نشریه بین‌المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۳، جلد ۱۹، پاییز ۱۳۸۷، صفحه ۲۵-۱۳
ویژه‌نامه مهندسی مکانیک

حل تحلیلی میدان دمای دوبعدی غیر دائم در استوانه توخالی با شرایط مرزی متغیر و هارمونیک

غلامعلی عاطفی و روح الله ابراهیمی

چکیده: در این مقاله حل تحلیلی میدان دما در استوانه توخالی تحت شرط مرزی هارمونیک محیط خارج که در جهت محور به طور دلخواه تغییر می نماید ارائه شده است. استوانه بصورت همگن و با خواص فیزیکی غیر وابسته به دما می باشد. برای حل مسأله ابتدا شرایط مرزی به صورت مقادیر ثابت فرض شده و با روش جداسازی متغیرها توزیع دما در استوانه بدست می آید. سپس با استفاده از تئوری دوهامل میدان دما تحت شرایط مرزی متغیر با زمان محاسبه می‌شود. در پایان برای تأیید صحت حل، نتیجه را برای حالت خاص یکبعدی هارمونیک بدست آورده و با مراجع موجود مقایسه می نماییم.

واژه های کلیدی: دما، استوانه، شرایط مرزی.

۱. مقدمه

مسائل انتقال حرارت با شرایط مرزی متغیر با زمان یکی از پرکاربرد ترین مسایل انتقال حرارت می باشند. لوله های انتقال آب، نفت و گاز، اجزاء موتورهای احتراقی، رآکتورهای اتمی، دودکش های صنعتی، رگهای بدن موجودات و ... نمونه های کوچکی از این موارد هستند.

Heisler در سال ۱۹۴۷ نمودارهای میدان حرارتی غیردائم را برای یک استوانه بلند و توپر با دمای اولیه ثابت بدست آورد. این نمودارها بصورت توابعی از اعداد بدون بعد بیوت و فوریر رسم شده که دمای استوانه را در شعاعهای مختلف می دهد [۱]. Ozisik نیز میدان حرارتی ناپایا را برای استوانه توخالی و توپر تحت شرایط مرزی مختلف همگن و غیرهمگن بدست آورده است [۲]. تروستل تنشهای ایجاد شده در اثر بارهای حرارتی مختلف را مورد بررسی قرار داده است [۳].

در این مقاله توزیع دمای ناپایا (غیر دائم) در استوانه توخالی و محدود (دوبعدی و وابسته به زمان) ناشی از انتقال حرارت هدایتی محاسبه شده است. شرایط مرزی در ابتدا و انتهای استوانه و همچنین سطح داخلی همگن در نظر گرفته شده، ولی روی سطح خارجی استوانه ناهمگن و ناپایا فرض شده است. شرط اولیه نیز برابر مقدار ثابت صفر فرض شده است.

روش حل تحلیلی بوده و از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله دیفرانسیل حرارت در مختصات استوانه‌ای با چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه استفاده شده است. برای حل ابتدا شرایط مرزی روی سطوح جانبی استوانه را پایا (دائم) فرض کرده و با استفاده از جمع آثار، جواب مسئله را به دو قسمت تقسیم می کنیم. یکی جواب پایا و دیگری جواب ناپایا که از جمع این دو قسمت میدان حرارتی حاصل می‌شود. سپس با اعمال شرایط مرزی واقعی روی سطح خارجی که ناپایا (متغیر با زمان و هارمونیک) می‌باشد، میدان حرارتی نهایی حاصل می گردد. در پایان نمودارهای بدون بعد نسبت دامنه ارتعاشی دمای استوانه به دمای محیط و اختلاف فاز آنها و همچنین شار عبوری از سطح استوانه، به صورت توابعی از اعداد بدون بعد بیوت (Bi) و فوریر (Fo) محاسبه و ترسیم شده است. مرجع [۴] شرط مرزی را به عنوان یک ارتعاش هارمونیک در نظر گرفته و نمودارهای دامنه و اختلاف فاز برای استوانه توپر، کره توپر و صفحه ترسیم نموده است. برای نمایش صحت حل، نتایج را برای یک ارتعاش هارمونیک بدست آورده و با مرجع [۴] مقایسه می‌نماییم.

۲. معادلات حاکم و شرایط مرزی

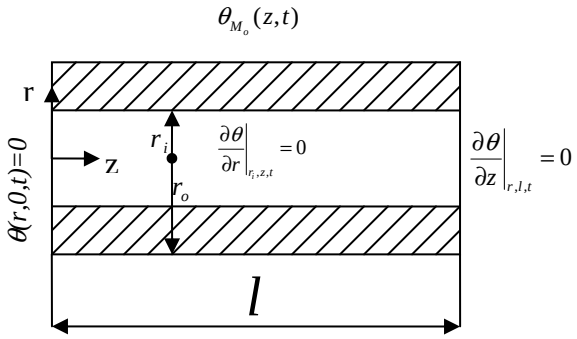
معادله هدایت حرارتی دوبعدی در یک استوانه برای محیط ایزوتروپ همگن بدون چشمه حرارتی و خواص حرارتی ثابت بصورت ذیل می‌باشد:

این مقاله در تاریخ ۸۳/۸/۵ دریافت و در تاریخ ۸۵/۴/۱۴ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر غلامعلی عاطفی استادیار، دانشکده مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران، atefi@iust.ac.ir
مهندس روح الله ابراهیمی، دانشکده مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران، ro.ebrahimi@gmail.com

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) \quad (۱)$$



شکل ۱. استوانه توخالی همراه شرایط مرزی

مطابق شکل (۱)، شرایط مرزی و اولیه به شرح ذیل می باشد:
شرط اولیه:

$$\theta(r,z,0) = 0 \quad (۲)$$

شرط مرزی در سطح z =۰ :

$$\theta(r,0,t) = 0 \quad (۳)$$

شرط مرزی در سطح z = l :

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|_{r,l,t} = 0 \quad (۵)$$

شرط مرزی در سطح خارجی و داخلی

(۶)

$$-h\left[\theta_{M_o}(z,t) - \theta(r_o,z,t)\right] = -k\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{r_o,z,t}$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial r}\right|_{r_i,z,t} = 0 \quad (۷)$$

در این روابط h, k, r_i, r_o به ترتیب، شعاع خارجی، شعاع داخلی، ضریب هدایت حرارتی و ضریب جابجایی سیال خارج استوانه، $a = \frac{k}{\rho C}$ ضریب نفوذ حرارتی جسم و $\theta_{M_o}(z,t)$ دمای محیط خارج است.
دمای محیط خارجی استوانه را تابعی از z برحسب زمان فرض نموده و به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\theta_{M_O}(z,t) = f(z)\ (\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\frac{t}{T}) \quad (۸)$$

با گذاردن (۸) در رابطه (۶) شرط مرزی به فرم ذیل نوشته می‌شود.

$$\theta(r_o,z,t) + \frac{k}{h}\left.\frac{\partial \theta}{\partial r}\right|_{r_o,z,t} = f(z)(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\frac{t}{T}) \quad (۹)$$

۳. حل تحلیلی معادله حرارت

برای بدست آوردن میدان دما با شرط اولیه و شرایط مرزی فوق باید ابتداء میدان دما برای حالتی حل شود که از زمان صفر اثرات مرزی ثابتی در سطوح جانبی فرض شود [۳]. در این صورت شرط اولیه و شرایط مرزی عبارت خواهد بود از:

$$\theta(r,z,0) = 0 \quad (۱۰)$$

$$\theta(r,0,t) = 0 \quad ، \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|_{r,l,t} = 0 \quad (۱۱)$$

$$\theta(r_o,z,t) + \frac{k}{h}\left.\frac{\partial \theta}{\partial r}\right|_{r_o,z,t} = f(z) \ , \ \left.\frac{\partial \theta}{\partial r}\right|_{r_i,z,t} = 0 \quad (۱۲)$$

این مسأله را چنین حل می‌کنیم که ابتداء مسأله مرزی (۱۱) و (۱۲) را با حل دائم $\theta_0(r,z)$ بدست آورده و سپس حل غیردائم را که با $\theta_1(r,z,t)$ نشان داده می‌شود بدست می آوریم. با جمع حل دائم و غیردائم $(\theta(r,z,t) = \theta_0(r,z) + \theta_1(r,z,t))$ شرط مرزی و اولیه (۱۰) تا (۱۲) ارضاء می‌شود. در پایان، حل کلی را بدست می‌آوریم که شرایط مرزی و اولیه (۲) تا (۷) را ارضاء کند.

۳-۱. حل تحلیلی میدان دمای دائم

معادله دیفرانسیلی هدایت حرارتی در این حالت برابر است با:

$$\nabla^2\theta_0 = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = 0 \quad (۱۳)$$

شرایط مرزی در این حالت عبارت است از:

$$\theta_0(r,0) = 0 \quad (۱۴)$$

$$\left.\frac{\partial \theta_0}{\partial z}\right|_{r,l} = 0 \quad (۱۵)$$

$$\theta_0(r_o,z) + \frac{k}{h}\left.\frac{\partial \theta_0}{\partial r}\right|_{r_o,z} = f(z) \quad (۱۶)$$

$$\left.\frac{\partial \theta_0}{\partial r}\right|_{r_i,z} = 0 \quad (۱۷)$$

حل معادله (۱۳) به روش جداسازی انجام می گیرد.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$\theta_0(r,z)=R_0(r)Z_0(z) \quad (۱۸)$$

با قرار دادن رابطه فوق در معادله (۱۳) و انتخاب w_0^2 به دو معادله دیفرانسیل ذیل برحسب Z_0 و R_0 می‌رسیم:

$$\frac{d^2R_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{dR_0}{dr}-w_0^2R_0(r)=0 \quad (۱۹)$$

$$\frac{d^2Z_0}{dz^2}+w_0^2Z_0(z)=0 \quad (۲۰)$$

معادله (۲۰) یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه ۲ و معادله (۱۹) یک معادله دیفرانسیل بسل مرتبه صفر می‌باشد که جواب آنها به ترتیب برابر است با:

$$Z_0(z)=A_1\cos(w_0z)+B_1\sin(w_0z) \quad (۲۱)$$

$$R_0(r)=A_2I_0(w_0r)+B_2K_0(w_0r) \quad (۲۲)$$

بنابراین $\theta_0(r,z)$ برابر است با:

$$\theta_0(r,z)=\left[A_1\cos(w_0z)+B_1\sin(w_0z)\right]\cdot\left[A_2I_0(w_0r)+B_2K_0(w_0r\ )\right] \quad (۲۳)$$

با اعمال شرایط مرزی (۱۴) و (۱۵) میدان دمای پایا (دائم) بر حسب مقادیر ویژه w_{0n} یعنی:

$$w_{0n}=\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l} \quad (۲۴)$$

به فرم کلی زیر بدست می‌آید:

$$\theta_0(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_nI_0\left(w_{0n}r\right)+B_nK_0\left(w_{0n}r\right)\right]\sin\left(w_{0n}z\right) \quad (۲۵)$$

ثابت‌های A_n و B_n از شرایط مرزی (۱۶) و (۱۷) بدست می‌آیند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\left[I_0(w_{0n}r_0)+\frac{k}{h}w_{0n}I_0'(w_{0n}r_0)\right]+B_n\left[K_0'(w_{0n}r_0)+\frac{k}{h}w_{0n}K_0'(w_{0n}r_0)\right]\right\}\sin\left(w_{0n}z\right)=f(z) \quad (۲۶)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_nI_0'(w_{0n}r_i)+B_nK_0'(w_{0n}r_i)\right]w_{0n}\sin\left(w_{0n}z\right)=0$$

برای بدست آوردن ثابت های A_n و B_n لازم است کـه تـابع مـرزی $f(z)$ را با توابع ویژه $\sin\left(w_{0n}z\right)$ بسط دهیم:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(w_{0n}z\right) \quad (۲۷)$$

ضریب فوریه C_n با در نظر گرفتن متعامد بودن توابع ویژه برابر است با:

$$C_n=\frac{\int_{z=0}^{l}f(z)\sin(w_{0n})dz}{\int_{z=0}^{l}\sin^2(w_{0n}z)dz} \quad (۲۸)$$

(۲۷) را در (۲۶) می‌گذاریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\left[I_0(w_{0n}r_0)+\frac{k}{h}w_{0n}I_0'(w_{0n}r_0)\right]+B_n\left[K_0(w_{0n}r_0)+\frac{k}{h}w_{0n}K_0'(w_{0n}r_0)\right]-C_n\right\}\sin\left(w_{0n}z\right)=0 \quad (۲۹)$$

روابط (۲۹) و (۲۶) زمانی ارضاء می شوند که برای هر n برقرار باشند. به عبارت دیگر باید ثابت‌های A_n و B_n از سیستم معادلات خطی زیر بدست آیند.

$$\begin{aligned}&A_n\left[I_0(w_{0n}r_o)+\frac{k}{h}w_{0n}\ I_0'(w_{0n}r_o)\right]+\\&B_n\left[K_0(w_{0n}r_o)+\frac{k}{h}w_{0n}\ K_0'(w_{0n}r_o)\right]=C_n\\&A_nI_0'(w_{0n}r_i)+B_nK_0'(w_{0n}r_i)=0\end{aligned} \quad (۳۰)$$

با جایگزینی (۳۰) در رابطه (۳۰) داریم:

$$A_n\left\{\left[I_0(w_{0n}r_o)+\frac{k}{h}w_{0n}I_0'(w_{0n}r_o)\right]-\frac{I_0'(w_{0n}r_i)}{K_0'(w_{0n}r_i)}\left[K_0(w_{0n}r_o)+\frac{k}{h}w_{0n}K_0'(w_{0n}r_o)\right]\right\}=C_n \quad (۳۱)$$

ضریب A_n را با D_n نشان می‌دهیم. آنگاه:

$$A_n=\frac{C_n}{D_n}k_0'(w_{0n}\mathrm{r_i}) \quad (۳۲)$$

با جایگزینی (۳۲) در (۳۰b)، B_n بدست می‌آید:

$$B_n=-\frac{I_0'(w_{0n}r_i)}{k_0'(w_{0n}r_i)}A_n=-\frac{C_n}{D_n}I_0'(w_{0n}r_i) \quad (۳۳)$$

حال A_n و B_n را از روابط(۳۲) و (۳۳)، در (۲۵) جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه میدان دما عبارتست از:

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$\theta_0(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\eta(w_{0n}r)\sin(w_{0n}z) \qquad (۳۴)$$

که در آن:

$$\eta(w_{0n}r)=\frac{1}{D_n}\cdot \qquad (۳۵)$$
$$\left[K_0'(w_{0n}r_i)I_0(w_{0n}r)-I_0'(w_{0n}r_i)K_0(w_{0n}r)\right]$$

۳-۲. حل میدان دمای گذرا

در این حالت معادله دیفرانسیلی هدایت حرارتی برابر است با:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial\theta_1}{\partial r}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2} \qquad (۳۷)$$

معادله میدان دمای ناپایا را از روش جداسازی متغیرها حل نموده به عبارت ذیل برای زمان می رسیم:

$$\theta_1(r,z,t)=R(r)Z(z)T(t) \qquad (۳۸)$$

$$\frac{T'}{T}=a\left(\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{Z''}{Z}\right) \qquad (۳۹)$$

با انتخاب ثابتهای دلخواه معادلات دیفرانسیلی معمولی زیر بدست می‌آید:

$$R''+\frac{1}{r}R'=-R\mu^2 \qquad , \qquad \frac{Z''}{Z}=-\nu^2 \qquad (۴۰)$$

و با توجه به رابطه (۳۹) می توان نوشت:

$$\frac{T'}{T}=-a(\mu^2+\nu^2)=-a\omega^2 \qquad (۴۱)$$

که در آن $\mu^2+\nu^2=\omega^2$ می باشد. لذا حل معادلات دیفرانسیلی فوق عبارتند از:

$$Z(z)=\overline{A_1}\cos(\nu z)+\overline{B_1}\sin(\nu z) \qquad (۴۳)$$

$$R(r)=A_2J_0(\mu r)+B_2N_0(\mu r) \qquad (۴۴)$$

$$T(t)=A_0\ e^{-a\omega^2t} \qquad (۴۵)$$

J_0 تابع بسل (Bessel) و N_0 تابع نیومان(Neumann) درجه صفر هستند. با گذاردن روابط فوق در (۳۸) و با اختصار $A_0\,\overline{A_1}=A_1$ و $A_0\,\overline{B_1}=B_1$، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta_1(r,z,t)=e^{-a\omega^2t}[A_1\cos(\nu z)+B_1\sin(\nu z)]\times [A_2J_0(\mu r)+B_2N_0(\mu r)] \qquad (۴۶)$$
$$=T(t)Z(z)R(r)$$

در مساله مرزی میدان دمای غیر دائم فوق، باید شرایط مرزی ذیل ارضا شوند.

$$\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right|_{r,l,t}=0 \quad ، \quad \theta_1(r,0,t)=0 \qquad (۴۷)$$

$$\theta_1(r_o,z,t)+\frac{k}{h}\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial r}\right|_{r_o,z,t}=0 \ ، \ \left.\frac{\partial\theta_1}{\partial r}\right|_{r_i,z,t}=0 \qquad (۴۸)$$

با مقادیر زیر و با توجه به اینکه مشتق ها بر حسب μr مـی باشـند، داریم:

$$-A_1\sin(\nu l)+B_1\cos(\nu l)=0$$
$$A_1=0 \qquad (۴۹)$$
$$A_2[J_0(\mu r_o)+\frac{k}{h}\mu J_0'(\mu r_o)]+$$
$$B_2[N_0(\mu r_o)+\frac{k}{h}\mu N_0'(\mu r_o)]=0$$

$$A_2J_0'(\mu r_i)+B_2N_0'(\mu r_i)=0 \qquad (۵۰)$$

از (۴۹) نتیجه می شود:

$$\cos(\nu l)=0\ \Rightarrow\ \nu_n=\frac{2n+1}{2l}\pi \quad (n=۰،۱،۲،۳،...) \qquad (۵۱)$$

برای آنکه (۵۰) جوابهای غیر صفر برای A_2 و B_2 داشته باشد. بایـد دترمینان ضرایب صفر باشد. بنابراین:

$$N_0'(\mu r_i)[J_0(\mu r_o)+\frac{k}{h}\mu J_0'(\mu r_o)]+$$
$$J_0'(\mu r_i)[N_0(\mu r_o)+\frac{k}{h}\mu N_0'(\mu r_o)]=0 \qquad (۵۲)$$

بدین ترتیب $\nu_n(n=۱،۲،۳،...)$ و $\mu_s(s=۱،۲،۳،...)$ بدست می‌آیند. علاوه بر آن از تساوی معادلات مقادیر مشخصه(۲۴) و (۵۱) دیده می شود که:

$$\nu_n=w_{0n} \qquad (۵۳)$$

از رابطه (۵۰b)، رابطه بین A_2 و B_2 بدست می آید:

$$B_2=-\frac{J_0'(\mu r_i)}{N_0'(\mu r_i)}A_2 \qquad (۵۴)$$

در این صورت روابط برای $Z(z)$ و $R(r)$ با استفاده از رابطه (۵۴) به فرم زیر بدست می آید:

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$Z(z) = B_1 \sin(\nu z)$$
$$R(r) = A_2\left[J_0(\mu r) - \frac{J_0'(\mu r_i)}{N_0(\mu r_i)} N_0(\mu r)\right] \quad (۵۵)$$

با ثابت $B_1 A_2 = A$ رابطه (۴۶) به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta_1(r,z,t) = A\left[J_0(\mu r) - \frac{J_0'(\mu r_i)}{N_0(\mu r_i)} N_0(\mu r)\right] \cdot \sin(\nu z)\, e^{-a\omega^2 t} \quad (۵۶)$$

رابطه فوق شرایط مرزی (۴۷) الی (۴۸) را برای همه مقادیر مشخصه‌ایکه از روابط (۵۱) و (۵۲) بدست می آیند، ارضاء می‌کند. بدین ترتیب می توان برای حالت کلی نوشت:

$$\theta_1(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{js}\left[J_0(\mu_j r) - \frac{J_0'(\mu_j r_i)}{N_0(\mu_j r_i)} N_0(\mu_j r)\right] \sin(\nu_s z)\, e^{-a\omega_{js}^2 t} \quad (۵۷)$$

که طبق(۴۲) :

$$\omega_{js}^2 = \mu_j^2 + \nu_s^2 \quad (۵۸)$$

با اختصار:

$$\phi_0(\mu_j r) = \frac{N_0'(\mu_j r_i) J_0(\mu_j r) - J_0'(\mu_j r_i) N_0(\mu_j r)}{N_0'(\mu_j r_i)} \quad (۵۹)$$

رابطه (۵۷) فرم زیر را پیدا می‌کند:

$$\theta_1(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{js}\phi_0(\mu_j r)\sin(\nu_s z)\, e^{-a\omega_{js}^2 t} \quad (۶۰)$$

در میدان دمای فوق که بر حسب توابع مشخصه تکامل داده شده است، ثابت A_{js} باقیمانده است، که از شرط اولیه بدست می آید. برای این منظور باید حل غیر دائم در زمان صفر در رابطه زیر صدق کند (اثرات حل دائم و غیر دائم باید در زمان صفر خنثی شود).

$$\theta_1(r,z,0) = -\theta_0(r,z) \quad (۶۱)$$

حال معادلات (۶۰) و (۳۶) را در رابطه بالا می‌گذاریم:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{js}\phi_0(\mu_j r)\sin(\nu_s z) = -\sum_{s=1}^{\infty} C_s \eta(w_{0s} r)\sin(w_{0S} z) \quad (۶۲)$$

با $w_{0s} = \nu_s$ خواهیم داشت:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{js}\phi_0(\mu_j r) + C_s\eta(w_{0s} r)\right]\sin(w_{0s} z) = 0 \quad (۶۳)$$

که برای هر s رابطه زیر برقرار است:

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_{js}\phi_0(\mu_j r) = -C_s\eta(w_{0s} r) \quad (۶۴)$$

با توجه به متعامد بودن توابع مشخصه $\phi_0(\mu_j r)$ می توان نوشت:

$$\int_{r_i}^{r_o} r\phi_0(\mu_j r)\phi_0(\mu_i r)dr = 0 \qquad i \neq j \quad (۶۵)$$

حال برای بدست آوردن A_{js} طرفین (۶۴) را در $r\phi_0(\mu_j r)$ ضرب نموده و از r_i تا r_o انتگرال می گیریم:

$$A_{js} = -\frac{\int_{r_i}^{r_o} r\phi_0(\mu_j r) C_s\eta(w_{0s} r)dr}{\int_{r_i}^{r_o} r\phi_0^2(\mu_j r)dr} \quad (۶۶)$$

در نتیجه میدان دمای غیردائم (ناپایا) برابر است با:

$$\theta_1(r,z,t) = -\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_0(\mu_j r)\sin(w_{0s} z)e^{-a\omega_{js}^2 t} \cdot \frac{\int_{r_i}^{r_o} r\phi_0(\mu_j r) C_s\eta(w_{0s} r)dr}{\int_{r_i}^{r_o} r\phi_0^2(\mu_j r)dr} \quad (۶۷)$$

نهایتا میدان دمایی که شرایط مرزی (۱۰) تا (۱۲b) را ارضاء کند، عبارت است از:

$$\theta(r,z,t) = \theta_0(r,z) + \theta_1(r,z,t) \quad (۶۸)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\theta(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta(w_{0s} r) - \sum_{j=1}^{\infty}\phi_0(\mu_j r)e^{-a\omega_{js}^2 t}\frac{\int_{r_i}^{r_o} r\phi_0(\mu_j r)\eta(w_{0s} r)dr}{\int_{r_i}^{r_o} r\phi_0^2(\mu_j r)dr}\right] \cdot C_s\sin(w_{0s} z) \quad (۶۹)$$

۳-۳. حل کامل میدان دمای متقارن با شرایط مرزی متغیر و پریودیک با شرایط مرزی و اولیه ۲، ۵ و ۹

رابطه (۶۹) مشخص کننده میدان دمایی در زمان t است که به علت شرایط مرزی (۱۲) ایجاد شده است. شرایط مرزی (۱۲) در زمان $t = 0$ اثر نموده و از نظر زمان ثابت می‌باشد. در حالتی که اثرات مرزی مطابق رابطه (۹) از نظر زمانی متغیر باشد، در این صورت ضرایب فوریه که با C_s نشان داده ایم ثابت نبوده و تابع زمان هستند. حال شرط مرزی (۹) را بر حسب توابع مشخصه تکامل می دهیم.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$f(z)(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(2\pi\frac{t}{T})=\sum_{s=1}^{\infty}C_s\sin(w_{0s}z) \quad (۷۰)$$

که C_S طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C_S=\frac{\int_0^l f(z)\ (\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(2\pi\frac{t}{T})\sin(w_{0s}z)\,dz}{\int_0^l \sin^2(w_{0s}z)\,dz} \quad (۷۱)$$

در یک المان زمانی تغییرات C_s، $dC_s=\frac{dC_s}{d\tau}d\tau$ می‌باشد. حال فرض می‌کنیم اثری که در زمان τ ایجاد شده است. با گذشت زمان ثابت بماند. در این صورت میدان دمائی که در زمان t بعد از گذشت $t-\tau$ ثانیه ایجاد شده است، توسط رابطه (۶۹) با جایگزینی dC_s بجای C_s و $t-\tau$ بجای t بدست می آید.

$$d\theta(r,z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta(w_{0s}r)-\sum_{j=1}^{\infty}\phi_0(\mu_j r)e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}\cdot\frac{\int_{r_i}^{r_o}r\phi_0(\mu_j r)\eta(w_{0s}r)dr}{\int_{r_i}^{r_o}r\phi_0^2(\mu_j r)dr}\right]\sin(w_{0s}z)\frac{dC_s}{d\tau}d\tau \quad (۷۳)$$

اثر کل در زمان t را می توان از جمع اثرات المانی dC_s که در فاصله زمانی dt ایجاد شده، بعلاوه اثر آغاز $C_s(0)$ بدست آورد.

$$\theta(r,z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\int_{\tau=0}^{t}\left[\eta(w_{0s}r)-\sum_{j=1}^{\infty}\phi_0(\mu_j r)e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}\frac{\int_{r_i}^{r_o}r\phi_0(\mu_j r)\eta(w_{0s}r)dr}{\int_{r_i}^{r_o}r\phi_0^{\ 2}(\mu_j r)dr}\right]\cdot\sin(w_{0s}z)\ \frac{dC_s}{d\tau}d\tau+\sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta(\omega_{0s}r)-\sum_{j=1}^{\infty}\phi_0(\mu_j r)\ e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}\frac{\int_{r_i}^{r_0}r\phi_0(\mu_j r)\eta(\omega_{0s}r)dr}{\int_{r_i}^{r_0}r\phi_0^2(\mu_j r)dr}\right]\cdot\sin(w_{0s}z)\ C_S(0) \quad (۷۴)$$

و یا:

$$\theta(r,z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\eta(w_{0s}r)C_s(t)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_0(\mu_j r)}{\int_{r_i}^{r_0}r\phi_0^{\ 2}(\mu_j r)dr}\cdot\left[C_s(0)e^{-a\omega_{js}^2t}+\int_0^t e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}\frac{dC_s}{d\tau}d\tau\right]\cdot\int_{r_i}^{r_o}r\phi_0^{\ 2}(\mu_j r)\eta(w_{0s}r)dr\right\}Sin(w_{0s}z) \quad (۷۵)$$

با توجه به قاعده انتگرال جزء به جزء می‌توان نوشت:

$$C_s(0)e^{-a\omega_{js}^2t}+\int_0^t e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}\frac{dC_s}{d\tau}d\tau=C_s(t)-a\omega_{js}^2\int_0^t C_s(\tau)e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}d\tau \quad (۷۶)$$

در نتیجه:

$$\theta(r,z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\underbrace{\left[\eta(w_{0s}r)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_0(\mu_j r)}{\int_{r_i}^{r_o}r\phi_0^{\ 2}(\mu_j r)dr}\int_{r_i}^{r_o}r\phi_0^{\ 2}(\mu_j r)\eta(w_{0s}r)dr\right]}_{\eta(w_{0s}r)} \quad (۷۷)$$

$$\cdot C_s(t)\ \sin(w_{0s}z)+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a\omega_{js}^2\phi_0(\mu_j r)\ \sin(w_{0s}z)}{\int_{r_i}^{r_o}r\ \phi_0^{\ 2}(\mu_j r)dr}\cdot\int_0^t\int_{r_i}^{r_o}C_s(\tau)\ r\phi_0(\mu_j r)\eta(w_{0s}r)e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}drd\tau$$

در رابطه بالا قسمتی که با علامت مشخص شده است طبق رابطه (۶۴) و (۶۶) برابر است با $\eta(w_{0s}r)$ که منجر به حذف عبارت اول می‌گردد. بنابراین حل میدان دما به صورت ذیل حاصل می‌شود.

$$\theta(r,z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a\omega_{js}^2\phi_0(\mu_j r)\sin(w_{0s}z)}{\int_{r_i}^{r_o}r\phi_0^{\ 2}(\mu_j r)dr}\cdot\int_0^t\int_{r_i}^{r_o}C_s(\tau)r\phi_0(\mu_j r)\eta(w_{0s}r)e^{-a\omega_{js}^2(t-\tau)}drd\tau \quad (۷۸)$$

۳-۴. فرم بی بعد معادلات

جهت سهولت محاسبات و همچنین ارائه جواب تحلیلی برحسب اعداد بدون بعد بیوت (Bi) و فوریه (Fo) باید از ابتدا کمیت های مختلف را بدون بعد در نظر گرفت. در این صورت خواهیم داشت:

$$\bar{r}=\frac{r}{r_o}\quad,\quad \bar{z}=\frac{z}{l}\quad,\quad \bar{t}=\frac{t}{T}$$
$$Bi=\frac{hr_o}{k}\quad,\quad Fo=\frac{aT}{r_o^{\ 2}} \quad (۷۹)$$

که در آن T,l,r_o به ترتیب شعاع خارجی، طول استوانه و دوره تناوب نوسان دمای اطراف استوانه می‌باشد. همچنین در این حل اعداد بدون بعد x و m به عنوان نسبت شعاع به طول استوانه و نسبت شعاع داخل به خارج، تعریف می گردد.

$$x=\frac{r}{l}\quad,\quad m=\frac{r_i}{r_o} \quad (۸۰)$$

در اینصورت با جایگذاری کمیتهای بدون بعد در معادله (۱) خواهیم داشت:

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = Fo\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} + x^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2}\right) \quad (۸۱)$$

با حل معادله (۸۱) با شرایط مرزی و اولیه فوق به جواب ذیل می رسیم:

$$\theta(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{Fo\ \omega_{js}^2 \phi_0(\mu_j \bar{r}) \sin(w_{0s}\bar{z})}{\int_m^1 \bar{r}\phi_0^{\ 2}(\mu_j \bar{r}) d\bar{r}} \quad (۸۷)$$
$$\cdot \int_0^{\bar{t}} \int_m^1 C_s(\tau)\bar{r}\phi_0(\mu_j \bar{r})\eta(w_{0s}\bar{r}) e^{-Fo\ \omega_{js}^2(\bar{t}-\tau)} d\bar{r} d\tau$$

۳-۵. حالت خاص

حل ارائه شده برای حالت کلی است و دمای محیط خارج، تابعی از z و t می‌باشد. حال برای حالت ذیل جواب را بررسی می‌کنیم:

$$f(z) = 1 + \frac{z}{l} \quad (۸۸)$$

در این صورت ضرایب فوریه که با $C_s(t)$ نشان دادیم برابر است با:

$$C_S(t) = \frac{2x}{w_{0s}}\left(1 + \frac{x}{w_{0s}}\sin(\frac{w_{0s}}{x})\right)(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t}) \quad (۹۰)$$
$$= \gamma_s(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t})$$

که در آن $\gamma_s = \frac{2x}{w_{0s}}\left(1 + \frac{x}{w_{0s}}\sin(\frac{w_{0s}}{x})\right)$ می باشد.

برای بدست آوردن میدان دما ابتدا باید انتگرالهای رابطه (۸۷) محاسبه شود. لذا:

$$\int_m^1 \bar{r}\phi_0^{\ 2}(\mu_j \bar{r}) d\bar{r} = \left[\frac{1}{2}\bar{r}^2\left\{\phi_0^2(\mu_j \bar{r}) + \phi_0'^2(\mu_j \bar{r})\right\}\right]_m^1 \quad (۹۱)$$

$$\int_m^1 \bar{r}\phi_0(\mu_j \bar{r})\eta(\nu_s \bar{r}) d\bar{r}$$
$$= \frac{1}{\left(\nu_s^2 + \mu_j^2\right)}\left[\phi_0(\mu_j)\left.\frac{\partial \eta(w_{0s}r)}{\partial r}\right|_{r=1} - \left.\frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r}\right|_{r=1}\eta(w_{0s})\right] \quad (۹۲)$$
$$= \frac{1}{\omega_{js}^2}\left[\phi_0(\mu_j)\left.\frac{\partial \eta(w_{0s}r)}{\partial r}\right|_{r=1} - \left.\frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r}\right|_{r=1}\eta(w_{0s})\right]$$
$$= \frac{1}{\omega_{js}^2}\left[\phi_0(\mu_j)\left.\frac{\partial \eta(w_{0s}r)}{\partial r}\right|_{r=1} - \left.\frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r}\right|_{r=1}\eta(w_{0s})\right]$$

$$\int_0^{\bar{t}} C_s(\tau) e^{-Fo\ \omega_{js}^2(\bar{t}-\tau)} d\tau = \quad (۹۳)$$
$$\int_0^{\bar{t}} \gamma_s(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t})\ e^{-Fo\ \omega_{js}^2(\bar{t}-\tau)} d\tau$$

با اعمال $\bar{t} \to \infty \Rightarrow e^{-Fo\ \omega_{js}^2 \bar{t}} = 0$ و ساده سازی داریم:

$$\int_0^{\bar{t}} C_s(\tau) e^{-Fo\ \omega_{js}^2(\bar{t}-\tau)} d\tau =$$
$$\frac{\gamma_s}{Fo\ \omega_{js}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2M^2}{\omega_{js}^2}\right)^2}}(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin\left(2\pi\bar{t} + \phi_{js}\right) \quad (۹۴)$$

که در آن عدد بی بعد M و اختلاف فاز ϕ_{js} برابر است با:

$$M = \sqrt{\frac{\pi}{Fo}} \quad , \quad \phi_{js} = tg^{-1}\left(-\frac{2M^2}{\omega_{js}^2}\right) \quad (۹۴)$$

بدین ترتیب میدان دما در این حالت برابر است با:

$$\theta(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_s\ \phi_0(\mu_j \bar{r})\ \sin(w_{0s}\bar{z})}{\left[\frac{1}{2}\bar{r}^2\left\{\phi_0^2(\mu_j \bar{r}) + \phi_0'^2(\mu_j \bar{r})\right\}\right]_m^1} \quad (۹۵)$$
$$\cdot \omega_{js}^2\left[\phi_0(\mu_j)\left.\frac{\partial \eta(w_{0s}r)}{\partial r}\right|_{r=1} - \left.\frac{\partial \phi_0(\mu_j r)}{\partial r}\right|_{r=1}\eta(w_{0s})\right]$$
$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2M^2}{\omega_{js}^2}\right)^2}}(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js})\right)$$

در نتیجه با اختصار A_{sj} به عنوان ضرائب سینوس خواهیم داشت:

$$\theta(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(A_{js}(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin\left(2\pi\bar{t} + \phi_{js}\right)\right) \quad (۹۶)$$

در قدم آخر با محاسبه برآیند بردارهای $A_{js}(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js})$، به عبارت ذیل می رسیم:

$$\theta(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = A(r,z)\ (\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t} + \phi) \quad (۹۷)$$

که در آن A نسبت دامنه نوسانات دمای استوانه و دمای محیط و ϕ اختلاف فاز بین این دو می‌باشد

$$A = \frac{\text{دامنه نوسانات دمای استوانه}}{\text{دامنه نوسانات دمای محیط خارج}} \quad (۹۸)$$
$$\phi = \text{اختلاف فاز بین دمای محیط و استوانه}$$

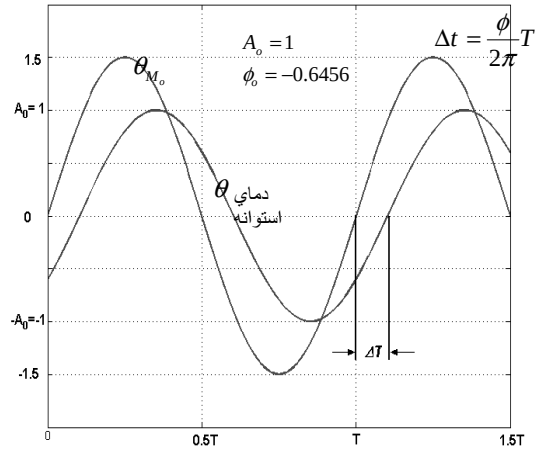
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

۴. نتایج و نمودارهای ترسیمی

حالت ذیل را برای میدان دمای محیط خارج فرض می‌کنیم:

$$f(\bar{z}) = 1 + \bar{z}$$
$$\theta_{M_o}(z,t) = (1+\bar{z})(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t}) \qquad (۹۹)$$

در شکل ذیل، دمای استوانه به ازای مقادیر $\bar{z} = ۰.۵$ ، $\bar{r} = ۱$ ، $x = ۰.۱$ ، $m = ۰.۵$ ، $Bi = ۱$ ، $M = ۱$ ، ترسیم شده است:



شکل ۲. مقایسه دمای استوانه متاثر از محیط با دمای محیط

به منظور بررسی تغییرات A و ϕ، دو نمودار که بیان کننده این دو کمیت می باشند رسم شده است که در آن تغییرات این دو کمیت برحسب اعداد بی بعد M و Bi/M بیان شده است.

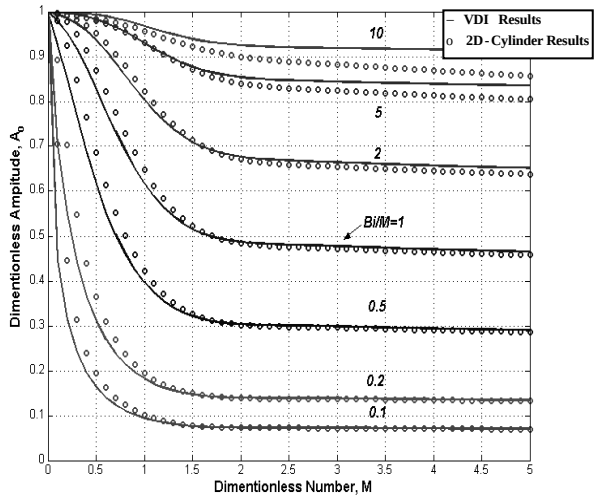
M متناسب با جذر عکس عدد فوریر و به نوعی بیانگر فرکانس نوسانات دما می باشد.

همچنین Bi/M متاثر از پریود، شرایط مرزی و خواص ترموفیزیکی استوانه می‌باشد. جهت نمایش صحت حل ابتدا نمودار تغییرات A و ϕ را برای سطح استوانه توپر ($r_i/r_o \to 0$) با نمودار مرجع[۳] مقایسه می‌نماییم. برای این منظور نسبت شعاع داخلی به خارجی را نزدیک صفر انتخاب می‌کنیم.

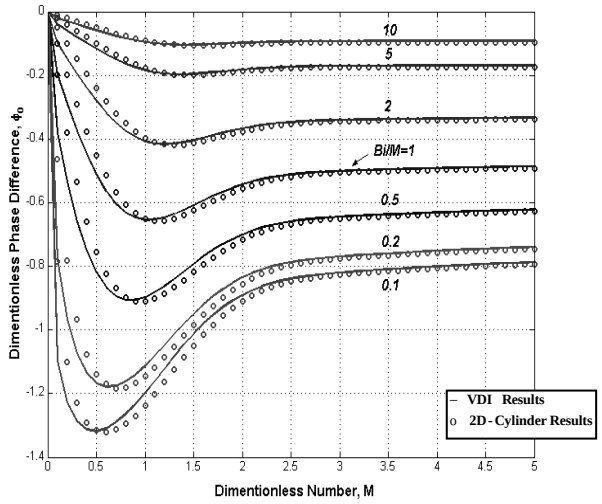
در این مساله m=۰/۰۰۱ ، x=۰/۰۱ و z=۰/۵ می باشد. همچنین شرط مرزی جهت مقایسه با نتایج مرجع[۴]، حالت ساده $\theta_M(z,t) = (1+\bar{z})(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t})$ ، در نظر گرفته شده است. طبق رابطه میدان دو بعدی دما بصورت

$$\theta(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(A_{js}(\theta_{M_{o\max}} - \bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t} + \phi_{js})\right)$$ می‌باشد.

در این مقاله میدان دما برای ۲۰۰ جمله از بسط $\sum_j$ و ۲۰۰ جمله از بسط $\sum_s$ محاسبه شده است. اختلاف جزئی در نتایج به دلیل دوبعدی بودن هدایت حرارتی در این مقاله و دقت حل می باشد.



شکل ۳. نمودار تغییرات نسبت دامنه برحسب عدد بی بعد M



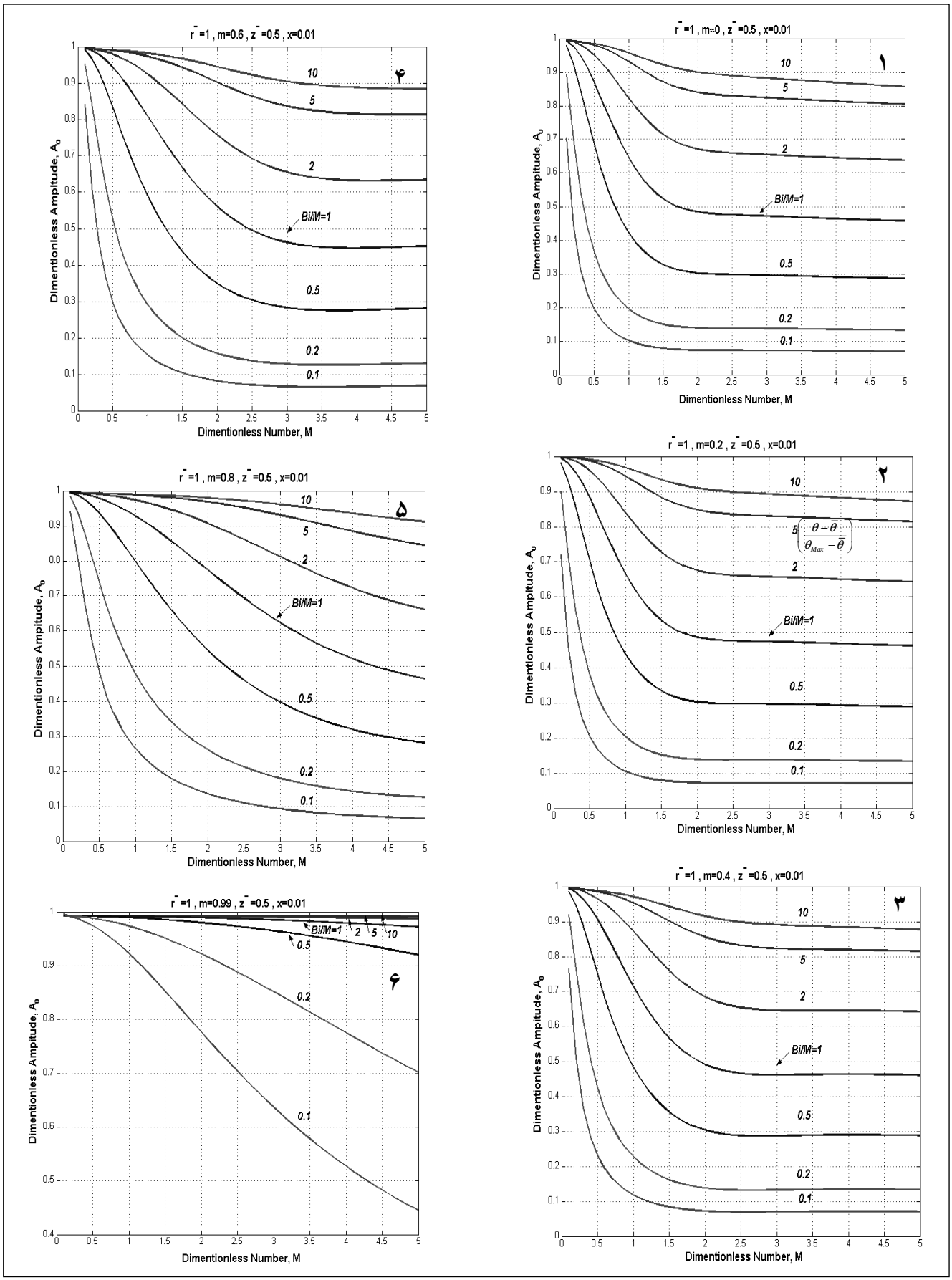
شکل ۴. نمودار تغییرات اختلاف فاز برحسب عدد بی بعد M

حال به بررسی تاثیر کمیت‌های بی بعد m و x (نسبت شعاع داخلی به خارجی و نسبت شعاع به طول) بر روی نمودار دامنه و اختلاف فاز می‌پردازیم.

۴-۱. تاثیر تغییرات m بر روی میدان دما

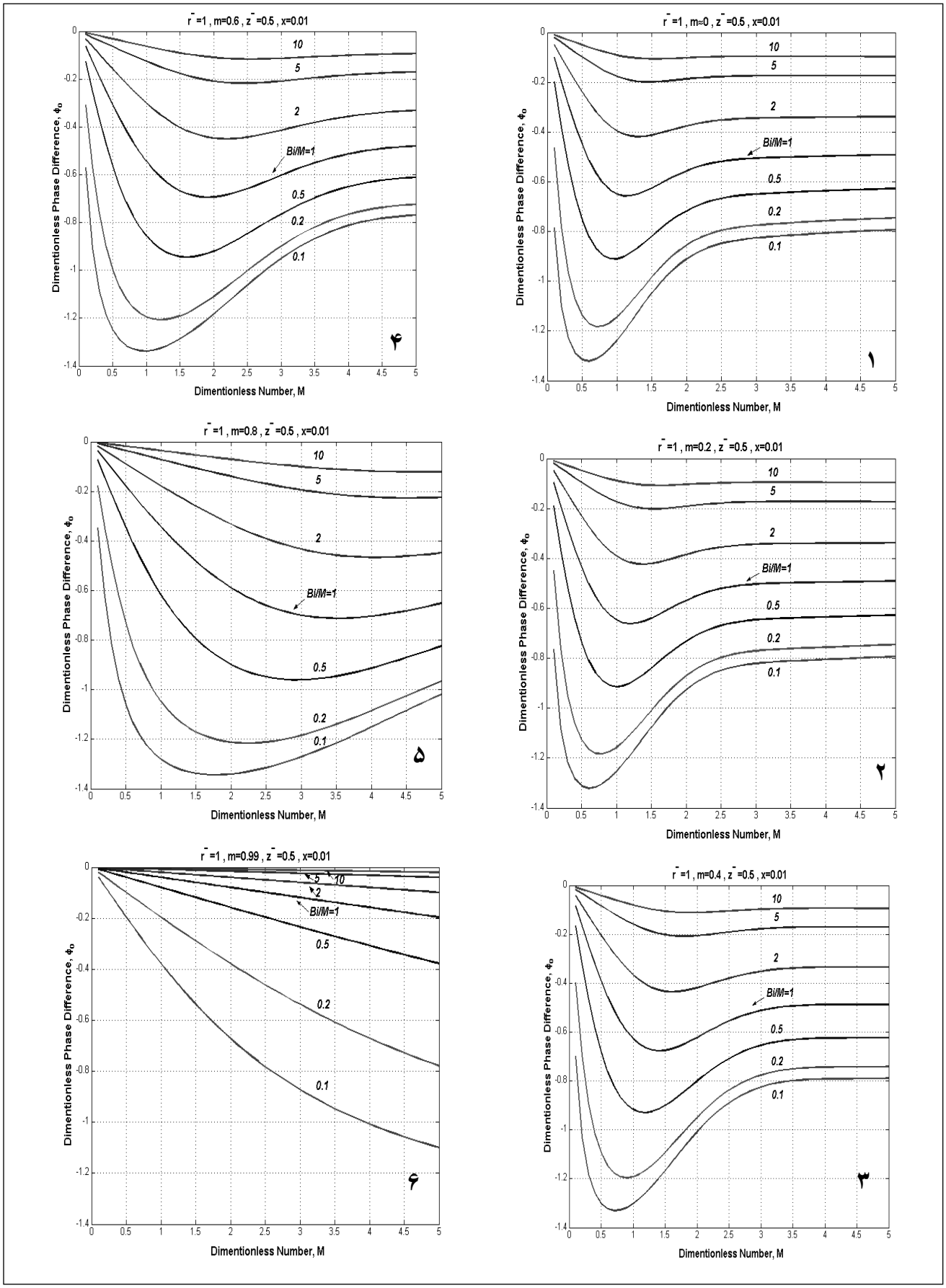
بدین منظور نمودارهای دامنه و اختلاف فاز را در سطح خارجی برای حالات مختلف، از استوانه توپر تا یک پوسته نازک، رسم می‌کنیم. در نمودارهای ذیل x=۰/۰۱ و z=۰/۵ می‌باشد.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]



شکل ۵-۱ الی ۵-۶. نمودار تغییرات دامنه برحسب عدد بی بعد m

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

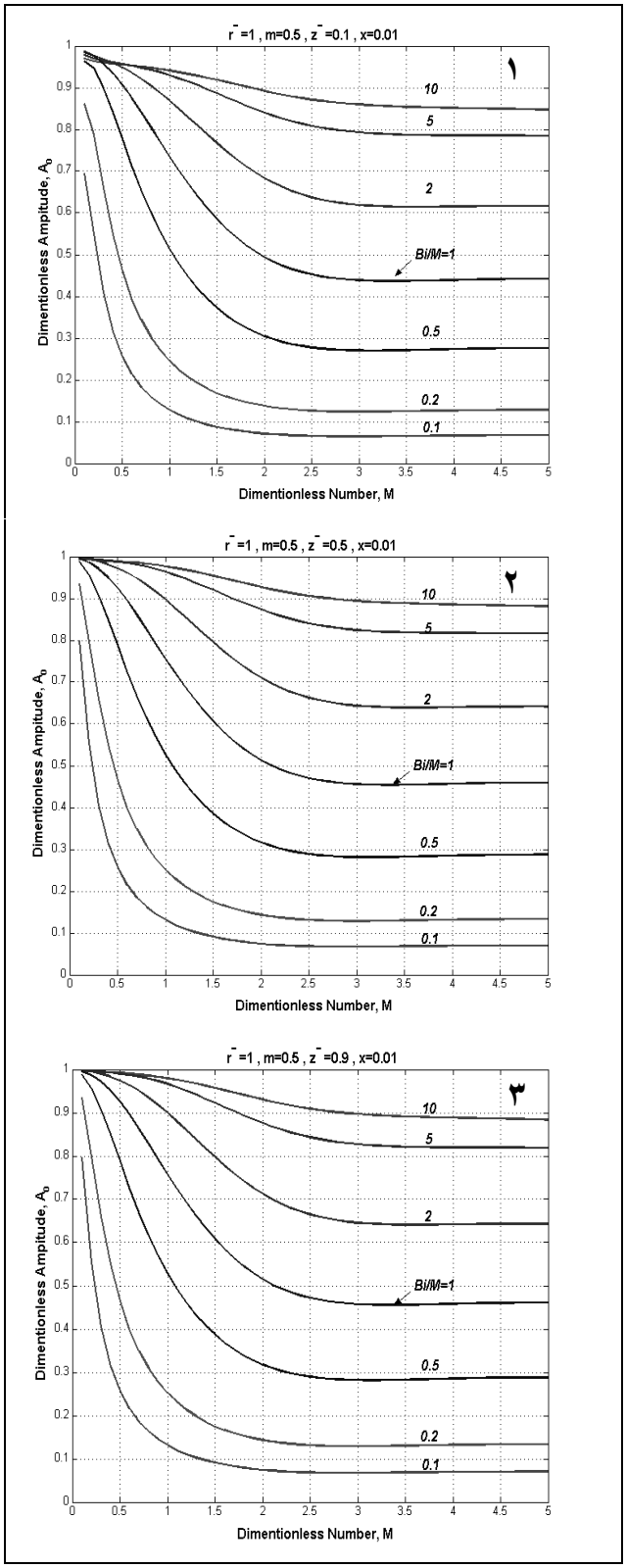


شکل ۶-۱ الی ۶-۶. نمودار تغییرات فاز برحسب عدد بی بعد m

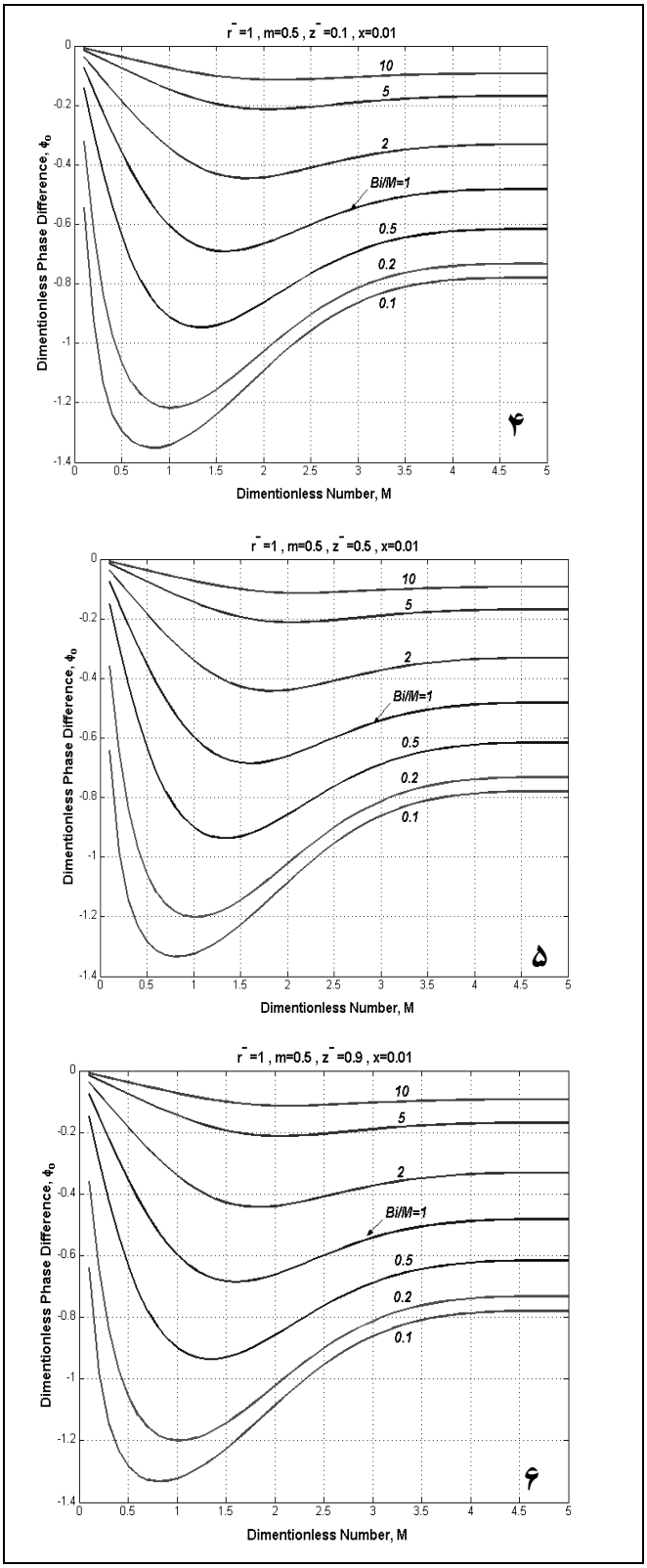
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

۲-۴. تاثیر تغییرات z بر روی میدان دما

در این حالت کمیت های دیگر ثابت بوده و میدان دمـــا را در طول استوانه و در سطح خارجی بدست می آوریم. در حل ذیل x=۰/۰۱ و m=۰/۵ می باشد.



شکل ۷-۱ الی ۷-۵. نمودار تغییرات دامنه برحسب عدد بی بعد $\bar{Z}$



شکل ۸-۱ الی ۸-۵ بررسی تغییرات فاز برحسب عدد بی بعد $\bar{Z}$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

۵. شار عبوری از استوانه

شار عبوری از استوانه با استفاده از میدان دما طبق رابطه ذیل محاسبه می گردد:

$$dQ = \rho\, C\big(\theta(0)-\theta(t)\big)\,dV \qquad (۱۰۰)$$

که در آن:

$$dV = r\,d\phi\,dr\,dz \qquad (۱۰۱)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$Q(t) = -\rho\, C 2\pi \int_{r=r_i}^{r_o}\int_{z=0}^{l}\theta(t)\,r\,dr\,dz \qquad (۱۰۲)$$

پس از بی بعد سازی رابطه فوق، با استفاده از رابطه (۹۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Q(\bar{t}) &= -2\pi r_o^2 l\rho\, C\int_{\bar{r}=m}^{1}\int_{\bar{z}=0}^{1}\theta(\bar{t})\,\bar{r}\,d\bar{r}\,d\bar{z} \\ &= -2\pi r_o^2 l\rho C\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma_s\left[J_1(\mu_j)-\dfrac{J_1(m\,\mu_j)Y_1(\mu_j)}{Y_1(m\,\mu_j)}\right]}{\left[\dfrac{1}{2}\bar{r}^2\left\{\phi_0^2(\mu_j\bar{r})+\phi_0'^2(\mu_j\bar{r})\right\}\right]_m^1} \\ &\cdot\frac{\omega_{js}^2}{w_{0s}\mu_j}\left[\phi_0(\mu_j)\left.\frac{\partial\eta(w_{0s}r)}{\partial r}\right|_{\bar{r}=1}-\left.\frac{\partial\phi_0(\mu_j r)}{\partial r}\right|_{\bar{r}=1}\eta(w_{0s})\right] \\ &\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2M^2}{\omega_{js}^2}\right)^2}}(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t}+\phi_{js})\right) \end{aligned} \qquad (۱۰۳)$$

با اختصار B_{njs} به عنوان ضریب سینوس، رابطه فوق به صورت ذیل خلاصه می‌گردد:

$$\begin{aligned} Q(\bar{t}) &= -2\pi r_o^2 l\rho C \\ &\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(B_{js}(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t}+\phi_{js})\Big) \end{aligned} \qquad (۱۰۴)$$

همچنین برای $t=T$ یا $\bar{t}=1$ داریم:

$$\begin{aligned} Q(1) &= -2\pi r_o^2 l\rho C \\ &\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(B_{js}(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(\phi_{js})\Big) \end{aligned} \qquad (۱۰۵)$$

در نتیجه:

$$\frac{Q(\bar{t})}{Q(1)} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(B_{js}(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t}+\phi_{js})\Big)}{\underbrace{\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(B_{js}(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(\phi_{js})\Big)}_{C}} \qquad (۱۰۶)$$

با اختصار مخرج کسر با C، به عبارت ذیل برای شار می‌رسیم:

$$\frac{Q(\bar{t})}{Q(1)} = \frac{1}{C}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(B_{js}(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t}+\phi_{js})\Big) \qquad (۱۰۷)$$

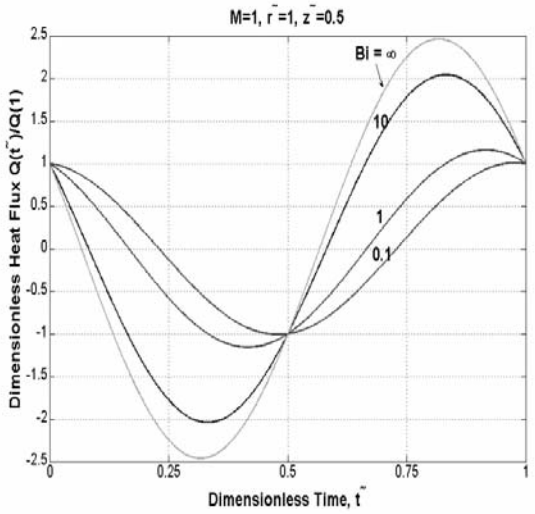
با محاسبه برآیند بردارهای $B_{js}(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(2n\pi\bar{t}+\phi_{js})$، به عبارت ذیل می‌رسیم:

$$\frac{Q(\bar{t})}{Q(1)} = B(\theta_{M_{o\max}}-\bar{\theta})\sin(2\pi\bar{t}+\phi) \qquad (۱۰۸)$$

که در آن:

$$B = \frac{\text{دامنه نوسانات شار حرارتی استوانه}}{\text{دامنه نوسانات دمای محیط خارج}} \qquad (۱۰۹)$$

$$\phi = \text{اختلاف فاز بین شار حرارتی و دمای محیط}$$



شکل ۹. نمودار تغییرات شار برحسب زمان

۶. بحث و نتیجه گیری

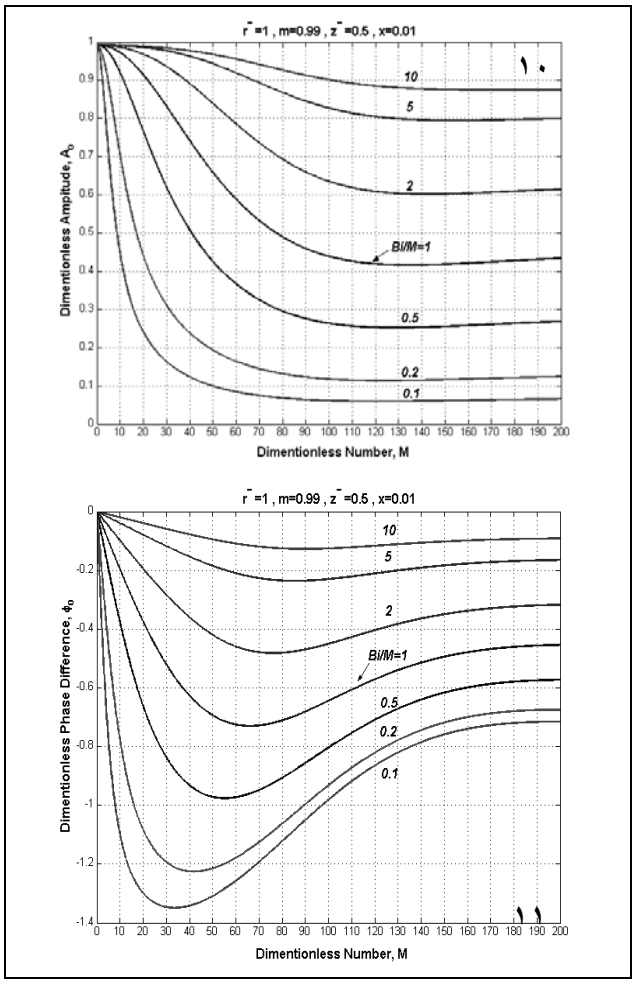
همانطور که مشاهده می‌شود دامنه نوسانات دما در استوانه، هنگامی که Bi/M افزایش می‌یابد به سمت عدد ۱ نزدیک می‌گردد و اختلاف فاز به سمت صفر میل می‌کند. این بدین معنی است که با افزایش عدد بیوت دمای استوانه از محیط اطراف پیروی می‌کند. همچنین در نمودارهای ۵ الی ۸ برای مقادیر کوچک M یعنی تغییرات آهسته دمای محیط این اتفاق می‌افتد.

در نمودارهای فوق با افزایش عدد M دامنه و فاز به یک عدد ثابت میل می‌کنند به عبارت دیگر با افزایش عدد M نسبت دامنه و اختلاف فاز مستقل از M می‌گردند.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]

همانطور که در نمودارهای ۵-۱ الی ۶-۵ مشاهده می‌گردد، با افزایش عدد m (افزایش شعاع توخالی استوانه)، نسبت دامنه و اختلاف فاز در M های بزگتری به مقادیر ثابتی می‌رسند. دو نمودار ذیل که همان نمودارهای ۵-۶ و ۶-۶ می‌باشند اینبار برای $M \in [0,200]$ رسم شده است که گویای این امر می‌باشند.

در نمودارهای ۷-۱ الی ۸-۵ مشاهده می‌شود، با آنکه میدان دما در طول استوانه متغیر است، لیکن مقادیر نسبت دامنه و اختلاف فاز تقریبا ثابت می‌باشند. در نمودارهای ۹-۱ الی ۱۰-۴ تغییرات نمودارهای نسبت دامنه و اختلاف فاز، نسبت به x ترسیم شده است.



شکل ۱۰ و ۱۱. نمودار تغییرات دامنه و فاز برحسب M

نکته قابل توجه در این نمودارها این است که با افزایش نسبت شعاع به طول (x)، به دلیل کوتاه شدن طول استوانه نسبت به شعاع، در Mهای کوچک (فرکانس‌های کم) شرایط مرزی قاعده‌های استوانه بر تغییرات آهسته دمای محیط خارج غلبه می‌کند و دما به سمت صفر میل می‌کند. نمودارهای شار ۱۱ و ۱۲، بیانگر این مطلب می‌باشند که با افزایش عدد m (افزایش شعاع توخالی استوانه)، دامنه شار افزایش می‌یابد و اختلاف فاز به سمت صفر میل می‌کند.

منابع

[1] Karlekar, B.V., Desmon, R.M., Heat Transfer, 1992.

[2] Özisik, M.N., *Heat Conduction* (2nd ed), John Wiley, New York, 1993.

[3] Trostel, R., "*Instationare Warm Espanungen in Einer Hohlkugel*, Engineer-Archiv, 1959, PP. 373-391.

[4] VDI-Wärmeatlas, Ed 14-17, Düsseldorf, 2003.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2026-09-14]