را به مسئله مقادیر ویژه تبدیل کرد:

$$
[C_t]\{A\} = [K]\{A\} + \omega^2 [M]\{A\} = 0
\qquad (۷)
$$

با ضرب طرفین معادله فوق در ماتریس $[-M]^{-1} = -[M]^{-1}$ نتیجه می‌شود که:

$$
[-M]^{-1}[K]\{A\} = \omega^2 \{A\}
\qquad (۸)
$$

معادله اخیر مسئله مقدار ویژه برای ماتریس $[Z] = [-M]^{-1}[K]$ است. بنابراین مقادیر ویژه ماتریس $[Z]$ همان مجذور فرکانس‌های طبیعی و بردارهای ویژه آن همان امتدادهای ویژه برای بردار $\{A\}$ خواهد بود. با داشتن بردارهای ویژه $\{A\}$ مودشیپ‌های سیستم طبق معادله (۴) برای ورق با تکیه‌گاه ساده تعیین می‌شوند.

در حالتی که اثرات عملگر (V^a) به معادله اضافه شود با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[C_t]$ می‌توان قطب‌های سیستم را به دست آورد.

۲-۲. حل ناهمگن معادله دیفرانسیل حرکت

بعد از معلوم شدن بردارهای ویژه $\{A\}^i$ توابع مودشیپ ورق وصله‌دار یعنی z_1 و z_2 و ... و $z_{M \times N}$ که دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده است به

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$z_i = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}^{i} \sin(\frac{m\pi x}{l_x})\sin(\frac{n\pi y}{l_y}) \quad (۹)$$

اگر پاسخ کلی ورق به صورت $w(x,y,t)$ باشد آنگاه ضرایب $E_1(t)$ و $E_2(t)$ و ... و $E_{M\times N}(t)$ وجود دارند به طوریکه:

$$\begin{aligned} w(x,y,t) &= E_1(t)\, z_1 + E_2(t)\, z_2 + \ldots + E_{M\times N}(t)\, z_{M\times N} \\ &= \sum_{i=1}^{M\times N} E_i(t)\, z_i \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با استفاده از رابطه فوق به حل معادله دیفرانسیل ناهمگن پرداخته می‌شود. طبق مرجع [۱۶] اختلاف پتانسیل الکتریکی القا شده در حسگر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V^s = \frac{-h^s h_m^s e_{31}}{\xi_{33}}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \quad (۱۱)$$

با قرار دادن w از معادله (۱۰) در معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$V^s = \frac{-h^s h_m^s e_{31}}{\xi_{33}} \sum_{i=1}^{M\times N} E_i(t)\left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}\right) \quad (۱۲)$$

اکنون از طرفین معادله دیفرانسیل (۱) نسبت به زمان t تبدیل لاپلاس گرفته می‌شود، بنابرین این معادله دیفرانسیل از حوزه زمان t به حوزه s (میدان s) منتقل می‌شود. پس $w(x,y,s)$ از عبارت زیر در معادله دیفرانسیل قرار داده می‌شود:

$$\begin{aligned} w(x,y,s) &= E_1(s)\, z_1 + E_2(s)\, z_2 + \ldots + E_{M\times N}(s)\, z_{M\times N} \\ &= \sum_{i=1}^{M\times N} E_i(s)\, z_i \end{aligned} \quad (۱۳)$$

اما ولتاژ اعمال شونده به عملگر j ام یعنی V_j^a بر حسب ولتاژ جفت حسگر آن یعنی V_j^s نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} V_j^a(s) &= C_j(s) V_j^s(s) \\ &= \frac{-h^s h_m^s e_{31}}{\xi_{33}} \sum_{i=1}^{M\times N} C_j(s) E_i(s)\left(\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \quad (۱۴)$$

که $C_j(s)$ تابع انتقال کنترل‌کننده j ام را نشان می‌دهد. اکنون با قرار دادن معادله‌های (۱۳) و (۱۴) در معادله دیفرانسیل (۱)، معادله‌ای بر حسب مجهولات $E_i(t)$ به دست می‌آید. حال زمان آن رسیده که از تعامد مودشیپ‌های z_i استفاده شود. پس طرفین معادله در مودشیپ i ام یعنی z_i که $i=1,2,\ldots,M\times N$ ضرب شده و در میدان $0<x<l_x$ و $0<y<l_y$ انتگرال‌گیری می‌شود. بنابراین تابعیت معادله دیفرانسیل و از جمله بار خارجی $q(x,y,s)$ ، نسبت به x و y از بین می‌رود و فقط تابعیت s باقی می‌ماند. پس دستگاه معادلات به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$[C_t(s)]\{E(s)\} = \{F(s)\} \quad (۱۵)$$

که بردار $\{F(s)\}$ تحت تأثیر تبدیل لاپلاس و سپس ضرب در z_i و سپس انتگرال‌گیری از تابع بار خارجی $q(x,y,t)$ به وجود آمده است:

$$F_i(s) = \int_0^{l_x}\int_0^{l_y}\left(z_i \left(\int_0^{\infty} q(x,y,t)\, e^{-st}\, dt \right)\right) dxdy \quad (۱۶)$$

با حل معادله (۱۵) مجهولات $E_i(s)$ محاسبه می‌شوند و با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس مجهولات $E_i(t)$ بر حسب زمان t محاسبه می‌شوند. با به دست آمدن مجهولات $E_i(t)$ با استفاده از معادله (۱۰) عبارت جابجایی کلی w برای ورق با وصله‌های پیزوالکتریک به دست می‌آید.

در هنگام تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله (۱) شرایط اولیه نیز ظاهر می‌شوند یعنی می‌توان از این روش برای تحلیل ارتعاش آزاد نیز استفاده کرد.

۳. کنترل سیستم با استفاده از وصله‌های کمتر

با استفاده از ۹ جفت وصله پیزوالکتریک می‌توان برای ۹ مود اول جایدهی دلخواه قطب انجام داد (شرط لازم و کافی). به عبارت دیگر ۹ جفت وصله برای کنترل ۹ مود اول کافی است. اما لازم نیست که برای کنترل ۹ مود از ۹ جفت وصله استفاده شود بلکه همان‌طور که در ادامه گفته می‌شود می‌توان با تعداد وصله‌های کمتر نیز ۹ مود اول را کنترل کرد. هنگامی که کاهش ارتعاشات تمام نقاط ورق از اهمیت یکسانی برخوردار باشد، استفاده از آرایش متقارن وصله‌ها و توزیع یکسان ضرایب کنترل‌کننده مناسب است. اما در حالتی که کاهش ارتعاش منطقه خاصی از ورق مدنظر باشد مسلماً توزیع یکنواخت ضرایب کنترل‌کننده مناسب نیست بلکه باید ضرایب کنترل‌کننده در منطقه مورد نظر افزایش یابند تا به آن منطقه از ورق نیروهای کنترلی بیشتری وارد شود.

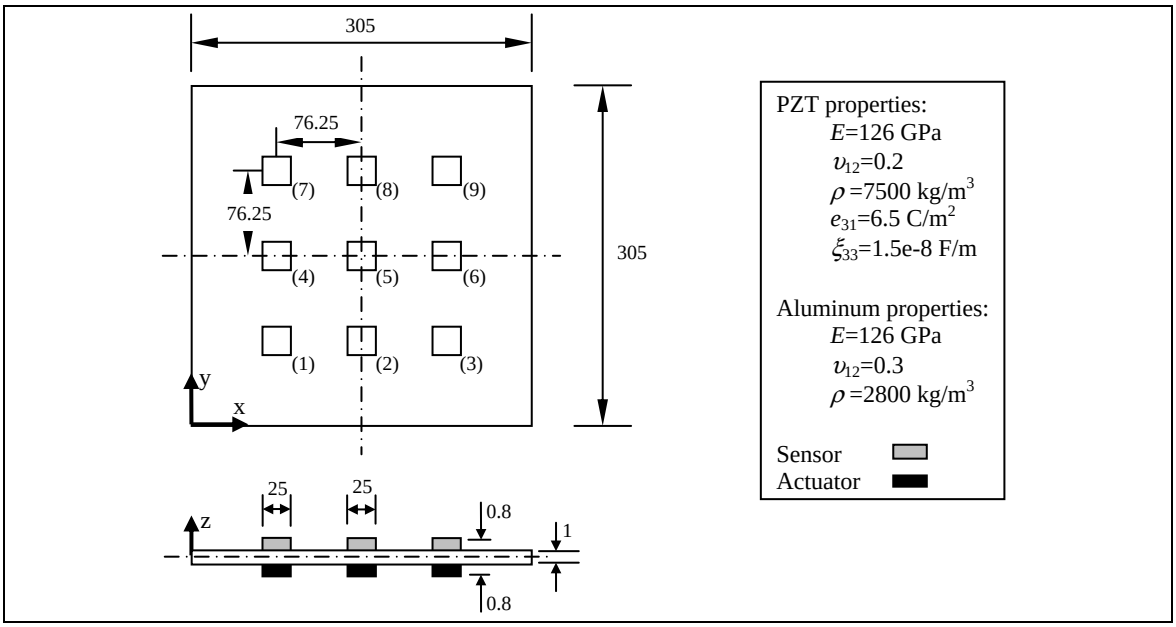
تمرکز ضرایب کنترل‌کننده در منطقه خاصی از ورق باعث می‌شود که اثر وصله‌های سایر مناطق ورق که دارای ضرایب کنترل‌کننده کمتری هستند، کاهش یابد. بنابراین می‌توان از اثرات کنترلی این وصله‌ها صرف نظر کرده و آنها را حذف کرد. پس برای آنکه ارتعاش نقطه خاصی از ورق زودتر کاهش داده شود چهار وصله روی دایره‌ای با شعاع معین و با زاویه یکسان نسبت به هم در اطراف این نقطه قرار داده می‌شوند. البته توجه شود که در این تحقیق نمی‌خواهیم اثرات تغییر شعاع و زاویه را بررسی کنیم بلکه هدف آن است که با تمرکز وصله‌ها در اطراف نقطه‌ای خاص ارتعاش آن نقطه زودتر کاهش یابد. در این حالت مهمترین مسئله آن است که با این چهار وصله بتوان تمام مودهای ورق را پایدار کرد. مسلماً وقتی که تعداد جفت وصله‌ها کمتر می‌شود دیگر آن محدوده پایداری قبل وجود ندارد. یعنی به ازای مقادیر خاصی از ضرایب کنترل‌کننده می‌توان

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

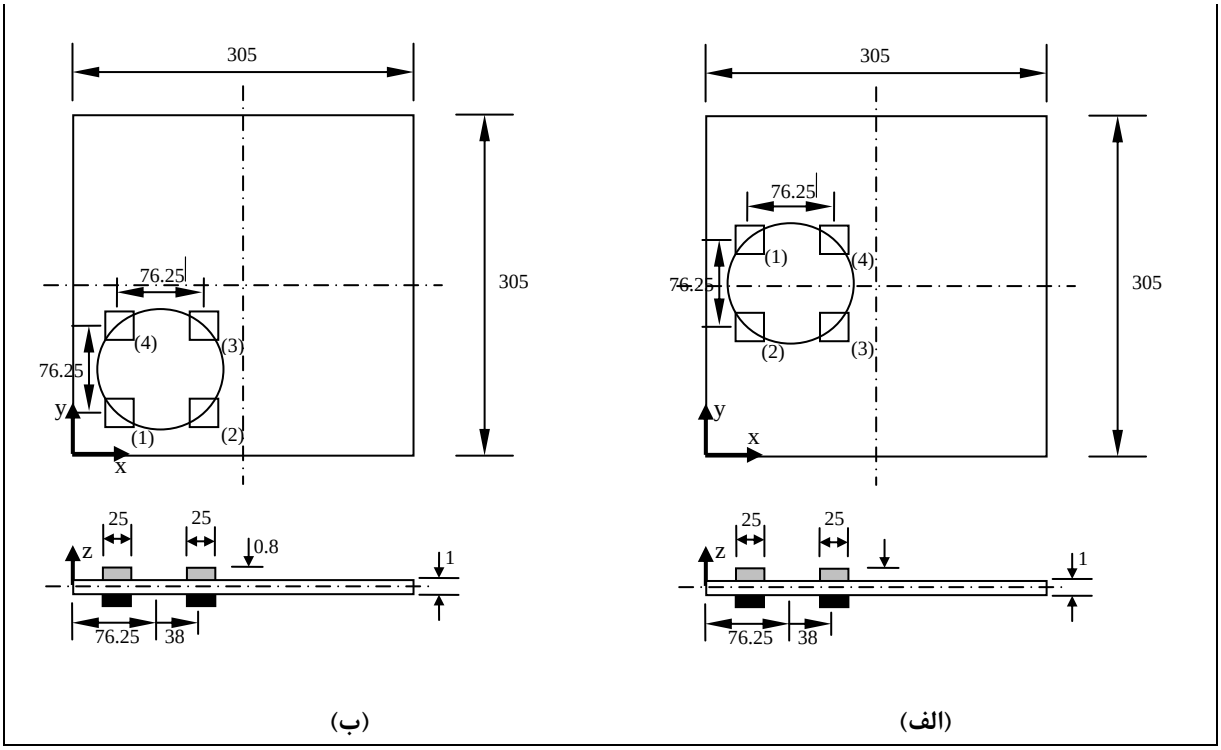
پایداری کل سیستم را ایجاد کرد. اما پس از ایجاد پایداری انتظار می‌رود که به ازای ضرایب مناسب کنترل‌کننده بتوان ارتعاش این نقطه را زودتر کاهش داد. در شکل (۲) آرایش متقارن ۹ وصله و همچنین مشخصات وصله‌های PZT و ورق آلومینیومی با تکیه‌گاه‌های ساده نشان داده شده است.

در شکل (۳) دو آرایش با تعداد جفت وصله‌های ۴ تایی نشان داده شده‌اند. در شکل (۳- الف) وصله‌ها با شعاع $0.1768(l_x)$ در اطراف نقطه $(l_x/4\ ,\ l_y/2)$ قرار گرفته‌اند و در شکل (۳- ب) وصله‌ها با شعاع $0.1768(l_x)$ در اطراف نقطه $(l_x/4\ ,\ l_y/4)$ قرار گرفته‌اند.

در سیستم شکل‌های (۳- الف) و (۳- ب) به ازای ضرایب کنترل‌کننده نشان داده شده به ترتیب در جدول‌های (۱) و (۲)، قطب‌های سیستم در سمت چپ محور موهومی قرار می‌گیرند. پس با تعداد وصله‌های کمتر نیز می‌توان پایداری سیستم را ایجاد کرد.



شکل ۲. ورق با تکیه‌گاه ساده در حالت با ۹ وصله پیزوالکتریک



شکل ۳. آرایش ۴ تایی وصله‌ها در اطراف نقطه الف) $(\frac{l_x}{4},\frac{l_y}{2})$ ب) $(\frac{l_x}{4},\frac{l_y}{4})$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

جدول ۱. یک حالت از ضرایب که باعث پایداری آرایش شکل (۳- الف) می‌شود

-8.77 ± 427.74 i	مود ۱و۱	ضرایب کنترل‌کننده	
-92.42 ± 1007.77 i	مود ۲و۱		
-0.09 ± 1215.33 i	مود ۱و۲		
-174.49 ± 1883.54 i	مود ۱و۳	$G_p(1)=G_p(2)=$ -28	$G_d(1)=G_d(2)= 1\times10^{-4}$
-2.38 ± 1979.89 i	مود ۲و۲		
-19.02 ± 2181.95 i	مود ۳و۱		
-46.18 ± 2783.33 i	مود ۳و۲	$G_p(3)=G_p(4)=$ 42	$G_d(1)=G_d(2)= -9\times10^{-3}$
-57.26 ± 2945.20 i	مود ۲و۳		
-76.56 ± 4568.34 i	مود ۳و۳		

جدول ۲. یک حالت از ضرایب که باعث پایداری آرایش شکل (۳- ب) می‌شود

-35.89 ± 350.98 i	مود ۱و۱	ضرایب کنترل‌کننده	
-39.76 ± 793.28 i	مود ۲و۱		
-7.82 ± 1285.46 i	مود ۱و۲		
-16.01 ± 1618.65 i	مود ۳و۱	$G_p(1)=$ -10	$G_d(1)=$ 0.004
-1.16 ± 1639.58 i	مود ۲و۲		
-61.50 ± 2000.35 i	مود ۱و۳	$G_p(2)=G_p(4)=$ -90	$G_d(2)=G_d(4)=$ 0.0055
-6.39 ± 2545.63 i	مود ۲و۳		
-49.74 ± 2836.28 i	مود ۳و۲	$G_p(3)=$ -60	$G_d(3)=$ 0.01
-4.69 ± 5148.50 i	مود ۳و۳		

۴. مقایسه نتایج کنترل با ۴ و ۹ وصله

در این قسمت سیستم شکل (۳- الف) به خاطر برآورده کردن هدف مطرح شده در مقدمه برای نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در نظر گرفته می‌شود. یعنی هدف آن است که جابجایی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ اولاً زودتر از همین نقطه در آرایش ۹ تایی و ثانیاً زودتر از نقطه $(3l_x/4, l_y/2)$ در آرایش ۴ تایی، کاهش یابد (توجه شود که نقطه $(3l_x/4, l_y/2)$ قرینه نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ نسبت به نقطه وسط ورق است). برای بررسی و مقایسه عملکرد سیستم‌های شکل (۲) و شکل (۳- الف) دو مسئله به صورت زیر مطرح می‌شود:

مسئله ۱- مطلوب است بررسی حرکت ارتعاشی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در سیستم‌های شکل (۲) و شکل (۳- الف) تحت تأثیر بار پله گسترده $q(x,y,t)=U(t)\ \ N/m^2$ و شرایط اولیه صفر.

مسئله ۲- مطلوب است بررسی حرکت ارتعاشی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در سیستم‌های شکل (۲) و شکل (۳- الف) تحت تأثیر بار متمرکز $F(t)=1\sin(100t)\ \ N$ که در نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ وارد می‌شود و شرایط اولیه صفر.

۴-۱. مقایسه نتایج کنترل با ۴ و ۹ وصله در مسئله اول

نتایج برای مسئله اول در حالت ورق با ۹ وصله، شکل (۲)، و در حالت ورق با ۴ وصله، شکل (۳- الف)، مقایسه می‌شود. در حالت ورق با ۹ وصله ضرایب کنترل‌کننده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} G_d^i &= 0.00417 \\ G_p^i &= -25 \end{aligned} \qquad i=1,...,9$$

برای سیستم شکل (۳- الف) نیز ضرایب کنترل‌کننده به صورت جدول (۱) در نظر گرفته می‌شوند. برای این دو حالت نمودار جابجایی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در شکل (۴) آورده شده است.

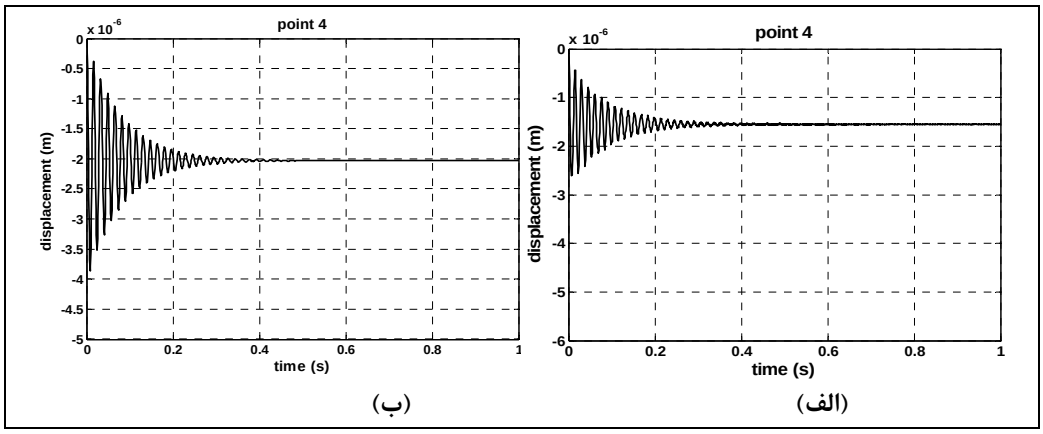
همانطور که از شکل (۴) ملاحظه می‌شود وضعیت ارتعاشی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در حالت با ۴ وصله نسبت به حالت با ۹ وصله بهتر است. اما همانطور که در مقدمه گفته شد انتظار می‌رود که در آرایش ۴ وصله، شکل (۳- الف)، وضعیت ارتعاشی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ نسبت به نقطه قرینه‌اش یعنی $(3l_x/4, l_y/2)$ نیز بهتر باشد. در شکل (۵- الف) نمودار جابجایی این دو نقطه نشان داده شده است. البته شاید این ابهام ایجاد شود که کاهش دامنه ارتعاش نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ نسبت به نقطه $(3l_x/4, l_y/2)$، به خاطر افزایش سختی ناشی از تمرکز وصله‌ها به وجود آمده است. در شکل (۵- ب) نمودار جابجایی این دو نقطه در حالت بدون کنترل و بارگذاری مسئله اول نشان داده شده است. از مقایسه شکل (۵- الف) و (۵- ب) ملاحظه می‌شود که پس از اعمال کنترل فعال توسط وصله‌های عملگر، دامنه ارتعاش اولیه نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ کاهش یافته ولی در مورد نقطه $(3l_x/4, l_y/2)$ افزایش یافته است. بنابراین اثر کنترلی وصله‌های عملگر در جهت کاهش ارتعاش نقطه مورد نظر تمرکز یافته است. بیشترین پتانسیل الکتریکی در حالت ۴ وصله در وصله‌های شماره ۳ و ۴ ایجاد می‌شود. در حالت ۹ وصله نیز وصله‌های ۲ ، ۴ ، ۶ و ۸ دارای بیشترین پتانسیل الکتریکی هستند. در شکل (۶) نمودار پتانسیل الکتریکی این وصله‌ها نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، بیشترین پتانسیل الکتریکی در هر دو حالت ۴ و ۹ وصله برابر با ۷ ولت است. بنابراین در حالت بارگذاری یکنواخت با تمرکز وصله‌های پیزوالکتریک در اطراف یک نقطه دلخواه می‌توان ارتعاش آن نقطه را زودتر کاهش داد و همانطور که ملاحظه شد اگر ماکزیمم ولتاژ اعمالی یکسان

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

باشد، حالت ۴ وصله (حالت متمرکز) نسبت به حالت ۹ وصله (حالت توزیع شده) از برتری قابل توجهی در ارضای هدف بیان شده برخوردار است.

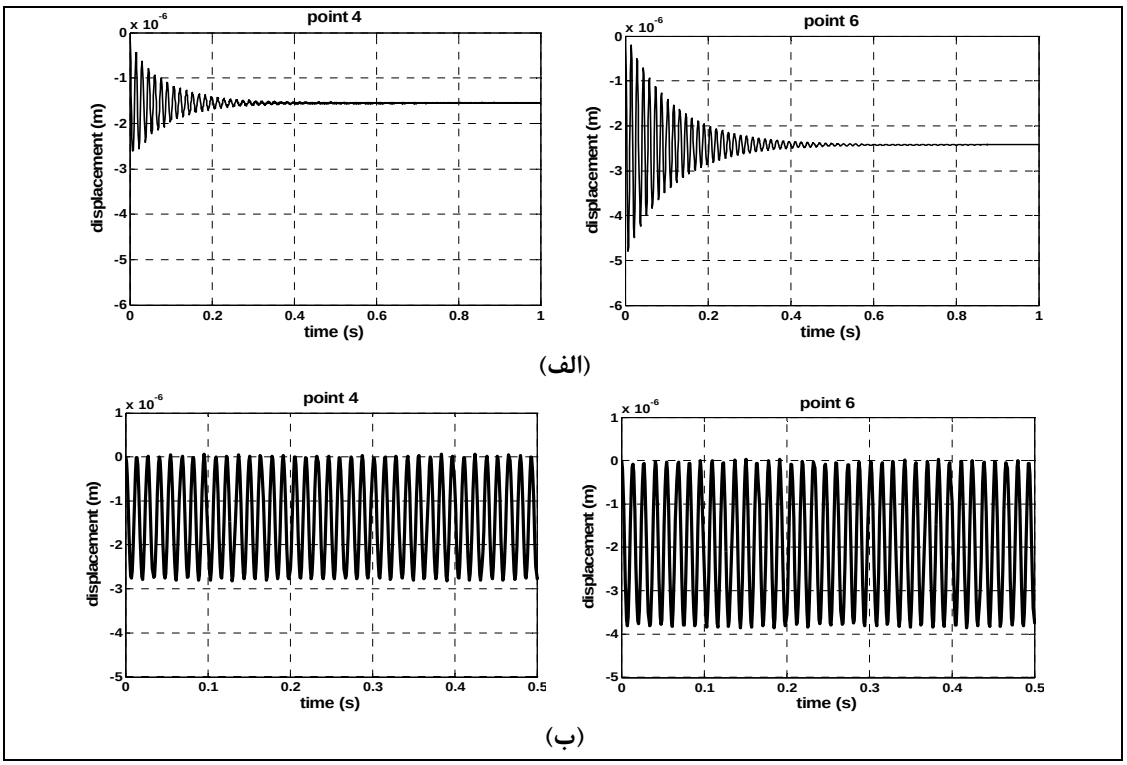
۲-۴. مقایسه نتایج کنترل با ۴ و ۹ وصله در مسئله دوم

در این مسئله نیز ضرایب کنترل‌کننده همان ضرایب مسئله اول در نظر گرفته می‌شوند. نمودار جابجایی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در دو حالت ۴ و ۹ وصله در شکل (۷) نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود جابجایی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در حالت ۴ وصله خیلی کمتر از حالت ۹ وصله است. توجه شود که در هر دو حالت فوق چون نیروی متمرکز در نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ وارد می‌شود، جابجایی این نقطه نسبت به نقطه $(3l_x/4, l_y/2)$ بیشتر است. بنابراین مقایسه جابجایی این دو نقطه قرینه لازم نیست. همانطور که در شکل (۸) مشاهده می‌شود، بیشترین پتانسیل الکتریکی در حالت ۹ وصله، در عملگر شماره ۴ ایجاد شده و برابر با ۱۴۳ ولت است. اما بیشترین پتانسیل الکتریکی در حالت ۴ وصله، در عملگرهای شماره ۱ و ۲ ایجاد شده و برابر با ۸۹ ولت است و همچنین در عملگرهای شماره ۳ و ۴ پتانسیل الکتریکی اعمال شده برابر با ۸۴ ولت است. بنابراین قرار دادن وصله‌ها در اطراف نقطه بحرانی $(l_x/4, l_y/2)$ که در آن بار متمرکز قرار دارد، باعث شده است که با اعمال ولتاژهای کمتر و بهینه‌تر بتوانیم دامنه ارتعاش این نقطه را نسبت به حالت ۹ وصله، کاهش دهیم.



شکل ۴. جابجایی عرضی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در مسئله اول

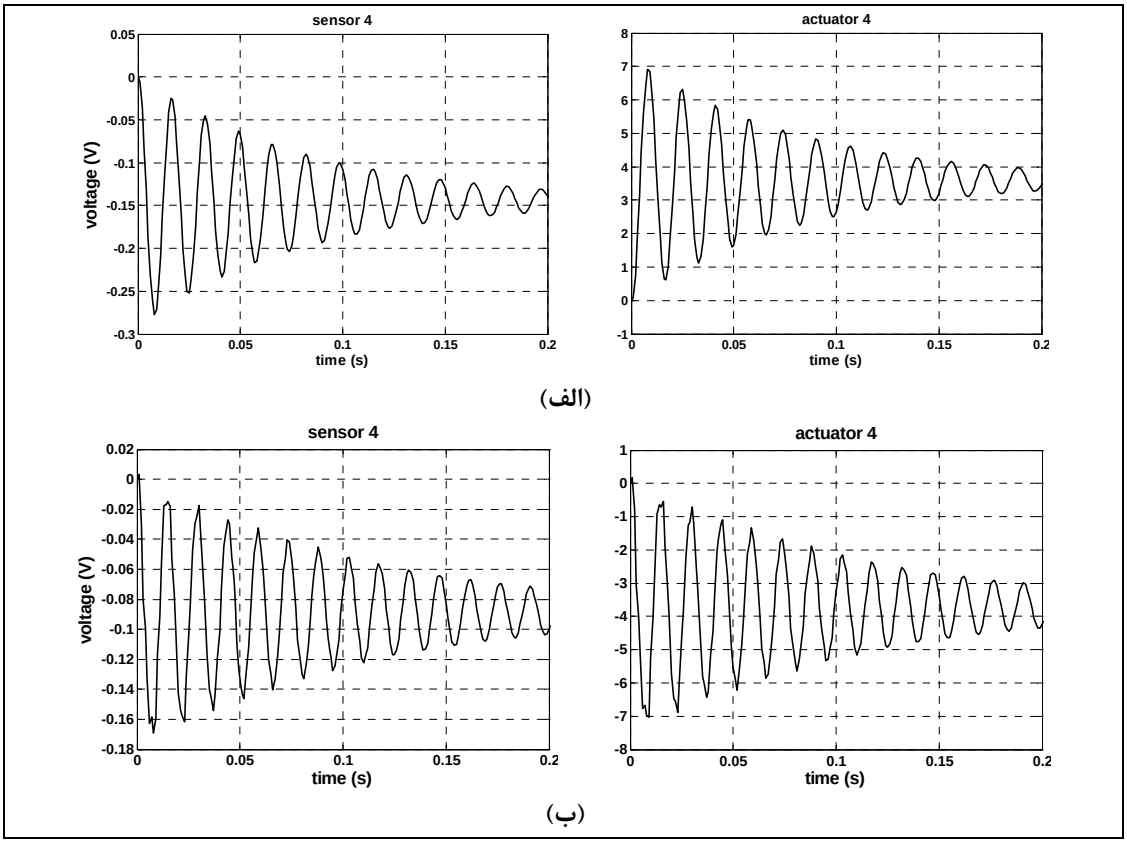
الف) درحالت با ۴ وصله ب) در حالت با ۹ وصله



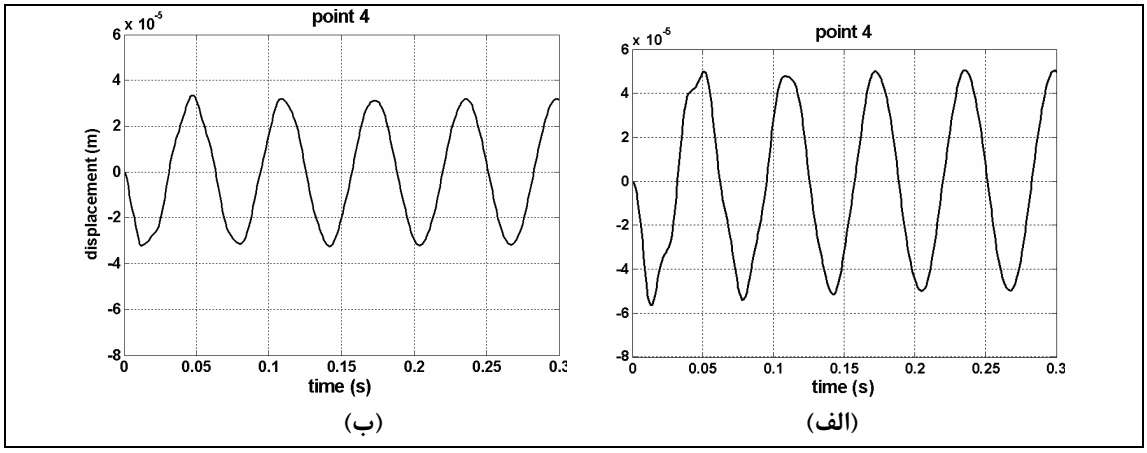
شکل ۵. جابجایی عرضی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ و $(3l_x/4, l_y/2)$ در آرایش ۴ وصله تحت بارگذاری مسئله اول

الف) وصله‌های عملگر فعال هستند ب) وصله‌های عملگر فعال نیستند

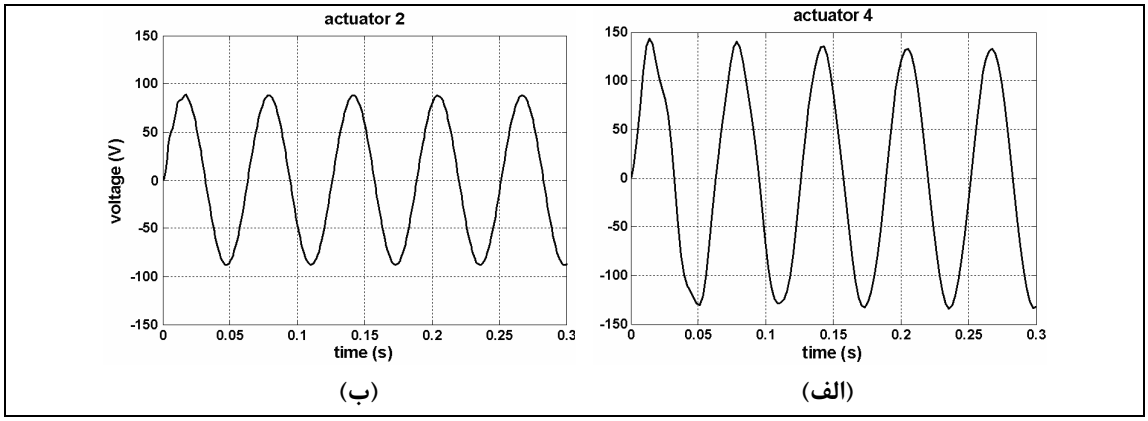
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]



شکل ۶. ماکزیمم پتانسیل‌های الکتریکی در مسئله اول الف) در حالت با ۹ وصله ب) در حالت با ۴ وصله



شکل ۷. جابجایی عرضی نقطه $(l_x/4, l_y/2)$ در مسئله دوم الف) در حالت با ۹ وصله ب) درحالت با ۴ وصله



شکل ۸. ماکزیمم پتانسیل‌های الکتریکی در مسئله دوم الف) در حالت با ۹ وصله ب) در حالت با ۴ وصله

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق کنترل فعال ارتعاشات نقطه دلخواهی از ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده ارائه شد. ابتدا حل تحلیلی معادله دیفرانسیل ورق وصله‌دار که در آن برای لحاظ کردن اثرات سختی و جرم وصله‌ها از یک تابع محلی استفاده شده، ارائه شد. برای تخمین پاسخ ورق از ۹ مود اول آن استفاده شد. با قرار دادن وصله‌های پیزوالکتریک در اطراف یک نقطه معین از ورق، کنترل ارتعاشات این نقطه در حالت بهینه‌تری انجام شد. برای این کار ملاحظه شد که حتی تعداد وصله‌های کمتر نیز جواب بهینه‌تری را می‌دهند. نشان داده شد که با وصله‌های کمتر (۴ وصله) نیز می‌توان تمام قطب‌های سیستم (۹ قطب اول) را پایدار نمود.

در حالت بارگذاری یکنواخت با تمرکز وصله‌های پیزوالکتریک در اطراف یک نقطه دلخواه می‌توان ارتعاش آن نقطه را زودتر کاهش داد و دیده شد که اگر ماکزیمم ولتاژ اعمالی یکسان باشد، حالت ۴ وصله (حالت متمرکز) نسبت به حالت ۹ وصله (حالت توزیع شده) از برتری قابل توجهی در ارضای هدف بیان شده برخوردار است. همچنین در حالت بارگذاری متمرکز، قرار دادن ۴ وصله در اطراف نقطه بحرانی که در آن بار متمرکز قرار دارد، باعث شد که با اعمال ولتاژهای کمتر و بهینه‌تر بتوان دامنه ارتعاش این نقطه را نسبت به حالت ۹ وصله، کاهش داد. به طور کلی می‌توان گفت که با تمرکز وصله‌ها در اطراف یک نقطه دلخواه از ورق، اثر کنترلی وصله‌های عملگر در جهت کاهش ارتعاش نقطه مورد نظر تمرکز می‌یابد.

فهرست متغیرها

صلابت خمشی	D
جابجایی عرضی	w
چگالی جرمی	ρ
ضخامت	h
زمان	t
بار گسترده در خلاف جهت جابجایی عرضی	q
متغیرهای ابعاد سیستم	x , y
طول ورق در راستای x	l_x
طول ورق در راستای y	l_y
عملگر (بالا نویس)	a
حسگر (بالا نویس)	s
ضریب دی‌الکتریک	ξ_{ij}
ضریب پواسان	υ
تعداد وصله‌ها	N_p
ثابت پیزوالکتریک	e_{ij}
پتانسیل الکتریکی (ولتاژ)	V
فرکانس طبیعی	ω

مراجع

[1] Crawley, E.F., Lazarus, K.B., *"Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates"*, AIAA, Vol. 29, 1991, PP. 944-951.

[2] Thomson, S.P., Loughlan, *"The Active Buckling Control of Some Composite Column Strips Using Piezoceramic Actuators"*, Composite Structures, Vol. 32, 1995, PP.59-67.

[3] Ha, S.K., Keilers, C., Chang, Fu-Kuo, *"Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators"*, AIAA, Vol. 30, No. 3, 1992, PP. 772-780.

[4] Valey, D., Rao, S.S., *"Two Dimensional Finite Element Modeling of Composites with Embedded Piezoelectric"*, Collection of Technical Papers, Proceeding of the AIAA/ASME/ASCE Structures, Structural dynamics and Materials Conference, No. 5, 1993, PP. 2629-2633.

[5] Crawley, E.F., de Luis, J., *"Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures"*, AIAA, Vol. 25, 1987, PP. 1373-85.

[6] Wang, B.T., Rogers, C.A., *"Laminated Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain Actuators"*, Composite Mater., Vol. 25, 1991, PP. 433-452.

[7] Tzou, H.S., Fu, H.Q., *"Study of the Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators Part I. Theoretical Analysis"*, Sound and Vibration, Vol. 172, No. 2, 2001, PP. 247-259.

[8] Tzou, H.S., Fu, H.Q., *"Study of the Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators Part II. Parametric Study and Active Vibration Control"*, Sound and Vibration, Vol. 172, No. 2, 1997, PP. 261-275.

[9] Hwang., Woo-Seok Park, Hyun Chul., *"Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators"*, AIAA, Vol. 31, No. 5, 1993, PP. 930-937.

[10] Chandrashekhara, K., Agarwal, A., *"Active Vibration Control of Laminated Composite Plates Using Piezoelectric Device: a Finite Element Approach"*, Intell. Mater. Syst. Struct., Vol. 4, 1993, PP. 496-508.

[11] Lim, Y.H., *"Finite Element Simulation of Closed Loop Vibration Control of a Smart Plat Under Transient Loading"*, J. Smart. Mater. Struct., Vol. 12, 2003, PP. 272-286.

[12] Moita, J.M.S., Correia, V.M.F., Martins, P.G., Soares, C.M.M., Soares, C.A.M., *"Optimal Design in Vibration Control of Adaptive Structures Using a Simulated Annealing Algorithm"*, Journal of Composite Structures, Vol. 75, 2006, PP. 79-87.

[13] Moita, J.M.S., Correia, I.F.P., Soares, C.M.M., Soares, C.A.M., *"Active Control of Adaptive Laminated Structures with Bonded Piezoelectric Sensors and Actuators"*, Journal of Computers and Structures, Vol. 82, 2004, PP. 1349-1358.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

[14] Moita, J.M.S., Soares, C.M.M., Soares, C.A.M., *"Active Control of Forced Vibration in Adaptive Structures Using Higher Order Model"*, Journal of Composite Structures, Vol. 71, 2005, PP. 349-355.

[15] Sadek, I.S., Bruch, Jr. J.C., Sloss, J.M., Adali, S., *"Feedback Control of Vibrating Plates Using Piezoelectric Patch Sensors and Actuators"*, Journal of Composite Structures, Vol. 62, 2003, PP. 397-402.

[16] Gopinathan, S., *"Modeling of Piezoelectric Smart Structures for Active Vibration and Noise Control Applications"*, PhD thesis, Dept. of Engineering Science and Mechanics, Pennsylvania State Univ., 2001.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]