



A Hybrid Intelligent Algorithm for Portfolio Selection using Fuzzy Mean-Variance-Skewness

M. Shahmohammdi, L. Emami & Y. Zare Mehrjerdi*

Mohsen Shahmohammdi, Master Students, Department of Industrial Engineering, Yazd University, Yazd Iran, mohsen.e.shahmohammadi@gmail.com

Leila Emami, Master Students, Department of Industrial Engineering, Yazd University, Yazd Iran, leila.emamy@gmail.com

Yahia Zare Mehrjerdi, Associate Professor, Department of Industrial Engineering, Yazd University, Yazd Iran

Keywords

Portfolio Selection,
Fuzzy Mean-Variance-Skewness,
Fuzzy Simulation,
Neural Network,
and Genetic Algorithm

ABSTRACT

The most important problem for investors, at the beginning stages of their works, is the way of assigning their investment to one or more different investment alternatives in such a way that with the least possible risk the maximum return become obtainable. In the economic literature this is known as the problem of portfolio selection. This article tries to introduce an efficient way for supporting decision maker in the selection of appropriate portfolio for investment purposes. The portfolio is based upon the mean-variance-skewness with the return of portfolio is considered to be fuzzy to match with the world reality more. This article proposes a hybrid intelligent algorithm for finding an optimal or new optimal solution of the problem. Here, authors use Genetic Algorithm to find the right portfolio with the help of neural network and fuzzy computer simulation knowledge. Due to the fact that trained neural network was used the computation time has reduced tremendously in comparison with the straight use of the fuzzy simulation. Authors have used two example problems to demonstrate the efficiency of the proposed algorithm in comparison with other hybrid algorithms from the literature.

© 2013 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 23, No. 4, All Rights Reserved

* **Corresponding author.** Yahia Zare Mehrjerdi
Email: yazm2000@yahoo.com



ارائه الگوریتم هوشمند ترکیبی بر پایه مدل فازی میانگین - واریانس - چولگی برای انتخاب پرتفولیو

محسن شاه محمدی، لیلی امامی میبیدی و یحیی زارع مهرجردی*

کلمات کلیدی

چکیده:

انتخاب پرتفولیو
مدل فازی میانگین - واریانس - چولگی
شبیه سازی فازی
شبکه عصبی
الگوریتم ژنتیک

مهمترین مسئله مطرح برای سرمایه گذاران به خصوص در آغاز فعالیت اقتصادی، مسئله نحوه تخصیص سرمایه به یک یا چند گزینه مختلف سرمایه گذاری است تا ضمن حداکثر بازده، حداقل ریسک را متحمل شوند. این موضوع در ادبیات اقتصادی به عنوان مسئله انتخاب پرتفولیو مطرح است. این مقاله بر آن است که به ارائه روشی کارا به منظور پشتیبانی از فرد تصمیم گیرنده در انتخاب پرتفولیو مناسب جهت سرمایه گذاری بپردازد. در این مطالعه، انتخاب پرتفولیو مبنی بر مدل میانگین - واریانس - چولگی در نظر گرفته می شود که به منظور تطبیق هر چه بیشتر مدل با دنیای واقعی، بازده های سهام به صورت متغیرهای فازی فرض شده اند. در این مقاله به منظور حل این مدل غیر خطی یک الگوریتم هوشمند ترکیبی جهت رسیدن به جوابی بهینه / نزدیک به بهینه ارائه شده است. در روش ارائه شده، از الگوریتم ژنتیک به منظور جستجوی پرتفولیو و از شبکه عصبی مصنوعی آموزش داده شده با شبیه سازی فازی جهت تخمین بازده و ریسک پرتفولیو استفاده می شود. در این الگوریتم به جهت استفاده از شبکه عصبی مصنوعی در تخمین مقادیر، زمان محاسبات به طور قابل ملاحظه ای در مقایسه با استفاده مستقیم از شبیه سازی فازی کاهش یافته است. همچنین در انتها با ارائه چند مثال عددی کاربردی الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با چند الگوریتم ترکیبی دیگر سنجیده شده است.

۱. مقدمه

سرمایه گذاران همزمان به دنبال افزایش بازدهی و کاهش ریسک سرمایه گذاری های خود هستند از اینرو در چندین داریایی مختلف سرمایه گذاری می کنند و به عبارتی تشکیل پرتفولیو می دهند که این اقدام سبب کاهش ریسک کلی مجموعه سرمایه گذاری های آنها خواهد شد، از آنجا که کاهش ریسک و افزایش

بازدهی دو روی سکه سرمایه گذاری هستند، موضوع تشکیل پرتفولیو ی بهینه همواره بحثی اساسی در مباحث سرمایه گذاری است.

در اوایل دهه ۱۹۵۰ برای اولین بار مارکوویتز مدلی را جهت پیش بینی ارزش سهام بر اساس بازده منتظره و واریانس به عنوان شاخص ریسک معرفی کرد. مدل پرتفولیویی مارکوویتز در حقیقت یک مسئله بهینه سازی است که بر اساس دو معیار بازده منتظره و ریسک به دنبال پیدا کردن تعادل منطقی میان این دو معیار جهت به دست آوردن حداقل ریسک به ازای سطح معینی از بازده منتظره و یا حداکثر بازده منتظره در سطح مشخصی از ریسک می باشد [۱]. با ادامه تلاش محققان دیگر مدل ابتدایی مارکوویتز به طور گسترده ای توسعه داده شد که از آن جمله می توان به مدل میانگین - انحراف مطلق [۲-۴]، مدل میانگین - شبه واریانس [۵] اشاره نمود. خصوصیت بارز این مدل ها این است که

تاریخ وصول: ۸۹/۷/۱۹

تاریخ تصویب: ۹۰/۵/۳۰

محسن شاه محمدی، دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه یزد، mohsen.e.shahmohammadi@gmail.com
لیلی امامی میبیدی؛ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه یزد، leila.emamy@gmail.com
*نویسنده مسئول مقاله: دکتر یحیی زارع مهرجردی، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه یزد، yazm2000@yahoo.com

می گیرد، تئوری امکان^۱ می باشد [۱۹]. این نظریه تا حدودی مشابه نظریه احتمال می باشد، با این تفاوت که در تئوری احتمال وقوع یک پیشامد بر اساس تعداد وقوع آن در گذشته می باشد در حالی که در نظریه امکان، امکان وقوع یک حادثه علاوه بر مطالعات آماری درباره آن، به امکان وقوع آن واقعه از لحاظ منطقی نیز وابسته می باشد. با اینکه میزان امکان یک رویداد فازی، بسیار مهم و پرکاربرد است اما به هر حال این فاکتور فاقد خاصیت خود-دوگانگی^۳ است.

عدم داشتن این خاصیت منجر به این خواهد شد که حداکثر امکان یک رویداد فازی، یعنی یک، نتواند وقوع قطعی این رویداد را تضمین نماید و در نتیجه نمی توان به این مقدار اعتماد نمود. در سال ۲۰۰۲، ليو و ليو تئوری اعتبار^۴ را به عنوان یک گزینه رقیب برای امکان مجموعه فازی، ارائه کردند [۱۵]. امتیاز این معیار داشتن خاصیت خود - دوگانگی است. لذا نظریه اعتبار پس از ارائه براساس مفاهیم پایه ای مطرح شده در [۲۰] به سرعت گسترش یافت. توجه شود که در این مقاله هرگاه نامی از اعتبار یک رویداد فازی برده شد، منظور میزان شانس وقوع یک رویداد فازی است.

برای فهم هر چه بیشتر مطالب مطرح شده در این مقاله، در ادامه مروری اجمالی بر دانستنی های مورد نیاز مرتبط با متغیر های فازی و تئوری اعتبار خواهد شد.

تعریف ۱: فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ ، و U و r اعداد حقیقی باشند، میزان امکان یک رویداد فازی با مشخصه $\xi \geq r$ برابر است با:

$$\text{pos}\{\xi \geq r\} = \text{Sup } \mu(u) \quad , \quad u \geq r \quad (1)$$

تعریف ۲: فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ ، و U و r اعداد حقیقی باشند، میزان الزام^۵ یک رویداد فازی با مشخصه $\xi \geq r$ برابر است با:

$$\text{Nes}\{\xi \geq r\} = 1 - \text{Pos}\{\xi < r\} = 1 - \text{Sup}_{u < r} \mu(u) \quad (2)$$

تعریف ۳: فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ ، و U و r اعداد حقیقی باشند، میزان اعتبار یک رویداد فازی با مشخصه $\xi \geq r$ برابر است با میانگین حسابی مقدار امکان و الزام آن رویداد فازی. یعنی:

در آن ها تنها دو گشتاور اول توزیع بازده یعنی میانگین و واریانس به حساب آورده شده است. در حالی که بسیاری از محققان معتقد بودند که بدون داشتن اطلاعاتی مبنی بر متقارن بودن توزیع بازده، نمی توان گشتاورهای بالاتر از جمله گشتاور سوم را در نظر نگرفت. در نتیجه در برخی مطالعات [۶-۹] مفهوم تعادل منطقی میان میانگین و واریانس توسعه داده شده است تا معیار چولگی توزیع بازده را نیز در بر بگیرد و درحقیقت بدین ترتیب مدل توسعه یافته میانگین - واریانس - چولگی به منظور انتخاب بهینه پرتفولیو معرفی گردید.

در تمام مدل های ارائه شده فوق با این فرض که وضعیت بازار یک سهم در آینده تنها با استفاده از داده های مربوط به گذشته آن سهم قابل پیش بینی است بازده سهام به صورت متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده اند. در حالی که بسیاری بر این عقیده بودند با توجه به بازارهای متغیر کنونی و هم چنین نا کافی بودن داده های در دست برای سرمایه گذار، منطقی است که بازده ها به صورت فازی در نظر گرفته شوند [۱۰-۱۴]. ليو در سال ۲۰۰۲ ارزش انتظاری و واریانس متغیر تصادفی فازی را به ترتیب به منظور اندازه گیری بازده و ریسک یک پرتفولیوی فازی، تعریف نمود [۱۵]. پس از آن در چارچوب تئوری اعتبار، چندین مدل برای انتخاب پرتفولیوی فازی از جمله مدل میانگین - واریانس فازی [۱۶]، مدل فازی میانگین - شبه واریانس [۱۷] و مدل فازی میانگین - واریانس - چولگی [۱۸] برای انتخاب پرتفولیو معرفی گردیدند.

در این مطالعه مدل میانگین - واریانس - چولگی فازی^۱ در چارچوب تئوری اعتبار جهت انتخاب سبد سهام بهینه به کار گرفته شده است که برای حل آن یک الگوریتم هوشمند ترکیبی پیشنهاد شده است. ساختار مقاله به این صورت است که در قسمت ۲ ابتدا مفاهیمی از متغیرهای فازی بیان می شود، در قسمت ۳ مدل فازی میانگین - واریانس - چولگی تشریح گردیده و در قسمت ۴ الگوریتم هوشمند ترکیبی پیشنهادی به تفصیل معرفی شده است. در قسمت پایانی توسط چند مثال عددی کارایی مدل نشان داده شده است.

۲. مروری بر مفاهیم فازی

تئوری فازی بوسیله پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ در مقاله ای بنام مجموعه های فازی معرفی گردید. یکی از مهمترین بخش های نظریه فازی که برای مواجهه شدن با اکثر پدیده های جهان واقع که در آنها عدم قطعیت وجود دارد مورد استفاده قرار

^۱ Possibility

^۲ Self-dual

^۳ Credibility Theory

^۴ Necessity

^۱ Fuzzy mean- variance-skewness Model

۳. مدل فازی میانگین - واریانس - چولگی

جهت مدل سازی فازی میانگین - واریانس - چولگی برای انتخاب پرتفولیو، با در نظر گرفتن ξ_i به عنوان متغیر فازی برای بازده هر یک از سهام و x_i وزن (نسبت سرمایه گذاری) هر یک از سهام در پرتفولیو، عموماً بازده (ξ_i) هر سهم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\xi_i = \frac{p_i' + d_i - p_i}{p_i} \quad (7)$$

d_i, p_i', p_i به ترتیب برابر با قیمت سهم i در زمان حال، قیمت تخمینی سهم i در دوره بعد و مقدار عایدی تخمینی در طول دوره مورد نظر هستند. از آنجایی که p_i' و d_i در زمان حال برای سرمایه گذار نا مشخص هستند، اگر آنها به صورت متغیرهای فازی تخمین زده شوند، ξ_i نیز یک متغیر فازی است. بنابراین بازده یک پرتفولیو با n سهم با بردار وزنی x_1, x_2, \dots, x_n یعنی $\xi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$ مدل فازی میانگین - واریانس - چولگی، وقتی که سرمایه گذار خواهان ماکزیمم کردن چولگی یا شانس به دست آوردن بازده های بزرگتر با حداقل بازده منتظره به اندازه α و حداکثر ریسک با مقدار γ است به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \text{Sk}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \\ \text{S.to: } & \text{Vr}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \leq \gamma \\ & E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \geq \alpha \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

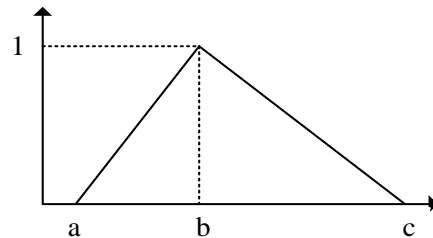
مسئله انتخاب پرتفولیو چنانچه سرمایه گذار بخواهد با به دست آوردن بازده منتظره، حداقل به اندازه α و چولگی، حداکثر به اندازه β ، ریسک را حداقل کند، به صورت زیر مدل سازی می شود:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \text{Vr}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \\ \text{S.to: } & E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \geq \alpha \\ & \text{Sk}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \geq \beta \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

در صورتی که سرمایه گذار برای سطح معینی از ریسک و چولگی خواهان ماکزیمم کردن بازده منتظره باشد، مدل به این صورت خواهد بود

$$\text{Cr}\{\xi \geq r\} = \frac{1}{2}(\text{Pos}\{\xi \geq r\} + \text{Nes}\{\xi \geq r\}) \quad (3)$$

برای مثال اگر فرض کنیم $\xi = (a, b, c)$ یک متغیر فازی مثلثی باشد، آنگاه تابع عضویت و میزان اعتبار آن به صورت شکل زیر خواهد بود:



شکل ۱. متغیر فازی مثلثی a, b, c

$$\mu(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b \\ \frac{c-r}{c-b} & b \leq r \leq c \\ 0 & r \geq c \end{cases}$$

$$\text{Cr}\{\xi \geq r\} = \begin{cases} 1 & r \leq a \\ \frac{2b-a-r}{2(b-a)} & a \leq r \leq b \\ \frac{c-r}{2(c-b)} & b \leq r \leq c \\ 0 & r \geq c \end{cases}$$

تعریف ۴: اگر ξ یک متغیر فازی باشد آنگاه ارزش انتظاری آن به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} \text{Cr}\{\xi > r\} dr - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq r\} dr \quad (4)$$

تعریف ۵: اگر ξ یک متغیر فازی با ارزش انتظاری محدود e باشد، آنگاه واریانس آن متغیر به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\text{Vr}[\xi] = E[(\xi - e)^2] \quad (5)$$

تعریف ۶: اگر ξ یک متغیر فازی با ارزش انتظاری محدود e باشد، آنگاه چولگی آن متغیر به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\text{Sk}[\xi] = E[(\xi - e)^3] \quad (6)$$

۴-۱. شبیه سازی فازی

شبیه سازی فازی اساساً یکی از انواع کاربردی شبیه سازی مونت کارلو است که برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط لیو و لامورا معرفی گردید [۲۱] و به صورت موفقیت آمیزی توسط لیو جهت حل مسائل بهینه سازی فازی به کار گرفته شد [۲۲]. هم چنین لیو همگرایی شبیه سازی فازی را اثبات نموده و کارایی آن را در تقریب اندازه دقیق توابع نشان داد [۲۳].

در این مقاله از شبیه سازی فازی جهت آموزش شبکه عصبی برای محاسبه میانگین، واریانس و چولگی بازده های فازی استفاده شده است. فرض کنید ξ_i متغیر فازی مربوط به سهم i ام با تابع عضویت μ_i و x_i متغیر تصمیم مسئله (وزن هر یک از سهام در پرتفولیو) باشند ($i = 1, 2, \dots, n$) و Ω تعداد سهام موجود است. همانطور که پیش تر توضیح داده شد، به منظور محاسبه ارزش انتظاری یک متغیر فازی می بایست، اعتبار مربوط به آن متغیر فازی را محاسبه کرد. لذا به منظور به دست آوردن میانگین، واریانس و چولگی پرتفولیو ($f(x, \xi) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$) باید مقدار $Cr\{f(x, \xi) \geq r\}$ محاسبه شود. بدین منظور ابتدا باید اعداد تصادفی حقیقی w_{ij} را به شرطی که $\mu_i(w_{ij}) \geq \varepsilon$ باشد، تولید شود.

اگر تعداد تکرار های شبیه سازی را N باشد، آنگاه منظور از w_{ij} عدد تصادفی تولید شده برای سهم i در تکرار j است. نکته دیگری که باید در اینجا ذکر شود، این است که ε یک مقدار بسیار کوچک و N یک عدد صحیح به اندازه کافی بزرگ است. پس از تولید مقادیر تصادفی w_{ij} ، مقدار $Cr\{f(x, \xi) \geq r\}$ از طریق رابطه زیر محاسبه می شود.

$$Cr\{f(x, \xi) \geq r\} = \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq j \leq N} \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(w_{ij}) \mid f(x, \xi) \geq r \right\} \right) + 1 - \left(\max_{1 \leq j \leq N} \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(w_{ij}) \mid f(x, \xi) < r \right\} \right) \quad (11)$$

فرآیند شبیه سازی فازی برای محاسبه $E(f(x, \xi))$ به صورت زیر خلاصه می شود:

گام اول: ابتدا E برابر با ارزش منتظره پرتفولیو را برابر صفر قرار بدهید و به گام بعدی بروید. ($E=0$)

گام دوم: اعداد تصادفی w_{ij} را به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, N$ با شرط $\mu_i(w_{ij}) \geq \varepsilon$ تولید کنید.

گام سوم: مقادیر a و b را که به ترتیب حداقل و حداکثر بازده پرتفولیو، در N بار آزمایش است را به کمک رابطه $a = \min_{1 \leq j \leq N} \{f(x, w_{ij})\}$ & $b = \max_{1 \leq j \leq N} \{f(x, w_{ij})\}$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \\ & \text{S.to: } \forall r [\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \leq \gamma \\ & \text{Sk}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \geq \beta \quad (10) \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

اگر متغیرهای فازی مربوط به بازده سهام مختلف در مدل های فوق، به صورت های خاصی مانند مثلثی یا ذوزنقه ای باشد، می توان مدل قطعی مربوط به مدل فازی مسئله را یافت و به کمک روش های تحلیلی، مدل قطعی حاصل شده را حل نمود. اما چنانچه تابع عضویت مربوط به متغیرهای فازی شکل های متفاوت و پیچیده تری داشته باشند، دستیابی به مدل های قطعی و استفاده از روش های تحلیلی برای حل چنین مدل هایی غیر ممکن و یا دست کم بسیار دشوار است [۱۸].

۴. الگوریتم هوشمند ترکیبی

در این مقاله، یک الگوریتم هوشمند ترکیبی متشکل از شبیه سازی فازی، شبکه عصبی و الگوریتم ژنتیک، جهت حل مدل پرتفولیویی ارائه شده پیشنهاد شده است. در این قسمت نحوه ارتباط و ترکیب این زیر الگوریتم ها توضیح داده خواهد شد. در حقیقت زیر مجموعه های الگوریتم هوشمند ترکیبی می بایست دو وظیفه اصلی را انجام دهند. نخست جستجوی جواب بهینه در فضای جواب مسئله و دوم محاسبه مقادیر میانگین، واریانس و چولگی به ازای هر جواب به دست آمده. در این مقاله از الگوریتم ژنتیک به عنوان جستجوگر و از شبکه عصبی به عنوان تخمین زننده مقادیر میانگین، واریانس و چولگی استفاده شده است. بدین منظور ابتدا با استفاده از شبیه سازی فازی نحوه محاسبه مقادیر میانگین، واریانس و چولگی پرتفولیو به شبکه عصبی آموزش داده می شود.

در مرحله بعد جستجوی جواب به کمک الگوریتم ژنتیک آغاز شده و هر جا نیاز به محاسبه میانگین، واریانس یا چولگی بود از شبکه عصبی آموزش داده شده در مرحله اول استفاده می گردد. شکل ۳ نحوه ارتباط میان زیر الگوریتم های الگوریتم هوشمند ترکیبی را نمایش می دهد.

توجه داشته باشید که در این شکل دو فلوجارت رسم شده که فلوجارت سمت چپ فرآیند آموزش شبکه عصبی و فلوجارت سمت راست فرآیند جستجوی جواب با کمک شبکه عصبی آموزش داده شده را نشان می دهد. سایر جزئیات مربوط به هر یک از این اجزاء در زیر بخش های زیر به تفصیل تشریح گردیده است.

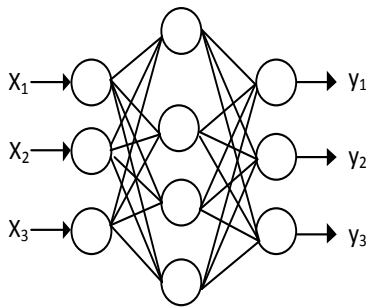
¹ Fuzzy Simulation

$$x_i^1 = \tanh\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}^0 x_j + w_{i0}^0\right), i=1,2,\dots,q \quad (12)$$

و خروجی نرون های لایه خروجی برابر است با:

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^q w_{ij}^1 x_j^1 + w_{i0}^1, i=1,2,3 \quad (13)$$

تا کنون روش ها و الگوریتم های مختلفی برای آموزش شبکه های عصبی ارائه شده است. یکی از مهمترین این الگوریتم ها، الگوریتم پس انتشار^۳ می باشد که در این مقاله به کار گرفته شده است.



شکل ۲. شبکه عصبی سه لایه پیشخور

بدین منظور ابتدا داده های آموزش شبکه به کمک شبیه سازی فازی تولید می شود، سپس با داده های به دست آمده و به کمک الگوریتم پس انتشار خطا، شبکه عصبی آموزش داده می شود تا در نهایت وزن های مناسبی جهت به دست آمدن بهترین تقریب ممکن برای مقادیر میانگین، واریانس و چولگی بازده های فازی به دست آید. به صورتی که اگر چنانچه با استفاده از شبیه سازی فازی داده های آموزشی کافی برای $i=1,2,\dots,N$ به دست آید. با در نظر گرفتن ε به عنوان مقدار خطا، در طول آموزش به شبکه عصبی، مقادیر وزن ها به طور پیوسته تنظیم می شود تا زمانیکه:

$$\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \|\hat{y}_i - y_i\|^2 \leq \varepsilon \quad (14)$$

۳-۴. الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک^۴ جزء روش های جستجو توسعه یافته در شاخه هوش مصنوعی و از تکامل یافته ترین روش های بهینه سازی است که اولین بار در سال ۱۹۸۹ توسط گلدبرگ ارائه شد. لیبو از جمله کسانی بود که الگوریتم ژنتیک را جهت حل بسیاری از مسایل بهینه سازی با پارامترهای فازی به کار گرفت [۲۲].

گام چهارم: عدد r را به صورت تصادفی در بازه (a, b) تولید کنید.

گام پنجم: اگر $r \leq 0$ ، آنگاه $E - Cr\{f(x, \xi) \geq r\}$

گام ششم: اگر $r > 0$ ، آنگاه $E + Cr\{f(x, \xi) < r\}$

گام هفتم: گام های چهارم تا پنجم را N بار انجام دهید و سپس به گام بعدی بروید.

گام هشتم: $E[f(\bar{x}, \bar{\xi})] \approx \frac{E(b-a)}{N}$ پس از محاسبه

ارزش انتظاری پرتفولیو (E) ، جهت محاسبه واریانس و چولگی پرتفولیو به ترتیب در الگوریتم فوق، $f(x, \xi)$ به وسیله $g(x, \xi) = (f(x, \xi) - E)^2$ و $h(x, \xi) = (f(x, \xi) - E)^3$ جایگزین می شود.

از نتایج به دست آمده در این قسمت جهت آموزش شبکه عصبی که در بخش بعد توضیح داده می شود استفاده خواهد شد.

۴-۲. شبکه عصبی

شبکه های عصبی^۱ یکی از مهمترین تکنیک های هوش مصنوعی محاسباتی هستند که ایده اصلی آن توسط والتر و همکاران در سال ۱۹۴۰ مطرح گردید.

این شبکه ها یکی از قویترین ابزار جهت تقریب توابع به شمار می آیند و نگاهی غیر خطی از فضای ورودی ها به فضای خروجی ها را انجام می دهد. شبکه عصبی پیشخور سه لایه از پر کاربردترین و مناسبترین مدل های شبکه عصبی جهت تقریب توابع غیر خطی به حساب می آیند.

در الگوریتم ارائه شده در این مقاله، شبکه عصبی آموزش داده شده توسط شبیه سازی فازی، جهت سرعت بخشیدن به محاسبات مربوط به میانگین، واریانس و چولگی بازده های فازی، به کار گرفته شده است. شبکه عصبی استفاده شده در این الگوریتم، یک شبکه سه لایه پیشخور^۲ است که لایه ورودی ها شامل Π نرون مربوط به Π سهم و Q نرون در لایه میانی یا پنهان و 3 نرون در لایه خروجی است که هر یک به ترتیب برابر با مقادیر میانگین، واریانس و چولگی بازده ها است. شکل ۱ شبکه عصبی سه لایه ای را با 3 نرون ورودی و 4 نرون در لایه پنهان و 3 نرون خروجی را نشان می دهد.

در این شبکه چنانچه w_i^0 بردار i امین نرون لایه پنهان و w_i^1 بردار وزنی i امین نرون خروجی و تابع عملیاتی نرون های لایه پنهان و لایه خروجی به ترتیب برابر با $h(x) = \tanh(x)$ و $h(x) = x$ باشند خروجی لایه پنهان برابر است با:

^۱ Neural Network

^۲ Feed-forward

^۳ Back-propagation

^۴ Genetic Algorithm

انجام می دهد. معمولاً سعی می شود عملگرها به نحوی تعریف شوند که تابع برازندگی جواب های جدید (فرزندان) بهتر از والدین باشد.

۱-۳-۳-۴. عملگر انتخاب (تولید مثل)

در الگوریتم ارائه شده از روش چرخ رولت^۷ که یکی از متداول ترین روش های انتخاب است، جهت انتخاب بهترین کروموزوم ها، استفاده شده است.

با توجه به اینکه در مسئله مورد بررسی این مقاله، تابع هدف کروموزوم های مختلف دارای مقادیر بسیار نزدیک به هم هستند از روش رتبه بندی جهت ارزیابی کروموزوم ها استفاده شد. بر اساس این روش پس از رتبه بندی کروموزوم ها، تابع ارزیابی بر مبنای رتبه به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\text{eval}(c_k) = \rho(1-\rho)^{k-1}, \quad k=1,2,\dots,\text{pop-size} \quad (16)$$

که در رابطه فوق k رتبه کروموزوم است و نیز یک ثابت از پیش تعیین شده در بازه (۱،۰) است. بعد از به دست آمدن تابع ارزیابی کروموزوم ها، به کمک روش چرخ رولت، یک جمعیت جدید به اندازه سایز جمعیت تشکیل می شود.

۲-۳-۳-۴. عملگر ادغام یا تقاطع

بدین منظور نخست باید، پارامتر p_c ، که بیانگر نسبت کروموزوم های شرکت کننده در پروسه ترکیب به کل جمعیت کروموزوم ها است مشخص شود. در این مقاله از ترکیب دو نقطه ای استفاده شده است. به این صورت که طبق شکل ۳ از آغاز کروموزوم انتخابی شروع می شود تا اولین نقطه جفت گیری از روی والد اول کپی می شود. رشته های بین نقطه اول و دوم جفت گیری از روی والد دوم کپی برداری می شود و مابقی از روی والد اول کپی می شود.

پس از تولید دو کروموزوم فرزند، موجه بودن آن ها را به کمک شبکه عصبی بررسی می شود. در صورت شدنی بودن، آن ها جایگزین کروموزوم های والد در جمعیت جدید خواهند شد. این عمل، تا جایی که به تعداد مشخص شده کروموزوم شدنی تولید شود و یا اینکه تعداد تکرار ها از حد مشخصی فراتر رود ادامه می یابد.

فرآیند جستجوی جواب در الگوریتم با یک مجموعه اولیه از جوابهای اختیاری که به هر یک از آن ها کروموزوم^۱ و به مجموع آن ها جمعیت^۲ نامیده می شوند، شروع شده و طی مراحل متوالی و با کمک عملگرهای تقاطع^۳ و جهش^۴ کروموزوم های جدید قوی تر (که میزان برازندگی^۵ بیشتری دارند) جای کروموزوم های ضعیف تر (که میزان برازندگی کمتری دارند) را می گیرند و به مرور جمعیت اصلاح می گردد. پس از چندین تولید نسل توسط الگوریتم، بهترین کروموزوم ها همگرا می شوند که به طور امیدبخشی جواب بهینه مسئله است.

در این مقاله از الگوریتم ژنتیک جهت رسیدن به پرتفولیوی بهینه بر پایه مدل فازی "میانگین-واریانس چولگی" استفاده شده است که در زیر بخش های زیر، مراحل اجرای این الگوریتم توضیح داده می شود.

۱-۳-۴. تعیین شکل جواب مساله

در این الگوریتم هر جواب $(x = x_1, x_2, \dots, x_n)$ به وسیله کروموزوم $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ کد می شود، در این حالت عمل تبدیل یک کروموزوم به جواب مربوط به آن از طریق رابطه زیر انجام می گیرد:

$$x_i = \frac{c_i}{\sum_{i=1}^n c_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad (15)$$

در این صورت محدودیت $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ نیز همواره برقرار خواهد بود.

۲-۳-۴. تشکیل جمعیت اولیه

جهت تولید جمعیت شدنی به اندازه سایز جمعیت^۲، ابتدا کروموزوم هایی به صورت تصادفی تولید می شود و موجه بودن آن ها توسط شبکه عصبی آموزش داده شده بررسی می شوند. چنانچه کروموزوم موجه بود، به عنوان یکی از اعضای جمعیت اولیه پذیرفته می شود. این فرآیند تا دستیابی به جمعیت اولیه ای با اندازه سایز جمعیت ادامه می یابد.

۳-۳-۴. انتخاب عملگرهای ژنتیکی

انتخاب عملگرها مهم ترین بخش الگوریتم ژنتیک می باشند. از آنجا که عملگرهای ژنتیکی عمل جستجو روی فضای جواب را

^۱ Chromosome

^۲ Population

^۳ Crossover

^۴ Mutation

^۵ Fitness

^۱ Pop-Size

^۷ Roulette Wheel

شبکه عصبی آموزش داده شده به وسیله شبیه سازی فازی استفاده کنید.)

گام ۲: مقدار تابع هدف را به کمک شبکه عصبی برای تمام کروموزوم های موجود محاسبه نمایید.

گام ۳: مقدار تابع ارزیابی بر مبنای رتبه هر یک از کروموزوم ها را توسط رابطه $eval(c_k) = \rho(1-\rho)^{k-1}$, $k=1,2,\dots, pop-size$ محاسبه نمایید.

گام ۴: با توجه به مقدار تابع ارزیابی به دست آمده، میزان برازندگی هر یک از کروموزوم ها را محاسبه نمایید.

گام ۵: کروموزوم ها را به کمک روش چرخ رولت و بر اساس میزان شایستگی هر کدام در جمعیت جدید کپی کنید.

گام ۶: کروموزوم ها را به کمک عملگر های ادغام و جهش به هنگام نمایید.

گام ۷: گام های ۲ تا ۶ را N بار انجام دهید. (N یک مقدار ثابت از پیش تعیین شده است و نشان دهنده تعداد نسل هایی است که برای رسیدن به جواب قابل قبول می بایست تولید شود.)

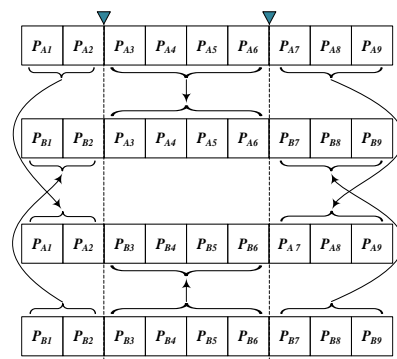
۵. مثال عددی

جهت نشان دادن کارایی الگوریتم پیشنهادی در به دست آوردن پرتفولیوی بهینه در این قسمت به ارائه چند مثال عددی و مقایسه آن با الگوریتم های مرجع [۲۵, ۲۴, ۱۸]، پرداخته می شود این مثال ها از دو جهت کارایی الگوریتم را بررسی می کند. از جهتی تأثیر استفاده از شبکه عصبی در الگوریتم هوشمند ترکیبی و از جهت دیگر الگوریتم پیشنهادی را در مقایسه با سایر راهکارهای موجود در این زمینه ارزیابی می کند. قابل ذکر است که تمام محاسبات و الگوریتم ها با نرم افزار MATLAB توسط یک کامپیوتر شخصی با پردازنده ۲/۲GHZ و حافظه ۴GB انجام شده است. مثال ۱: بازاری متشکل از ۱۰ سهم با بازده های فازی مستقل، مطابق با جدول ۱ را در نظر بگیرید.

جدول ۱. بازده های فازی ۱۰ سهم

سهم	بازده فازی	سهم	بازده فازی
۱	$(-0.3, 1.8, 2.3)$	۶	$(-0.8, 2.5, 3)$
۲	$(-0.4, 2.0, 2.2)$	۷	$(-0.6, 1.8, 3)$
۳	$(-0.5, 1.9, 2.7)$	۸	$(1+(r-1/6))^4$
۴	$(-0.6, 2.2, 2.8)$	۹	$(1+(\Delta r-7/4))^2$
۵	$(-0.7, 2.4, 2.7)$	۱۰	$\exp(-(r-1/6)^1)$

نرخ بازده هفت سهم اول دارای توابع عضویت مثلثی، دو سهم بعدی دارای تابع عضویت زنگوله ای و در نهایت سهم دهم دارای تابع عضویت نرمال است [۲۴].



شکل ۳. عملگر ترکیب روی دو کروموزوم والد و تولید دو کروموزوم فرزند

۳-۳-۴. عملگر جهش

بدین منظور ابتدا باید، پارامتر P_m که بیانگر احتمال جهش است، مشخص شود. در این مقاله جهش بر روی کروموزوم ها در دو مرحله صورت می گیرد. در مرحله اول با فرض اینکه که کروموزوم $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ جهت انجام جهش انتخاب شده باشد. برای این منظور ابتدا بردار D که در حقیقت یک بردار سطری n عضوی است و همه اعضای آن اعداد تصادفی $[0,1]$ می باشند، تولید شده و سپس کروموزوم جهش یافته Z را از رابطه زیر محاسبه نمایید.

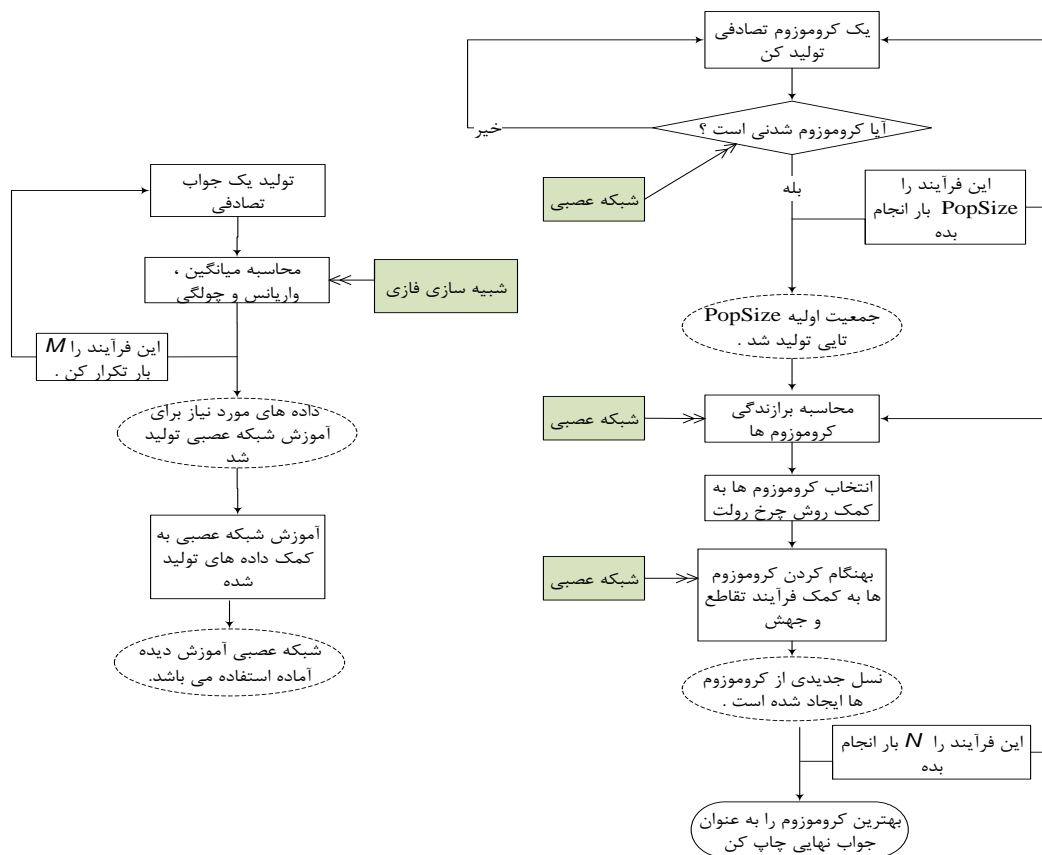
$$Z = C + M.D$$

که در این رابطه M یک عدد به اندازه کافی بزرگ می باشد. حال چنانچه کروموزوم Z موجه باشد، آنگاه کروموزوم جهش یافته Z جایگزین کروموزوم والد در جمعیت جدید می شود. در غیر این صورت یک M جدید را در بازه $(0, M)$ تولید می کنیم و مجدداً به کمک رابطه فوق کروموزوم جدید Z محاسبه می شود. این عمل را تا جایی که کروموزوم شدنی تولید شود و یا اینکه تعداد تکرارها از حد مشخصی فراتر رود ادامه می یابد.

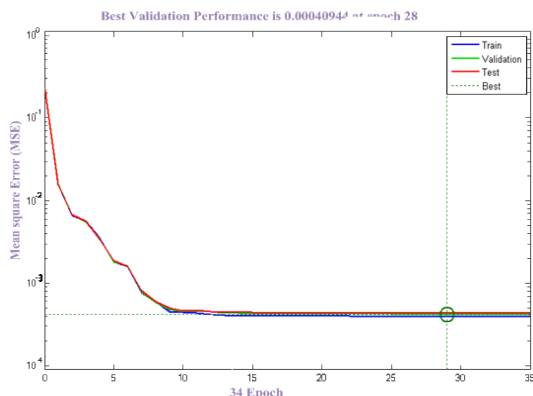
در مرحله دوم نیز با انتخاب کروموزومی به تصادف یکی از ارزش های انتخاب شده برابر با صفر قرار داده می شود (با توجه به نا مطلوب بودن انتخاب برخی از سهام). این عمل نیز تا جایی که کروموزوم شدنی تولید شود و یا اینکه تعداد تکرارها از حد مشخصی فراتر رود، ادامه می یابد. پس از طی مراحل انتخاب، ادغام و جهش، نسل جدیدی از کروموزوم ها به وجود خواهد آمد که آماده ارزیابی مجدد است. لذا الگوریتم ارائه شده به کار خود ادامه می دهد تا اینکه تعداد تکرار مشخص شده به پایان برسد.

به طور خلاصه مراحل مختلف الگوریتم ارائه شده به صورت زیر است:

گام ۱: یک جمعیت اولیه تصادفی، موجه و به اندازه $Pop-Size$ از کروموزوم ها تولید کنید. (برای بررسی شدنی بودن کروموزوم از



شکل ۴. فلوچارت الگوریتم پیشنهادی



شکل ۵. منحنی خطای شبکه عصبی

برای هریک از پارامترهای موجود در الگوریتم ژنتیک دامنه تغییرات به صورت $(50, 200)$ ، $Pop\ Size = (0.2, 0.7)$ ، $P_c = (0.3, 0.8)$ ، در نظر گرفته شد و الگوریتم بر روی مسائل نمونه به ازای ترکیب های مختلفی از مقادیر برای پارامترهای مذکور اجرا شد که در نتیجه تجزیه و تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای فوق در هنگام اجرای الگوریتم به صورت $Pop\ Size = 200$ ، $P_c = 0.4$ ، $P_m = 0.5$ به دست آمد. به منظور نشان دادن اثر استفاده از شبکه عصبی مصنوعی در الگوریتم

فرض کنید سرمایه گذاری به دنبال حداکثر کردن بازده انتظاری سرمایه گذاری خویش در این بازار است. به طوریکه توزیع بازده سرمایه گذاری او دارای حداکثر واریانس $1/2$ و حداقل چولگی -1 باشد. با توجه به صورت مسئله، مدل فازی این مسئله جهت حداکثر نمودن بازده منتظره پرتفولیو به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \text{Max } E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_{10} x_{10}] \\ & \text{S.to: } \text{Vr}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_{10} x_{10}] < 1.2 \\ & \text{Sk}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_{10} x_{10}] > -1 \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 10 \end{aligned} \tag{17}$$

قبل از اجرای الگوریتم ضروری بود که مقادیر پارامترهای موجود در الگوریتم تخمین زده شود. بدین ترتیب که ابتدا 5000 پرتفولیوی تصادفی تولید گردید. سپس مقادیر میانگین، واریانس و چولگی مربوط به هر یک از پرتفولیوها، توسط الگوریتم شبیه سازی فازی محاسبه گردید. در گام بعد یک شبکه عصبی سه لایه پیشخور با 10 نرون ورودی (تعداد سهم ها)، 15 نرون میانی و 3 نرون خروجی ساخته شد و در نهایت به کمک داده های تولید شده در گام اول و به کمک الگوریتم پس انتشار خطا، شبکه عصبی آموزش داده شد.

یابد. بنابراین الگوریتم ژنتیک پیشنهادی بهتر از الگوریتم ژنتیک ارائه شده در مرجع [۱۸] و آنیلینگ پیشنهادی مرجع [۲۴] عمل کرده است. نمودار همگرایی تابع هدف این مسئله در هر یک از الگوریتم های ۴ گانه، در شکل ۵ نشان داده شده است.

مثال ۲: مجدداً بازار مثال اول را در نظر بگیرید. اکنون فرض کنید سرمایه گذار خواهان حداقل کردن ریسک سرمایه گذاری از طریق حداقل نمودن واریانس توزیع بازده سرمایه گذاری خویش است، به شرطی که بازده انتظاری توزیع سرمایه گذاری او حداقل ۱/۵ و چولگی آن نیز حداکثر ۱- باشد این مسئله نیز به صورت زیر فرموله می گردد:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \text{Vr}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_{10} x_{10}] \\ \text{S.to: } & E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_{10} x_{10}] \geq 1.5 \\ & \text{Sk}[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_{10} x_{10}] > -1 \quad (18) \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \end{aligned}$$

این مثال توسط الگوریتم پیشنهادی این مقاله حل گردید که نتایج مربوط به آن را در جدول ۴ مشاهده می شود. ضمناً نمودار نحوه همگرایی الگوریتم برای این مسئله در شکل ۷ آورده شده است.

هوشمند ترکیبی، این مثال، یک بار به کمک الگوریتم هوشمند ترکیبی متشکل از الگوریتم ژنتیک و شبیه سازی فازی و بار دیگر به کمک الگوریتم هوشمند ترکیبی متشکل از الگوریتم ژنتیک،

شبیه سازی فازی و شبکه عصبی مصنوعی حل شد نتایج مربوط به این الگوریتم ها و زمان اجرای این الگوریتم ها در جدول ۲ آورده شده است. همانطور که مشخص است، استفاده از شبکه عصبی مصنوعی آموزش داده شده به کمک شبیه سازی فازی در مقایسه با استفاده مستقیم از شبیه سازی فازی در الگوریتم هوشمند ترکیبی، موجب کاهش مدت زمان اجرای الگوریتم به طور چشمگیری شده است. در ادامه به منظور نشان دادن کارایی الگوریتم، مثال ۱ را توسط الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم های مرجع حل نموده و نتایج در جدول ۳ آورده شده است. نکته ای که در این مقایسه می بایست مد نظر قرار گرفته می شد تأثیر شبکه عصبی مصنوعی بود. بدین جهت در تمام الگوریتم های فوق از شبکه عصبی مصنوعی که در مثال گذشته آموزش داده شده بود استفاده گردید تا بدین ترتیب تأثیر استفاده از شبکه عصبی مصنوعی در این مقایسه بلوکه شود.

چنانچه مشاهده می شود الگوریتم پیشنهادی این مقاله از لحاظ کارآمدی بعد از الگوریتم ترکیبی مرجع [۲۵] که متشکل از شبیه سازی فازی و شبیه سازی آنیلینگ است، توانسته است در مدت زمان حدود ۲۷ ثانیه به پرتفولیوی با بازده انتظاری ۱/۶۲ دست

جدول ۲. مقایسه نتایج استفاده از شبکه عصبی در الگوریتم

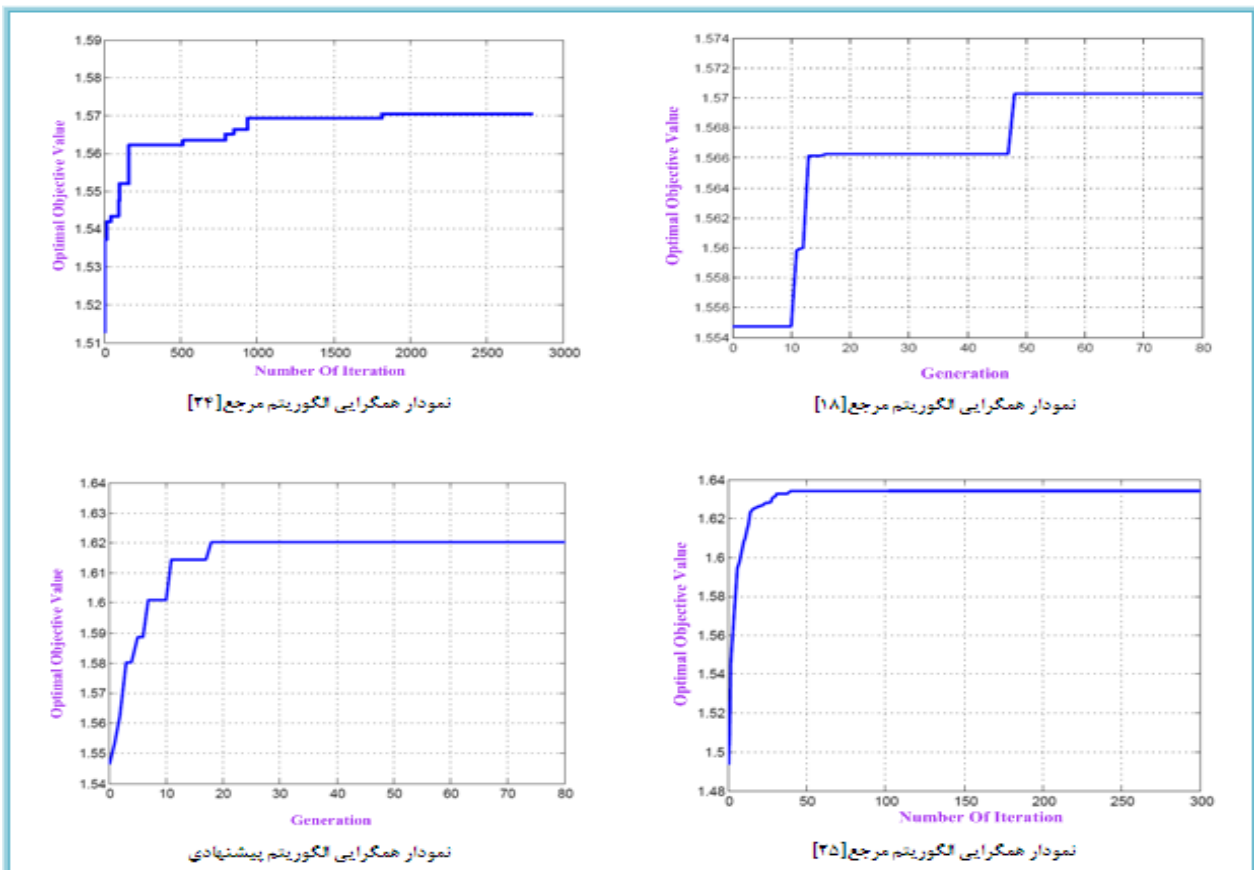
روش حل	پارامتر های مقایسه جواب			
	زمان اجرا (ثانیه)	چولگی	واریانس	بازده انتظاری (درصد)
الگوریتم پیشنهادی با شبکه عصبی	۲۷/۹	-۰/۰۳	۰/۷۴	۱/۶۲
الگوریتم پیشنهادی بدون شبکه عصبی	۱۰۲۴/۲	-۰/۱۹	۰/۷۷	۱/۶۰

جدول ۳. مقایسه نتایج الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم مرجع

روش حل	درصد سهام در پرتفولیوی بهینه										پارامتر های مقایسه جواب			
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	زمان اجرا	چولگی	واریانس	بازده انتظاری
الگوریتم پیشنهادی	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۳۲	۰/۰۰	۰/۵۳	۰/۰۰	۰/۱۵	۲۷/۹	-۰/۰۳	۰/۷۴	۱/۶۲
الگوریتم مرجع [۱۸]	۰/۰۱	۰/۰۹	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۱۶	۰/۲۴	۰/۰۸	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۱۹	۸۰/۴	-۰/۱۰	۰/۳۷	۱/۵۷
الگوریتم مرجع [۲۴]	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۲۱	۰/۱۶	۰/۲۳	۰/۰۷	۰/۲۴	۳۲/۲	-۰/۰۲	۰/۴۳	۱/۵۷
الگوریتم مرجع [۲۵]	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۵۸	۰/۰۰	۰/۴۱	۰/۰۰	۰/۰۱	۱۲/۲	-۰/۲۳	۰/۷۹	۱/۶۳

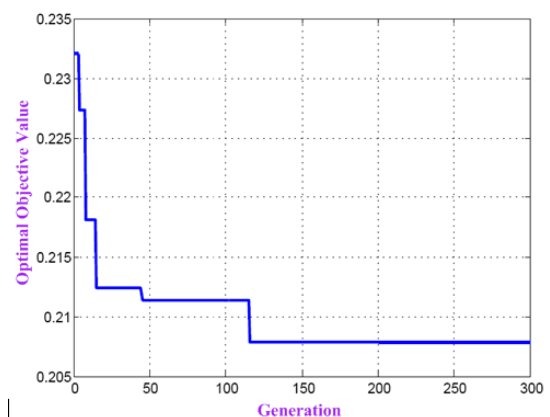
جدول ۴. نتایج به دست آمده برای مثال ۲

روش حل	درصد سهام در پرتفولیوی بهینه										پارامتر های مقایسه جواب			
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	زمان اجرا	چولگی	واریانس	بازده انتظاری
الگوریتم پیشنهادی	۰/۱۳	۰/۰۸	۰/۰۸	۰/۰۵	۰/۱۲	۰/۰۴	۰/۱۰	۰/۰۸	۰/۱۷	۰/۱۳	۱۳۵/۱	-۰/۰۵	۰/۲۲	۱/۵۰



شکل ۶. نمودار همگرایی الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم های مرجع برای مثال ۱

ارائه دهد. در راهکار ارائه شده، از الگوریتم ژنتیک به منظور جستجوی پرتفولیو و از شبکه عصبی مصنوعی آموزش داده شده با شبیه سازی فازی جهت محاسبه میانگین، واریانس و چولگی پرتفولیو استفاده شد که به دلیل استفاده از شبکه عصبی، زمان محاسبات به طور قابل ملاحظه ای در مقایسه با استفاده مستقیم از شبیه سازی فازی کاهش یافت. هم چنین الگوریتم ژنتیک استفاده شده در این مقاله توانست جواب های کارآمدتری را در مقایسه با الگوریتم های موجود بدهد. الگوریتم پیشنهادی نیز نسبت به تغییر پارامترها مقاوم بوده که می تواند حاکی از کارایی این راهکار باشد.



شکل ۷. نمودار همگرایی مثال ۲

مراجع

[۱] شاه محمدی، م، امامی میبیدی، ل، " ارائه الگوریتمی بر پایه شبیه سازی آنیلینگ جهت انتخاب پرتفولیو در مدل فازی میانگین-شبه واریانس"، هفتمین کنفرانس بین المللی مهندسی صنایع، مهر ۱۳۸۹، دانشگاه صنعتی اصفهان.

[2] Markowitz, H., *Portfolio Selection*, Journal of Finance 7, 1952, 77-91.

۶. نتیجه گیری

در این مطالعه جهت انتخاب پرتفولیوی بهینه از مدل میانگین - واریانس - چولگی در چارچوب تئوری اعتبار استفاده شد که بازده های مربوط به سهام در آن به صورت فازی فرض شدند. برای حل این مدل غیر خطی از یک الگوریتم هوشمند ترکیبی استفاده شد که توانست در زمان های توجیه پذیری جواب های مطلوبی را

- [17] Huang, X., *Portfolio Selection with Fuzzy Returns*, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 18 (4), 2007, 383-390.
- [18] Huang, X., *Mean-Semivariance Models for Fuzzy Portfolio Selection*, Journal of Computational and Applied Mathematics 217, 2008, 1-8.
- [19] Li, X., Qin, Z., Kar, S., *Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection with Fuzzy Parameter*, European Journal of Operational Research, 2009.
- [20] Zimmermann, H.J., *Fuzzy Sets and Its Application, Third Edition*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
- [21] Liu, B., *Uncertainty Theory: An Introduction to its Axiomatic Foundations*, Springer, Berlin, 2004.
- [22] Liu, B., Iwamura, K., *A Note on Chance Constrained Programming with Fuzzy Coefficients*, Fuzzy Sets and Systems 100 (1_3), 1998, 229-233.
- [23] Liu, B., *Theory and Practice of Uncertain Programming*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [24] Liu, Y.K., *Convergent Results About the use of fuzzy Simulation in Fuzzy Optimization Problems*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14 (2), 2006, 295-304.
- [25] Li, X., Zhang, Y., Wong, H.S., Qin, Z., *A Hybrid Intelligent Algorithm for Portfolio Selection Problem with Fuzzy Returns*, Journal of Computational and Applied Mathematics 233, 2009, 264-278.
- [3] Konno, H., Yamazaki, H., *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stockmark*. Management Science 1991; 37:519-31.
- [4] Feinstein, C.D., Thapa, M.N., *A Reformulation of a Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model*. Management Science 1993;39:1552-3.
- [5] Simaan, Y., *Estimation Risk in Portfolio Selection: the Mean Variance Model Versus the Mean Absolute Deviationmode*. Management Science 1997; 43: 1437-46.
- [6] Mao, J.C.T., *Models of Capital Budgeting*, E-V vs. E-S. Journal of Financial and Quantitative Analysis 1970; 5: 657-75.
- [7] Konno, H., Suzuki, K., *A Mean-Variance-Skewness Optimization Model*. Journal of the Operations Research of Japan 1995; 38: 137-87.
- [8] Lai, T., *Portfolio Selection with Skewness: a Multiple-Objective Approach*. Review of Quantitative Finance and Accounting 1991; 1: 293-305.
- [9] Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., Prakash, A.J., *Portfolio Selection and Skewness: Evidence from International Stock Market*. Journal of Banking and Finance 1997; 21: 143-67.
- [10] Liu, S.C., Wang, S.Y., Qiu, W.H., *A Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection with Transaction Costs*. International Journal of Systems Sciences 2003; 34 (4): 255-62.
- [11] Arenas, M., Bilbao, A., Rodriguez, M., *A Fuzzy Goal Programming Approach to Portfolio Selection*, European Journal of Operational Research 133, 2001, 287-297.
- [12] Carlsson, C., Fullér, R., Majlender, P., *A Possibilistic Approach to Selecting Portfolios with Highest Utility Score*, Fuzzy Sets and Systems 131, 2002, 13-21.
- [13] Parra, M., Terol, A., Uria, M., *A Fuzzy Goal Programming Approach to Portfolio Selection*, European Journal of Operational Research 133, 2001, 287-297.
- [14] Tanaka, H., Guo, P., *Portfolio Selection Based on Upper and Lower Exponential Possibility Distributions*, European Journal of Operational Research 114, 1999, 115-126.
- [15] Tanaka, H., Guo, P., Türksen, I., *Portfolio Selection Based on Fuzzy Probabilities and Possibility Distributions*, Fuzzy Sets and Systems 111, 2000, 387-397.
- [16] Liu, B., Liu, Y.K., *Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10 (4), 2002, 445-450.