نشریه بین‌المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۳، جلد ۱۹، پاییز ۱۳۸۷، صفحه ۱۱۱-۹۹
ویژه‌نامه مهندسی مکانیک

روش بالادست چندبعدی براساس مشخصه‌ها برای تحلیل جریان تراکم ناپذیر داخل حفره

کامیار زمزمیان[1]، سید اسماعیل رضوی[2] و احمد فرزدی[3]

چکیده: در این تحقیق، یک روش جدید بالادست دوبعدی کامل بر مبنای مشخصه‌های چندبعدی معادلات تراکم ناپذیر ناویر- استوکس ارائه شده است. معادلات تراکم ناپذیر با استفاده از روش تراکم پذیری مصنوعی تصحیح شده و معادلات پیوستگی و مومنتوم به یکدیگر کوپل شده اند. برخلاف طرح‌های محاسباتی موجود برپایه مشخصه ها برای جریان‌های تراکم ناپذیر (CB)، که همگی با فرض یک بعدی بودن جریان در جهت عمود بر مرز مشترک دو سلول بنا نهاده شده‌اند، روش حاضر برپایه مشخصه‌های کاملا دوبعدی جریان است و از هیچگونه فرض ساده کننده‌ای استفاده نمی‌کند. ساختار مشخصه‌های دوبعدی معادلات تراکم ناپذیر با تصحیح تراکم پذیری مصنوعی برای اولین بار با استفاده از تحلیل ریاضی به دست آمده و از آن برای ایجاد یک طرح محاسباتی بالادست برپایه مشخصه‌ها برای جریانهای تراکم ناپذیر لزج استفاده شده است. طرح محاسباتی ارائه شده MCB (multidimensional characteristic based) با روش گسسته سازی حجم محدود برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در این روش، به کار برده شده است. با استفاده از روش ارائه شده، جریان دوبعدی تراکم ناپذیر پایا داخل حفره در محدوده وسیعی از اعداد رینولدز مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج به دست آمده حاکیست روش جدید ارائه شده در هر دو شکل مرتبه اول و مرتبه دوم، از طرح‌های محاسباتی مرسوم CB نتایج دقیقتری را ارائه می‌دهد. روش پیشنهادی در شکل مرتبه دوم، همچنین با طرح محاسباتی مرکزی به همراه اضافه کردن لزجت مصنوعی برای پایدار ساختن حل نیز مورد مقایسه قرار گرفته است. علیرغم این مساله که طرح مرکزی در این حالت دارای دقت گسسته‌سازی کاملا مرتبه دوم است (به دلیل کارتزین بودن شبکه) با این حال طرح MCB مرتبه دوم حتی از طرح محاسباتی مرکزی نیز نتایج دقیق‌تری را در شبکه یکسان ارائه می‌دهد. با استفاده از روش بالادست ارائه شده برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در روش حجم محدود، نیازی به اضافه کردن لزجت مصنوعی حتی در اعداد رینولدز بالا نمی‌باشد و روش حل کاملا پایدار است. مزیت چشمگیر دیگر طرح محاسباتی MCB نرخ همگرایی سریع آن در مقایسه با روش‌های CB (که نرخ همگرایی کند آن در ادبیات فن به دفعات ذکر شده است) و طرح مرکزی می‌باشد. در نهایت نتایج به دست آمده با استفاده از طرح MCB مرتبه دوم با نتایج متعدد موجود در ادبیات فن مورد مقایسه قرار گرفته است که در تمامی موارد توافق بسیار خوبی بین آنها مشاهده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: جریان تراکم ناپذیر، تراکم پذیری مصنوعی، معادلات ناویر- استوکس، مشخصه های چندبعدی، روابط سازگاری، بیضی ماخ.

این مقاله در تاریخ ۸۳/۴/۳۰ دریافت و در تاریخ ۸۶/۶/۱۴ به تصویب نهایی رسیده است.

کامیار زمزمیان، عضو هیات علمی، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز، K_zamzamian@yahoo.com

دکتر سید اسماعیل رضوی، استادیار، دانشکده فنی و مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز. Razavi@tabrizu.ac.ir

دکتر احمد فرزدی، استادیار، دانشکده فنی و مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز. Afarzadi@yahoo.com

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

۱. مقدمه

مفهوم تراکم پذیری مصنوعی (Artificial compressibility) برای اولین بار توسط Chorin و به منظور حل پایای معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر ابداع شد [۱]. با این تکنیک، معادلات پیوستگی و مومنتوم برای ایجاد امکان روش زمانروی (time marching)، با اضافه کردن یک جمله مجازی به معادله پیوستگی به یکدیگر کوپل می شوند و معادلات از ماهیت بیضوی به هذلولوی تبدیل می شوند. در طول حل زمانروی، شرط تراکم ناپذیری تضعیف می شود اما در نهایت با رسیدن به جواب پایا، جمله اضافه شده در معادله پیوستگی به صفر میل کرده و جوابهای واقعی تراکم ناپذیر حاصل می شوند. انتخاب پارامتر تراکم پذیری مصنوعی تاثیری بر جوابهای نهایی نداشته و تنها روند همگرایی به حالت پایا را تحت تاثیر قرار می دهد [۲]. طرح های محاسباتی مختلفی برای گسسته سازی معادلات تراکم پذیری مصنوعی مورد استفاده قرار گرفته است. Farmer و همکاران روش میانگین گیری مرکزی با اضافه کردن لزجت مصنوعی مرتبه چهار Jameson برای جلوگیری از نوسانات و پایدار کردن حل را به کار بردند [۳]. طرح های محاسباتی مورد استفاده برای گسسته سازی معادلات تراکم پذیری مصنوعی شباهت های زیادی با روش های حل جریانهای تراکم پذیر دارند. محققان زیادی روشهایی از نوع جداسازی اختلاف شار (Flux difference splitting) را برای معادلات تراکم پذیری مصنوعی به کار برده اند. Rogers و همکاران [۴]، Liu و همکاران [۵]، Kallinderis و همکاران [۶] و Yuan [۷]، طرح محاسباتی جداسازی اختلاف شار با حلگر ریمن Roe را برای گسسته سازی معادلات تراکم پذیری مصنوعی مورد استفاده قرار دادند. روش مورد استفاده توسط آنها برپایه میانگین گیری Roe است که بر معادلات تراکم پذیری مصنوعی اعمال شده و بردارهای شار جابجایی محاسبه شده تماما توابعی از پارامتر تراکم پذیری مصنوعی می باشند. با مراجعه به تاریخچه طرح های محاسباتی می توان دریافت که روش مشخصه ها ابتدا برای تحلیل معادلات تراکم ناپذیر مورد استفاده قرار گرفتند. اضافه کردن جمله تراکم پذیری مصنوعی در روش ابداعی توسط Chorin، سبب شد که معادلات جریانهای تراکم ناپذیر نیز توسط روش مشخصه ها مورد تحلیل قرار گیرند. برای اولین بار، Drikakis و همکاران روابط یک بعدی مشخصه های معادلات تراکم پذیری مصنوعی را برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در روش حجم محدود در شبکه بندی باسازمان مورد استفاده قرار دادند [۸].توسعه روش مذکور برای جریانهای سه بعدی در مرجع [۹] و به همراه روش شبکه چندگانه در مرجع [۱۰] انجام شده است. روش ایشان توسط Zhao و همکاران برای شبیه سازی جریانهای تراکم ناپذیر به همراه انتقال حرارت در شبکه های بی سازمان دو و سه بعدی توسعه داده شد [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵]. این روش ها بر مبنای محاسبه متغیرهای جریان در امتداد مسیرهای یک بعدی مشخصه‌های معادلات تراکم پذیری مصنوعی در جهت عمود بر مرز مشترک بین دو سلول با استفاده از مقادیر آنها در زمان قبل می‌باشد. روش CB (characteristic based) ذکر شده توسط محققان زیادی برای محاسبه طیف وسیعی از جریانهای تراکم ناپذیر مورد استفاده قرار گرفته است.

Siong و همکاران، یک روش ضمنی حجم محدود برپایه مشخصه ها را برای شبیه سازی جریان تراکم ناپذیر در محیط متخلخل با استفاده از شبکه بی سازمان ارائه دادند [۱۶]. Drikakis و Shapiro روش تراکم پذیری مصنوعی به همراه یک طرح محاسباتی برپایه مشخصه‌های یک بعدی معادلات را برای تحلیل جریانهای تراکم ناپذیر با چگالی‌های مختلف به کار بردند [۱۷، ۱۸]. نمونه های دیگر از تحلیل جریانهای تراکم ناپذیر با روش تراکم پذیری مصنوعی به همراه طرح‌های محاسباتی برپایه مشخصه ها (CB) را می توان در مراجع [۱۹] تا [۲۳] یافت.

همانطورکه در مثال‌های متعدد موجود در ادبیات فن می‌توان مشاهده نمود، تمامی طرح‌های محاسباتی برپایه مشخصه‌ها برای گسسسته سازی معادلات تراکم پذیری مصنوعی، از فرض های ساده کننده‌ای مانند یک بعدی بودن جریان در جهت های خاص استفاده می کنند. بدیهی است با انجام چنین فرضیاتی، طرح محاسباتی با استفاده از روابط یک بعدی جریان چند بعدی را تحلیل می‌کند و لذا فیزیک واقعی چندبعدی جریان نادیده گرفته می‌شود. این فرضیات طرح‌های محاسباتی موجود را کاملاً وابسته به شبکه کرده و از توانایی ارائه نتایج دقیق، زمانی که شبکه با ناپیوستگی های موجود در میدان سیال سازگار نباشد، می‌کاهند. به منظور در نظر گرفتن طبیعت فیزیکی چندبعدی جریان، طرح روشهای محاسباتی که از جهت های واقعی انتشار اطلاعات در میدان جریان سیال استفاده کنند، ضروری است. ایده طرح روش های محاسباتی بالادست چندبعدی بر اساس مشخصه ها برای جریانهای تراکم ناپذیر اویلر قبلا انجام شده و مثال های گوناگونی از آن را می توان در تاریخچه تحلیل عددی جریانهای تراکم پذیر یافت. این در حالیست که برای جریانهای تراکم ناپذیر و معادلات تراکم پذیری مصنوعی، به دلیل پیچیدگی ریاضی حاکم بر این معادلات، تعمیم روش های بالادست برپایه مشخصه ها به حالت های چندبعدی تاکنون انجام نگرفته است. همانطور که گفته شد، تمامی طرح های بالادست موجود در این زمینه از روابط حاکم بر سیال یک بعدی استفاده کرده و از این رو دچار مشکلات زیادی مانند نرخ بسیار کند همگرایی شده اند که در مراجع مشخصی مانند [۲۳، ۳۱، ۳۲] به آن اشاره شده است. در این مقاله، برای اولین بار، ساختار مشخصه‌های دوبعدی معادلات تراکم پذیری مصنوعی با استفاده از یک روش ریاضی به دست آمده است. با استفاده از روابط مشخصه‌ای استخراج شده، یک طرح محاسباتی دوبعدی کاملا بالادست بدون فرض ساده کننده یک بعدی بودن جریان، برای

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

گسسته سازی معادلات تراکم ناپذیر تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی ارائه شده است. طرح محاسباتی ارائه شده برای تحلیل جریان تراکم ناپذیر پایا داخل حفره در اعداد رینولدز بالا مورد استفاده قرار گرفته و نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از طرح‌های مرسوم CB و میانگین گیری مرکزی مورد مقایسه قرار گرفته است.

۲. ساختار مشخصه های دوبعدی برای جریان تراکم ناپذیر

به منظور استخراج روابط مشخصه های جریان تراکم ناپذیر لزج، ابتدا معادلات اویلر متناظر آنها در نظر گرفته می‌شود [۱۱]. معادلات اویلر تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی در حالت دوبعدی و بی بعد عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \end{cases} \qquad (۱)$$

برای استخراج روابط مشخصه ای این معادلات، یک رویه مشخصه فرضی با معادله $f(x,y,t)=0$ در نظر گرفته می شود. با استفاده از روابط سینماتیکی، به منظور ارتباط بین مشتقات جزئی و مشتق کامل پارامترها در روی رویه مورد نظر [۲۴]، معادلات (۱) به شکل زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{bmatrix} f_t/\beta & f_x & f_y \\ f_x & \psi & 0 \\ f_y & 0 & \psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dp \\ du \\ dv \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

در روابط بالا، پانویس ها مربوط به مشتقات جزئی هستند و ψ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\psi=\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (۳)$$

شرط سازگاری دستگاه معادلات (۱) با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب در رابطه (۲) به صورت زیر به دست می آید:

$$\psi=0,\quad \psi=\beta\left(f_x^{\,2}+f_y^{\,2}\right)/\,f_t \qquad (۴)$$

مشابه با معادلات تراکم پذیر اویلر، از نمادگذاری $\hat{V}=(u,v,1)$ برای بردار سرعت مجازی (pseudo-velocity vector) استفاده می شود و بردار عمود بر سطح مشخصه به صورت $\hat{n}=(\cos\varphi,\sin\varphi,n_t)$ در نظر گرفته می شود [۲۵]. با نوشتن معادلات (۴) برحسب بردارهای $\hat{V},\ \hat{n}$، دو دسته از رویه های مشخصه متناظر با روابط زیر به دست می آیند:

$$\hat{V}.\hat{n}=0,\qquad \hat{V}.\hat{n}=\beta/n_t \qquad (۵)$$

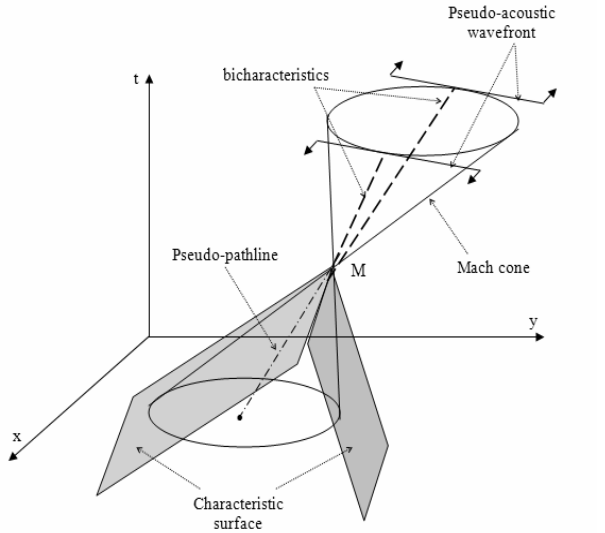
در روابط (۵)، n_t مولفه در جهت t بردار عمود بر سطح مشخصه است که برابر با $f_t/\sqrt{f_x^2+f_y^2}$ می باشد. با استفاده از عملیات ریاضی می توان نشان داد که n_t برابر با دو مقدار زیر است:

$$n_t=\frac{-(u\cos\varphi+v\sin\varphi)\pm\sqrt{(u\cos\varphi+v\sin\varphi)^2+4\beta}}{2}=n_1,n_2 \qquad (۶)$$

در واقع مسیرهای مشخصه متناظر به رابطه اول (۵) نشان دهنده خطوط جریان مجازی سیال (pseudo-pathline) می باشند و رابطه دوم (۵) متناظر با موج های اکوستیک مجازی (pseudo-acoustic waves) منتشر شده در میدان جریان سیال تراکم ناپذیر هستند. با استفاده از روابط (۵) و کمی عمیات ریاضی می توان نشان داد که معادلات مسیرهای مشخصه متناظر به رویه های اکوستیک مجازی عبارتند از:

$$\frac{dx}{dt}=u-\frac{\beta}{n_t}\cos\varphi,\qquad \frac{dy}{dt}=v-\frac{\beta}{n_t}\sin\varphi \qquad (۷)$$

با توجه به روابط (۶) می توان دریافت که مشابه با معادلات اویلر تراکم پذیر، در این مورد نیز سطوح مشصخه دوگانه به صورت رویه‌های ماخ در فضا- زمان متناظر به جریان سیال انتشار می یابند. صفحات مماس بر سطوح مشخصه تشکیل دو کنج ماخ را می دهند که در طرفین نقطه مورد نظر گسترش یافته و محدوده اثر و محدوده تاثیر (Domain of dependence, Domain of influence) آن نقطه را تشکیل می دهند (شکل ۱).



شکل ۱. ساختار مشخصه-های معادلات جریان تراکم ناپذیر تصحیح شده با تراکم پذیری مصنوعی.

در روابط (۷)، φ زاویه موج است، همانطورکه در شکل (۱) دیده می شود، متناظر به هر زاویه $0\le\varphi\le 2\pi$ دو مسیر مشخصه در روی کنج ماخ وجود دارد که جفت مسیر مشخصه

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

(Bicharacteristics) نامیده می شوند. از روابط به دست آمده نتیجه می شود که برخلاف معادلات تراکم پذیر اویلر، در این حالت سطح مقطع کنج ماخ با صفحه xy یک بیضی با محورهایی موازی با محورهای مختصات است که به نام بیضی ماخ نامیده می شود. روابط سازگاری دستگاه معادلات (۲) با قرار دادن مقادیر به دست آمده برای ψ از روابط (۴) به صورت زیر به دست می آیند:

$$\frac{\beta}{n_t}du+\cos\varphi\, dp=0, \qquad \frac{\beta}{n_t}dv+\sin\varphi\, dp=0 \qquad (۸)$$

روابط (۸) به ازای هر دو مقدار $n_t = n_1, n_2$ برقرار هستند و نشان دهنده روابط سازگاری حاکم در روی مسیرهای مشخصه می باشند.

۳. معادلات حاکم

معادلات ناویر- استوکس دوبعدی برای جریان تراکم ناپذیر نیوتونی تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \qquad (۹)$$

که در آن

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y}$$

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix},\ \mathbf{F}=\begin{bmatrix} \beta u \\ u^2+p \\ uv \end{bmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2+p \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{bmatrix} 0 \\ \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial x \end{bmatrix},\ \mathbf{S}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\begin{bmatrix} 0 \\ \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial y \end{bmatrix}$$

در روابط بالا $\mathbf{W}$ بردار متغیرهای اولیه جریان و $\mathbf{F, G}$ و $\mathbf{R, S}$ به ترتیب بردارهای شار جابجایی و لزج می باشند. β پارامتر تراکم پذیری مصنوعی و Re نشانگر عدد رینولدز می باشد. معادلات (۹) به شکل بی بعد نوشته شده اند که بی بعد سازی توسط پارامترهای زیر انجام شده است:

$$(x,y)=\left(x^*/l^*, y^*/l^*\right),\ t=\frac{t^*}{l^*/U_{ref}},\ (u,v)=\left(u^*/U_{ref}, v^*/U_{ref}\right),\ p=\frac{p^*-p_{ref}}{\rho_{ref}U_{ref}^2} \qquad (۱۰)$$

بالانویس * نشانگر پارامترهای بابعد و پانویس ref نشانگر مقادیر مرجع است. معادلات (۹) در شکل حجم محدود گسسته شده و با استفاده از قضیه انتگرال Green به صورت زیر نوشته می شوند:

$$A_{ij}\frac{\partial \mathbf{W}_{ij}}{\partial t}+\sum_{k=1}^{4}\left(\mathbf{F}\Delta y-\mathbf{G}\Delta x\right)_k=\sum_{k=1}^{4}\left(\mathbf{R}\Delta y-\mathbf{S}\Delta x\right)_k \qquad (۱۱)$$

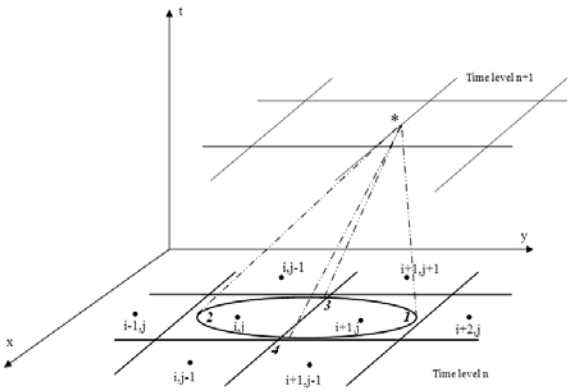
که در آن A_{ij} نشانگر مساحت سلول محاسباتی است.

۴. طرح محاسباتی عددی

از روابط مشخصه های به دست آمده در بخش (۲) می توان برای محاسبه بردارهای شار در مرز مشترک بین دو سلول در روش حجم محدود استفاده کرد. به منظور ایجاد یک طرح محاسباتی بالادست چندبعدی براساس مشخصه های معادلات تراکم پذیری مصنوعی، می توان مسیرهای مشخصه مختلف و روابط سازگاری متناظر به آنها را برای محاسبه بردارهای شار مرز مشترک به کار برد. در این مقاله، یک روش جدید بالادست کاملا دوبعدی برپایه مشخصه ها برای گسسته سازی معادلات تراکم ناپذیر ناویر- استوکس تصحیح شده با روش تراکم پذیری مصنوعی ارائه شده است. روابط سازگاری (۸) برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در مرز مشترک بین دو سلول مورد استفاده قرار گرفته اند در حالیکه بردارهای شار لزج با طرح معمولی مرکزی گسسته سازی شده اند.

۴-۱. بردارهای شار جابجایی

به منظور محاسبه بردارهای شار جابجایی در روی مرز مشترک بین دو سلول از مقادیر زمان قبل، چهار موج مجازی اکوستیک با مسیرهای تصویر شده موازی با محورهای مختصات انتخاب شده اند. همانطورکه در شکل (۲) نشان داده شده است، سطح مقطع کنج ماخ متناظر با نقطه مورد نظر در روی مرز مشترک دو سلول با صفحه xy، نشان دهنده محدوده فیزیکی انتشار اطلاعات از زمان قبل می باشد که نقطه مذکور را در زمان حاضر تحت تاثیر قرار می دهد. به منظور در نظر گرفتن فیزیک واقعی چند بعدی جریان، چهار موج اکوستیک مجازی متناظر به زوایای موج $\varphi=0,\ \varphi=\pi/2,\ \varphi=\pi,\ \varphi=3\pi/2$ انتخاب شده و معادلات (۸) در طول آنها گسسته سازی شده اند.



شکل ۲. سطح مقطع کنج ماخ با صفحه xy در زمان قبل و طرح محاسباتی برای تخمین جملات جابجایی.

به عنوان مثال برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در نقطه * در روی مرز مشترک دو سلول، روابط سازگاری زیر مورد استفاده قرار می گیرند:

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

$$\begin{cases}(\beta/n_t)du+dp=0, & \text{on the } \varphi=0 \text{ wave}\\ (\beta/n_t)du-dp=0, & \text{on the } \varphi=\pi \text{ wave}\\ (\beta/n_t)dv+dp=0, & \text{on the } \varphi=\pi/2 \text{ wave}\\ (\beta/n_t)dv-dp=0, & \text{on the } \varphi=3\pi/2 \text{ wave}\end{cases} \quad (۱۲)$$

با به کار بردن رابطه (۶) و گسسته سازی روابط (۱۲) داریم:

$$\begin{cases}p^*-p_1+A\left(u^*-u_1\right)=0\\ p^*-p_2+B\left(u^*-u_2\right)=0\\ p^*-p_3+C\left(v^*-v_3\right)=0\\ p^*-p_4+C\left(v^*-v_4\right)=0\end{cases} \quad (۱۳)$$

در رابطه بالا، ضرایب A, B, C و D به صورت زیر تعریف شده اند:

$$A=\frac{1}{2}\left(u_1-\sqrt{u_1^2+4\beta}\right),\ B=\frac{1}{2}\left(u_2+\sqrt{u_2^2+4\beta}\right),$$
$$C=\frac{1}{2}\left(v_3-\sqrt{v_3^2+4\beta}\right),\ D=\frac{1}{2}\left(v_4+\sqrt{v_4^2+4\beta}\right) \quad (۱۴)$$

در رابطه (۱۳)، p^*, u^*, v^* نشانگر مقادیر فشار و مولفه های بردار سرعت در مرز مشترک بین دو سلول هستند که با استفاده از معادلات (۱۳) و مقادیر پارامترهای جریان در نقاط 1, 2, 3, 4 در زمان قبل محاسبه می شوند (شکل ۲). با استفاده از مقادیر به دست آمده برای p^*, u^*, v^* بردارهای شار جابجایی در مرز مشترک دو سلول محاسبه می شوند. با استفاده از این روش، یک طرح محاسباتی کاملا بالادست براساس مشخصه ها به نام MCB (Multidimensional Characteristic Based) توسعه داده شده و برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در مرز بین دوسلول در روش حجم محدود مورد استفاده قرار گرفته است. برای طرح MCB مرتبه اول، مقادیر متغیرهای جریان در نقاط 1, 2 برابر با مقادیر سلول های مجاور در نظر گرفته شده و برای نقاط 3, 4 از دو سلول شامل وجه مورد نظر درونیابی شده است. به منظور بهبود طرح MCB به دقت مرتبه دوم، نقطه 1 از سلول های (i+1,j) و (i+2,j) و نقطه 2 از سلول‌های (i,j) و (i-1,j) درونیابی شده است. همچنین مقادیر جریان در نقطه 3 از مقادیر سلول های (i,j+1) و (i+1,j+1) و در نقطه 4 از مقادیر سلول های (i,j-1) و (i+1,j-1) درونیابی شده است.

۴-۲. بردارهای شار لزج

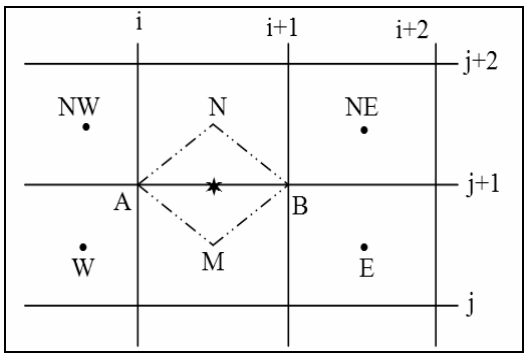
برای تخمین بردارهای شار لزج در معادلات ناویر- استوکس، نیاز به محاسبه مشتقات مرتبه اول پارامترهای جریان در مرز مشترک بین دو سلول است. در این تحقیق، گسسته سازی معمولی مرکزی برای تخمین جملات لزج در مرز مشترک دو سلول مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال، مشتق مرتبه اول در روی وجه AB در شکل (۳) با انتگرالگیری روی یک شبکه ثانویه به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{AB}=\frac{1}{S'}\iint_{S'}\frac{\partial\phi}{\partial x}dS=\frac{1}{S'}\oint_{\partial S'}\phi\,dy=\frac{1}{S'}\sum_{k=1}^{4}\phi_k\Delta y_k$$
$$=\frac{1}{S'}\left[0.5(\phi_N+\phi_A)\Delta y_{AN}+0.5(\phi_N+\phi_B)\Delta y_{NB}\right] \quad (۱۵)$$
$$+0.5(\phi_B+\phi_M)\Delta y_{BM}+0.5(\phi_M+\phi_A)\Delta y_{MA}\Big]$$

که در آن:

$$y_N=\frac{1}{4}\left[y_{i,j+1}+y_{i,j+2}+y_{i+1,j+2}+y_{i+1,j+1}\right],\ y_M=$$
$$\frac{1}{4}\left[y_{i,j}+y_{i,j+1}+y_{i+1,j+1}+y_{i+1,j}\right] \quad (۱۶)$$
$$\phi_A=\frac{1}{4}\left[\phi_{NW}+\phi_N+\phi_M+\phi_W\right],\ \phi_B=\frac{1}{4}\left[\phi_N+\phi_{NE}+\phi_E+\phi_M\right]$$

که در ϕ یکی از پارامترهای جریان است.



شکل ۳. شبکه ثانویه برای محاسبه جملات لزج.

۴-۳. انتگرالگیری زمانی

معادلات گسسته شده مکانی تشکیل یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل معمولی را می دهند که در زمان توسط یک روش صریح رانگ- کوتای مرتبه چهار انتگرالگیری می‌شوند. معادلات گسسته شده زمانی به شکل زیر هستند:

$$\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}+\mathbf{Q}=0 \quad (۱۷)$$

که در آن $\mathbf{Q}$ یک عملگر غیرخطی متشکل از جملات جابجایی و لزج است. طرح رانگ- کوتای مرتبه چهارم مورد استفاده در این تحقیق، به صورت زیر است:

$$W^{(0)}=W^{(n)},\qquad W^{(1)}=W^{(0)}-\frac{\Delta t}{2}Q^{(0)}$$
$$W^{(2)}=W^{(0)}-\frac{\Delta t}{2}Q^{(1)},\qquad W^{(3)}=W^{(0)}-\Delta t\,Q^{(2)} \quad (۱۸)$$
$$W^{(4)}=W^{(0)}-\frac{\Delta t}{6}\left(Q^{(0)}+2Q^{(1)}+2Q^{(2)}+Q^{(3)}\right)$$

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

بیشینه مقدار گام زمانی Δt از شرط پایداری که بر روی عدد کورانت CFL اعمال می شود، محاسبه می شود. عدد CFL به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathrm{CFL} = \left[\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{u^2+v^2+\beta}\right]\frac{\Delta t}{\Delta l} \qquad (۱۹)$$

که در آن Δl برابر با کمترین فاصله بین مرکز سلول مورد نظر تا مراکز سلول‌های مجاور است.

از نتایج عددی این مقاله معلوم می شود که استفاده از طرح محاسباتی پیشنهادی MCB مقدار CFL مجاز را تا حد چشمگیری افزایش داده و باعث افزایش سرعت همگرایی به حالت پایا می شود.

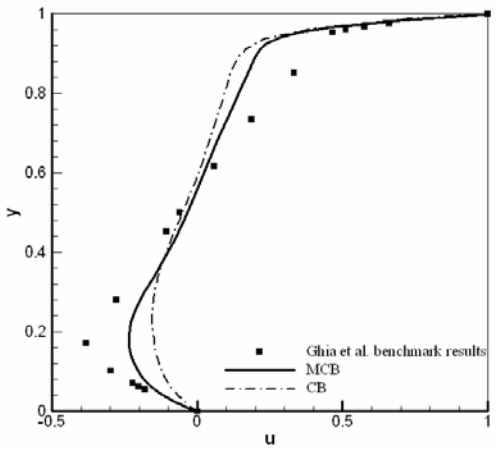
۴-۴. شرایط مرزی

در روی مرزهای جامد، شرط عدم لغزش برای سرعتها اعمال شده است. در مرزهای ساکن راست، چپ و پایینی مولفه‌های سرعت برابر با صفر و در مرز متحرک بالایی برابر با سرعت دیواره متحرک در نظر گرفته شده است. علاوه بر آن، فشار در روی مرز جامد با استفاده از معادله مومنتوم در جهت عمود بر دیواره (normal momentum) محاسبه شده است.

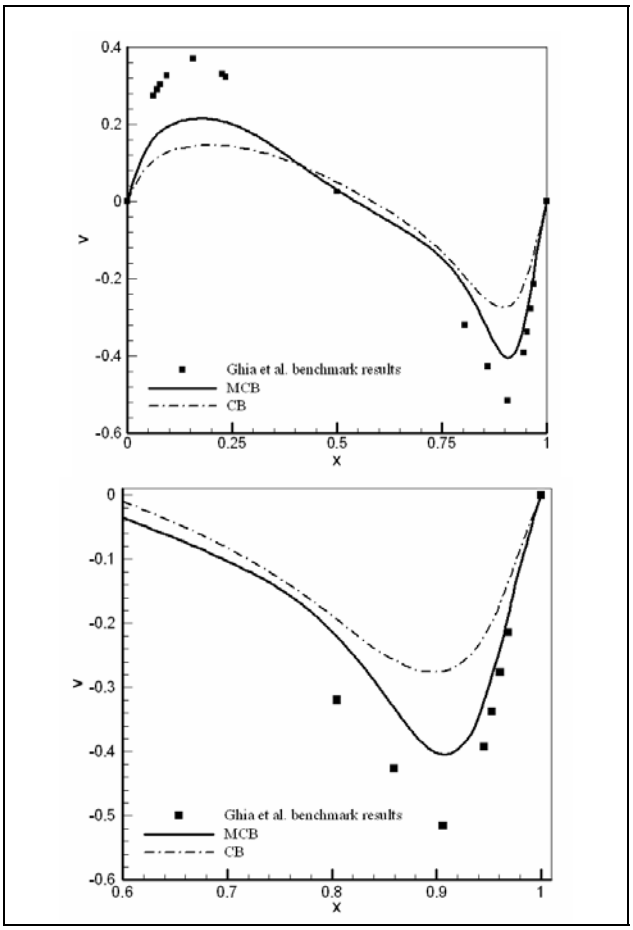
۵. بحث در نتایج

جریان تراکم ناپذیر و پایای لزج داخل یک حفره مربعی شکل، بارها توسط محققین به منظور ارزیابی توانایی روش های جدید ارائه شده مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰].

به منظور مقایسه توانایی روش ارائه شده MCB از نظر دقت جوابها و نرخ همگرایی به حالت پایا با روش های موجود، ابتدا حل جریان داخل حفره در عدد رینولدز ۱۰۰۰ (براساس سرعت دیواره متحرک و طول ضلع حفره) و در شبکه 40×40 در نظر گرفته شده است. در مورد تمامی نتایج ارائه شده، روش های مورد استفاده در تمامی موارد از جمله گسسته سازی زمانی، شرایط مرزی و گسسته سازی جملات لزج کاملا یکسان بوده و تنها در نحوه محاسبه بردارهای شار جابجایی تفاوت دارند. نتایج به دست آمده برای مولفه سرعت u در روی خط عمودی گذرا از مرکز حفره و مولفه v روی خط افقی گذرا از مرکز حفره با استفاده از طرح های مرسوم CB و روش جدید MCB در شکل های (۴) و (۵) نشان داده شده است. هر دو روش با دقت مرتبه اول مورد استفاده قرار گرفته اند و نتایج حاصل از آنها در مقایسه با نتایج معروف Ghia et al. [27] که در ادبیات فن به عنوان حل استاندارد (Benchmark solution) برای جریان داخل حفره شناخته شده است، نشان داده شده است. همانطورکه در شکل های (۴) و (۵) دیده می شود نتایج به دست آمده با استفاده از طرح محاسباتی MCB مرتبه اول به مراتب دقیقتر از روش مرسوم CB با دقت مرتبه اول در روی شبکه یکسان 40×40 می باشد.



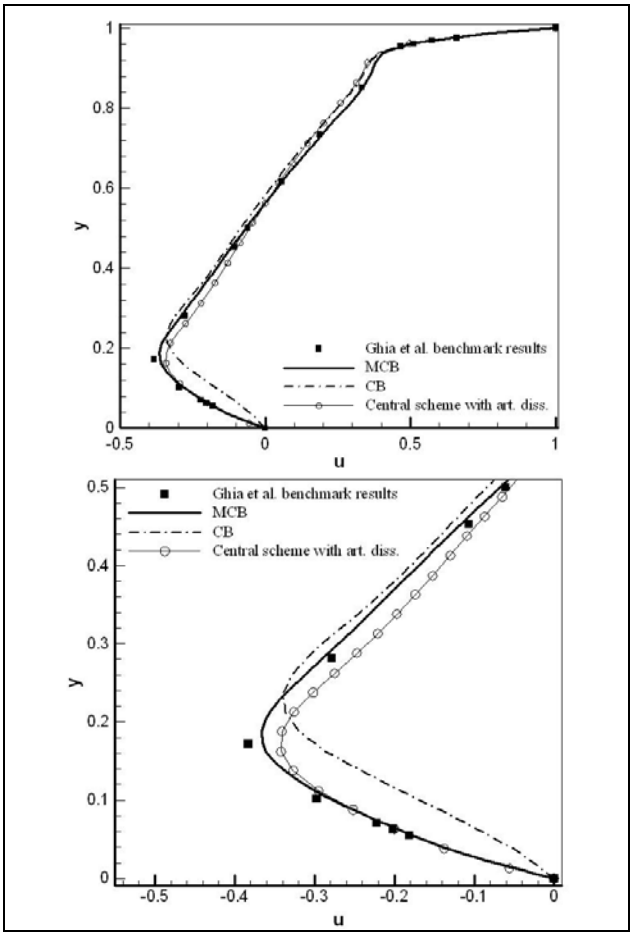
شکل ۴. مقایسه نتایج به دست آمده برای مولفه سرعت u در روی خط عمودی گذرا از مرکز حفره با استفاده از طرح های CB و MCB با دقت مرتبه اول در Re=1000 و شبکه 40×40.



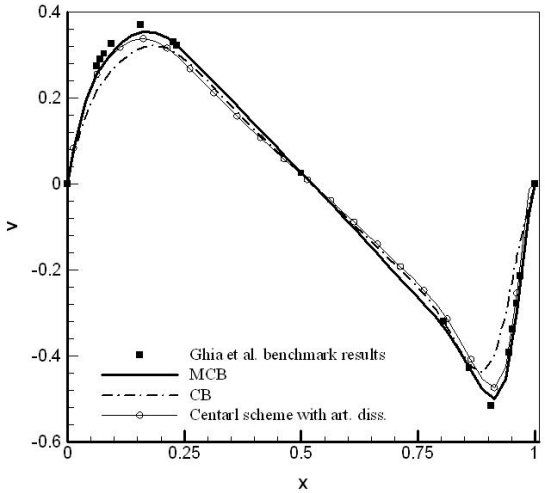
شکل ۵. مقایسه نتایج به دست آمده برای مولفه سرعت v در روی خط افقی گذرا از مرکز حفره با استفاده از طرح‌های CB و MCB با دقت مرتبه اول در Re=1000 و شبکه 40×40.

نتایج مشابه برای طرح های MCB و CB مرتبه دوم به همراه نتایج حاصل از روش میانگین گیری مرکزی با اضافه کردن لزجت مصنوعی در شکل های (۶) تا (۸) ارائه شده است.

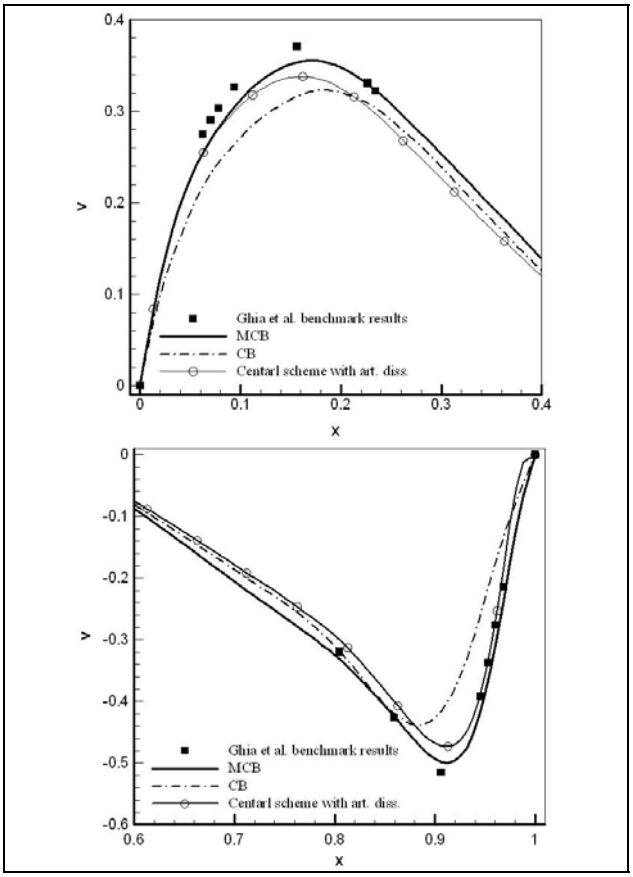
[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]



شکل ۶.مقایسه نتایج به دست آمده برای مولفه سرعت u در روی خط عمودی گذرا از مرکز حفره با استفاده از طرح های CB و MCB با دقت مرتبه دوم و طرح میانگین گیری مرکزی در Re=1000 و شبکه 40×40.



شکل ۷. مقایسه نتایج به دست آمده برای مولفه سرعت v در روی خط افقی گذرا از مرکز حفره با استفاده از طرح های CB و MCB با دقت مرتبه دوم و طرح میانگین گیری مرکزی در Re=1000 و شبکه 40×40.



شکل ۸. نمای بزرگ شده بیشینه و کمینه نمودار مولفه سرعت v در روی خط افقی گذرا از مرکز حفره با استفاده از طرح های CB و MCB با دقت مرتبه دوم و طرح میانگین گیری مرکزی در Re=1000 و شبکه 40×40.

نمای بزرگ شده بیشینه و کمینه پروفیل‌های u و v نیز به منظور مقایسه دقیقتر نشان داده شده است. همانطورکه در شکل‌های (۶) تا (۸) دیده می‌شود، طرح پیشنهادی بالادست دوبعدی برپایه مشخصه ها (MCB) نتایج دقیقتری را در شکل مرتبه دوم خود در مقایسه با طرح مرسوم CB مرتبه دوم ارائه می‌دهد. نکته جالب توجه مقایسه نتایج حاصل از روش MCB مرتبه دوم با طرح میانگین‌گیری مرکزی می باشد.

با وجود این که روش مرکزی در مورد شبکه حاضر دقت کاملا مرتبه دوم را ارائه می دهد (به دلیل کارتزین بودن شبکه)، نتایج حاصل از طرح MCB مرتبه دوم از نتایج روش مرکزی در شبکه یکسان دقیقتر است.

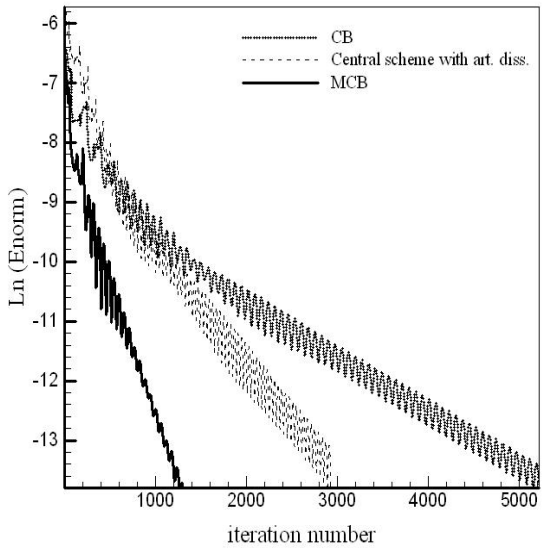
در مورد سرعت همگرایی طرح پیشنهادی به حالت پایا، نتایج به دست آمده نشانگر آن است که روش MCB سریعتر از روشهای مرسوم CB و مرکزی به جوابهای نهایی پایا همگرا می‌شود.

با توجه به کند بودن نرخ همگرایی طرح‌های مرسوم CB که قبلا در مراجع مختلف مانند [۲۳و ۳۱و ۳۲] به آن اشاره شده است، نرخ همگرایی بسیار سریع روش پیشنهادی، مزیت چشمگیر طرح MCB

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

را نسبت به روش برپایه مشخصه‌های مرسوم یک بعدی نشان می دهد.

نرخ همگرایی طرح‌های مرکزی، CB و MCB در محدوده اعداد رینولدز ۱۰۰ تا ۱۰،۰۰۰ با یکدیگر مقایسه شده است که در تمامی موارد طرح پیشنهادی MCB مرتبه دوم از طرح های مرکزی و CB مرتبه دوم همگرایی سریعتری را از خود نشان می‌دهد. نمونه‌ای از تاریخچه همگرایی سه طرح محاسباتی مورد بحث در شکل (۹) برای Re=1000 نشان داده شده است.



شکل ۹. مقایسه تاریخچه همگرایی روشهای MCB، CB و مرکزی

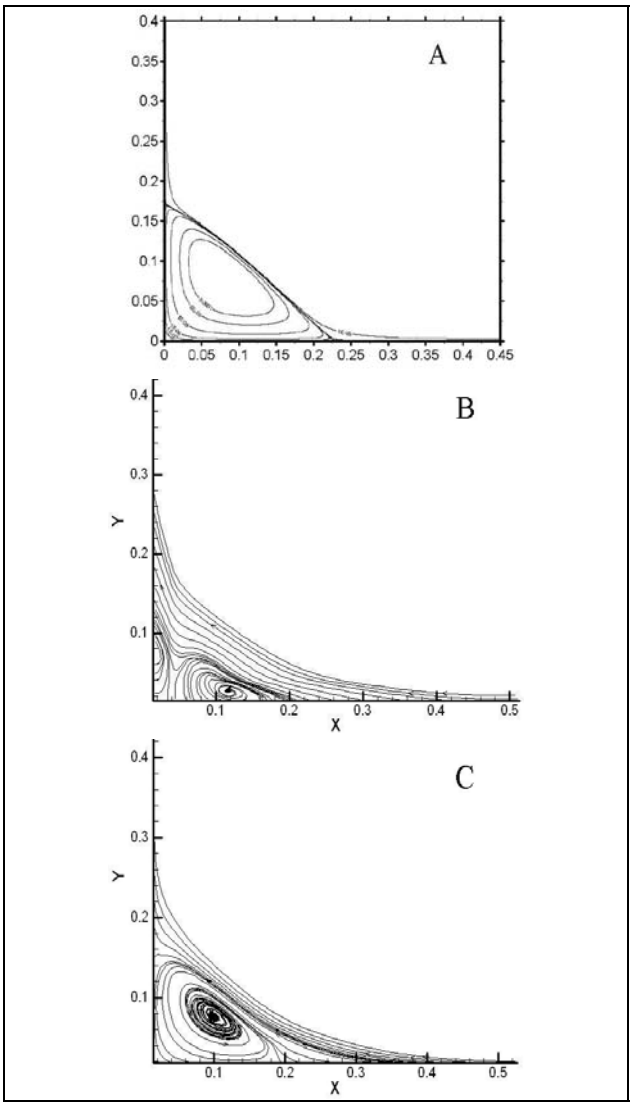
نورم خطا به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathrm{ENORM} = \sqrt{\sum_{i=1}^{IM}\sum_{j=1}^{JM}\left(p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n}\right)^2} \Big/ IM \times JM \qquad (۲۰)$$

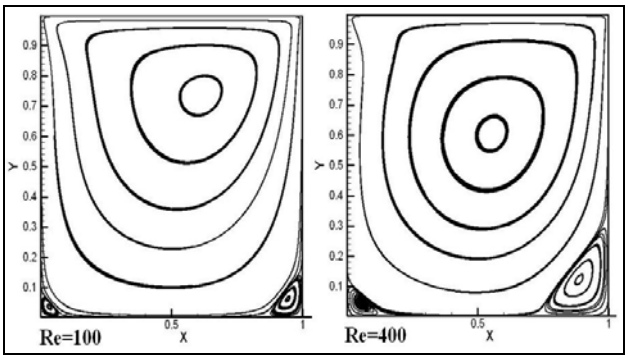
که در آن IM و JM تعداد سلول ها در جهت های x و y هستند.

با استفاده از روش MCB بیشینه عدد CFL مجاز در مورد Re=1000 و شبکه 40×40 برابر با ۱/۹ است در حالیکه در شرایط مشابه برای طرح‌های مرکزی و CB به ترتیب برابر با ۱/۷ و ۰/۹ می‌باشد. به ویژه همانطورکه در ادبیات فن ذکر شده است، در آزمایش‌های عددی انجام شده نیز نرخ همگرایی کند طرح CB مشاهده می‌شود به طوری که برای کاهش جذر مجموع خطاهای $\partial p/\partial t$ به مقدار 1×10^{-3} با استفاده از طرح CB مرتبه دوم نیاز به ۱۱۹۶۵ تعداد تکرار است در حالیکه برای طرح‌های مرکزی و MCB این تعداد به ترتیب برابر با ۵۹۳۸ و ۴۸۳۰ می‌باشد.

در شکل (۱۰) نتایج به دست آمده برای خطوط جریان گردابه گوشه پایین سمت چپ حفره در Re=1000 و شبکه 40×40 با استفاده از طرح‌های CB و MCB مرتبه دوم در مقایسه با نتایج Erturk et al. [33] نشان داده شده است.

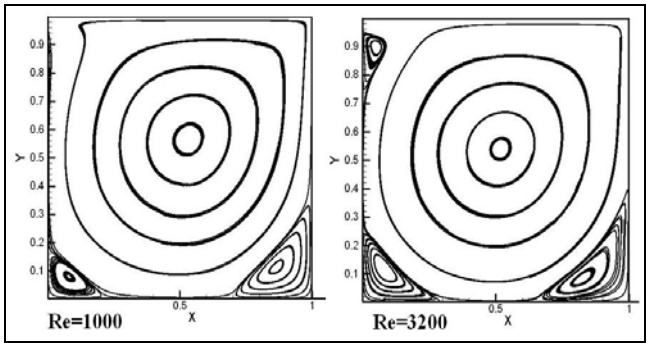


شکل ۱۰. خطوط جریان گردابه گوشه پایین سمت چپ حفره در Re=1000 و شبکه 40×40، A) Erturk et al. [33]، B)طرح CB مرتبه دوم، C) طرح MCB مرتبه دوم.



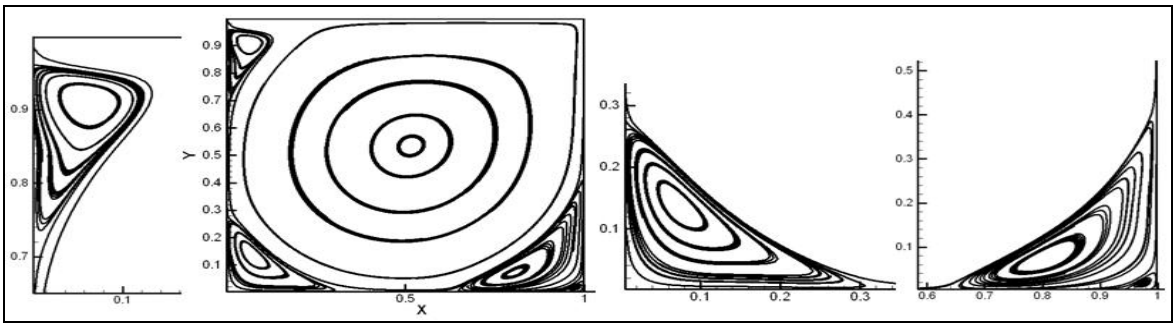
شکل ۱۱. خطوط جریان گردابه های اولیه و ثانویه در Re=100, 400.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

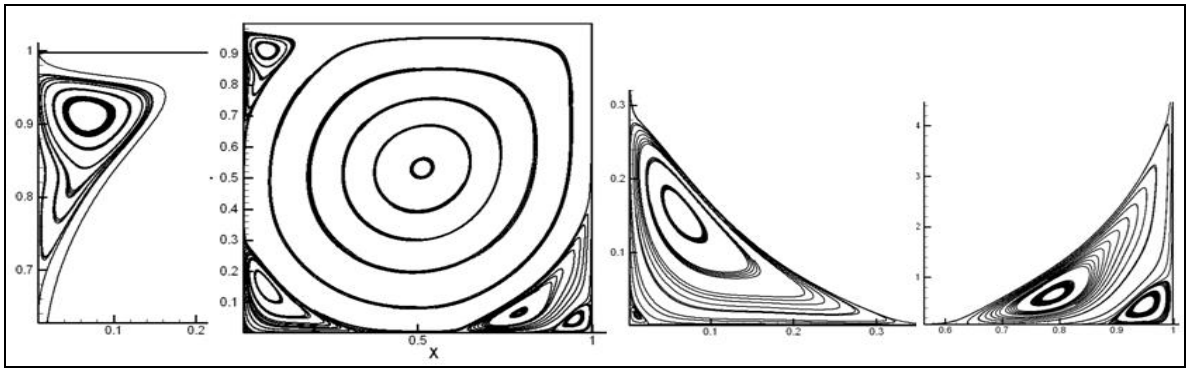


شکل ۱۲. خطوط جریان گردابه های اولیه و ثانویه در Re=1000, 3200.

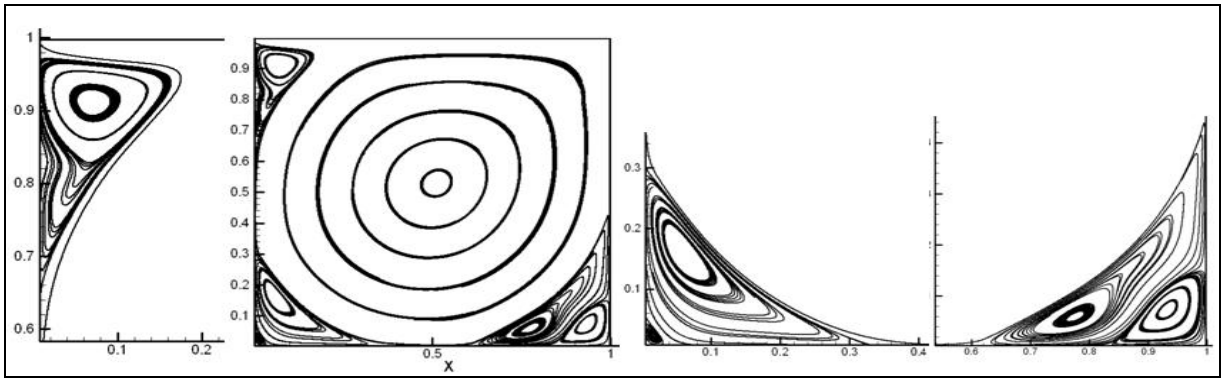
همانطورکه در شکل‌ها نیز دیده می‌شود، نتایج حاصل از روش MCB بسیار دقیقتر از نتایج CB، که در این مورد جوابهای غیرقابل قبول و بسیار دور از واقعیت ارائه کرده است، می باشد.
شکل‌های (۱۱) تا (۱۵) نتایج به دست آمده برای کانتورهای تابع جریان در شبکه 256×256 را برای محدوده وسیعی از اعداد رینولدز و همچنین اعداد رینولدز بالا نشان می دهد.



شکل ۱۳. خطوط جریان گردابه های اولیه و ثانویه و نمای بزرگ شده گردابه ها در Re=5000.



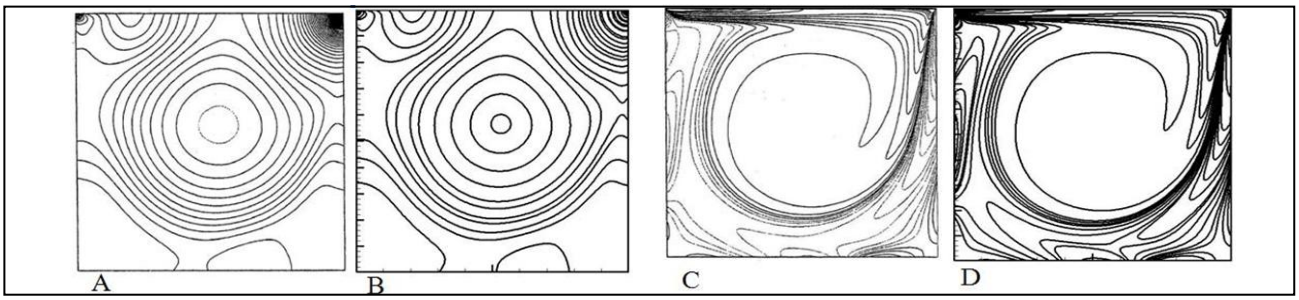
شکل ۱۴. خطوط جریان گردابه های اولیه و ثانویه و نمای بزرگ شده گردابه ها در Re=7500.



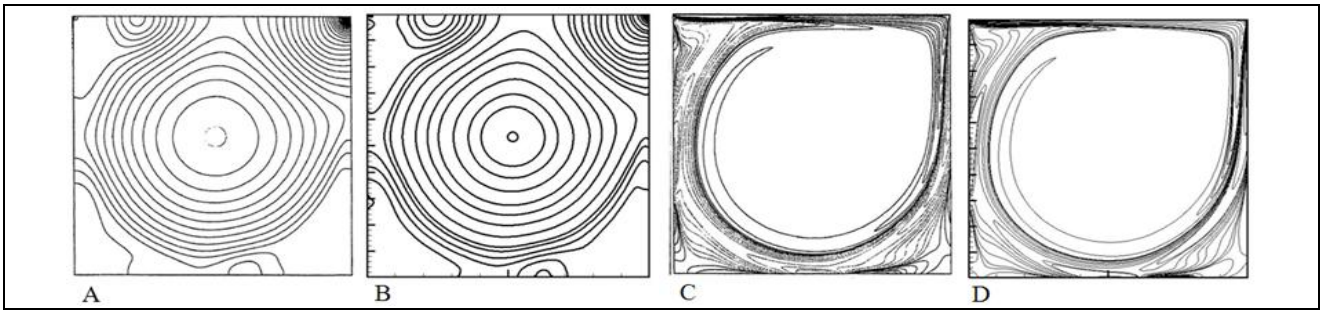
شکل ۱۵. خطوط جریان گردابه های اولیه و ثانویه و نمای بزرگ شده گردابه ها در Re=10,000.

نمای بزرگ شده گردابه های ثانویه نیز در اعداد رینولدز بالا نشان داده شده است. منحنی‌های هم فشار و هم چرخش (vorticity contour) در شکل‌های (۱۶) و (۱۷) برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ با استفاده از روش MCB مرتبه دوم در مقایسه با نتایج ارائه شده توسط Bruneau and Saad [34] نشان داده شده است.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

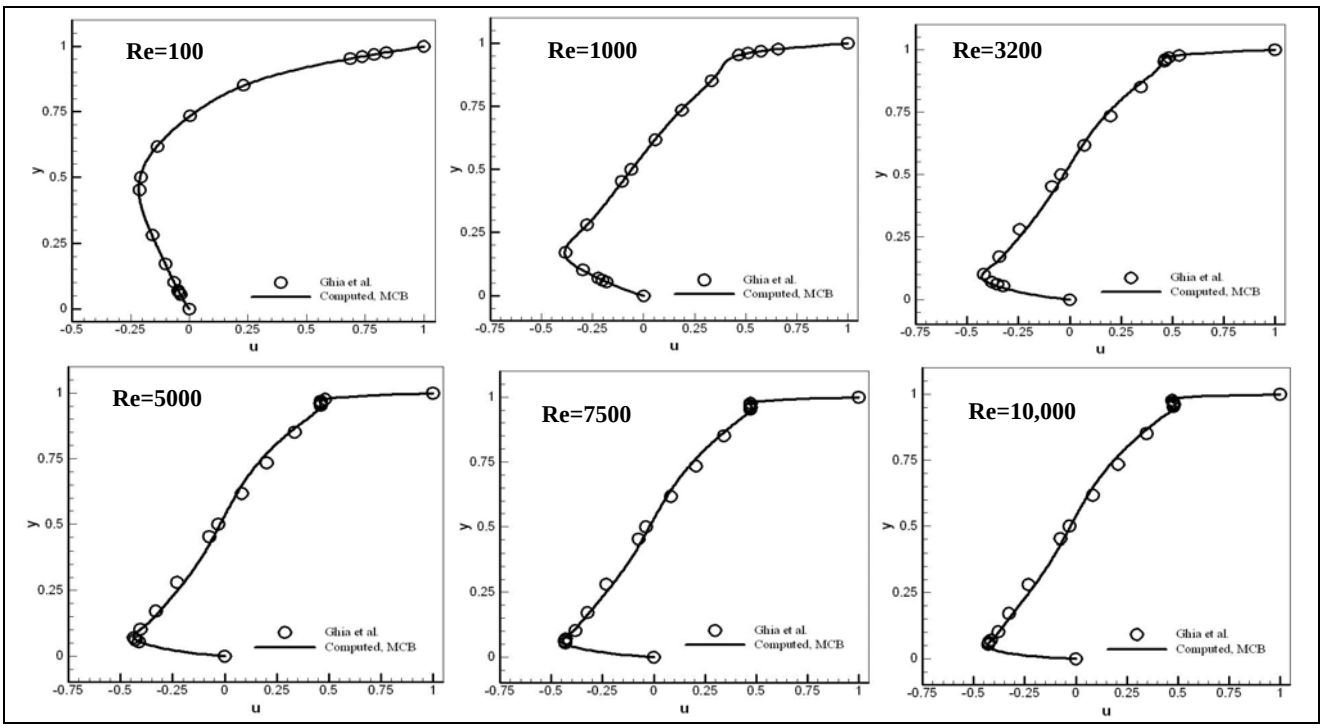


شکل ۱۶. منحنی‌های هم فشار و هم چرخش برای Re=1000، (A,C Bruneau and Saad [34]، (B,D روش MCB مرتبه دوم.



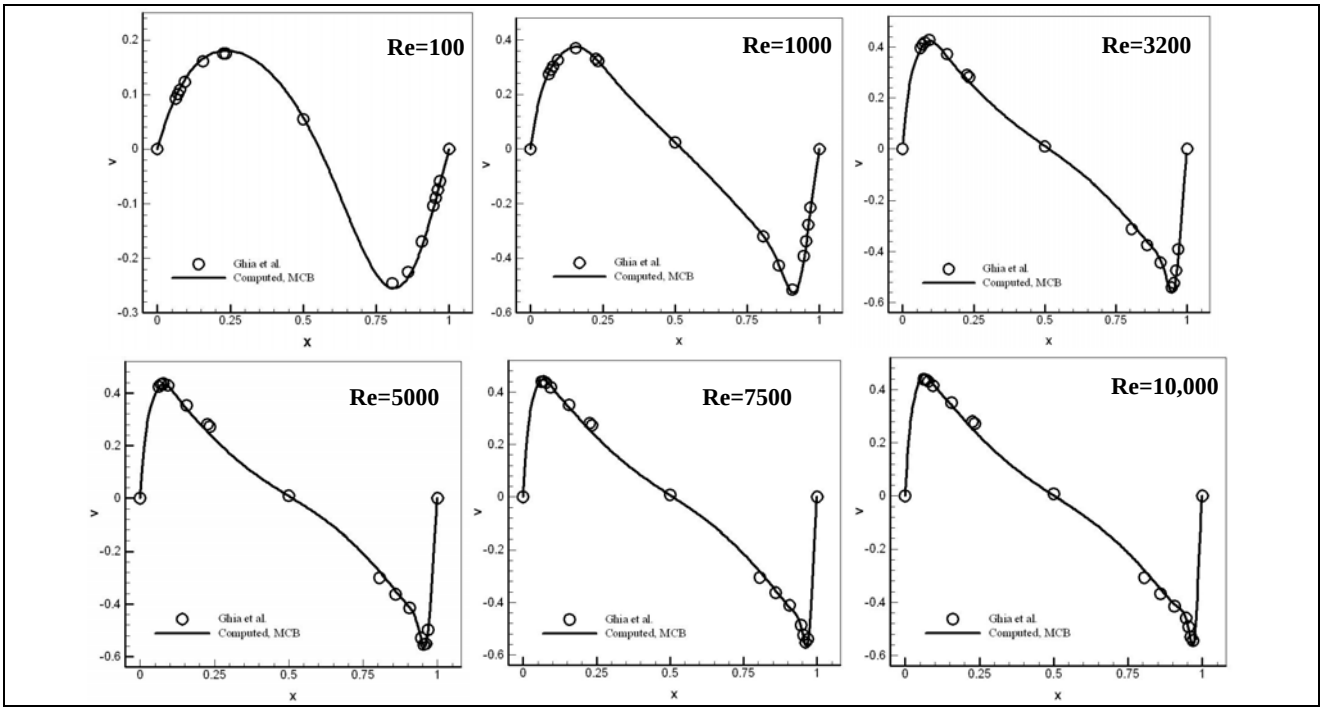
شکل ۱۷. منحنی‌های هم فشار و هم چرخش برای Re=5000، (A,C Bruneau and Saad [34]، (B,D روش MCB مرتبه دوم.

با به کار بردن طرح محاسباتی جدید MCB که بر اساس واقعیت فیزیکی دوبعدی سیال بنا نهاده شده و از روش بالادست ذاتی دوبعدی برای محاسبه بردارهای شار جابجایی در مرز سلول ها استفاده می کند، روش عددی حاصل بسیار پایدار بوده و نیاز به افزودن هیچ گونه لزجت مصنوعی به منظور پایدار ساختن حل نمی باشد. شکل‌های (۱۸) و (۱۹) نتایج به دست آمده با استفاده از طرح MCB برای مولفه سرعت u در روی خط عمودی گذرا از مرکز حفره و مولفه v روی خط افقی گذرا از مرکز حفره را در شبکه 256×256 نشان می دهند. همانطورکه دیده می‌شود، نتایج به دست آمده با روش پیشنهادی توافق خوبی با نتایج مرجع Ghia et al. [27] دارد.

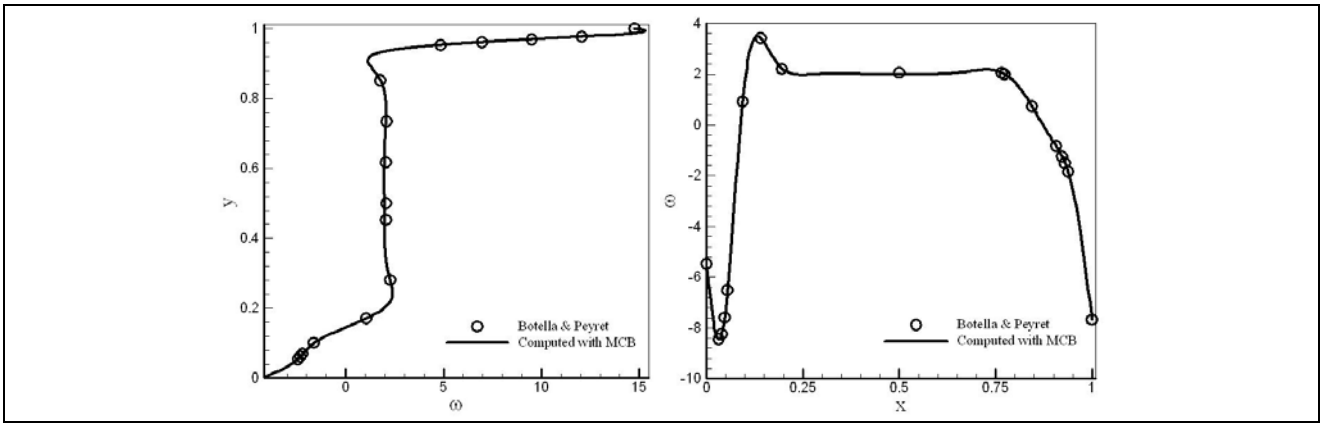


شکل ۱۸. مقایسه مقادیر محاسبه شده برای مولفه سرعت u در روی خط عمودی گذرا از مرکز حفره با نتایج مرجع Ghia et al. [27] در اعداد رینولدز مختلف.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]



شکل ۱۹. مقایسه مقادیر محاسبه شده برای مولفه سرعت v در روی خط افقی گذرا از مرکز حفره با نتایج مرجع Ghia et al. [27] در اعداد رینولدز مختلف.



شکل ۲۰. نتایج به دست آمده برای چرخش در روی خطوط افقی و عمودی گذرا از مرکز هندسی حفره در Re=1000 با استفاده از طرح MCB مرتبه دوم در مقایسه با Botella & Peyret [35].

Botella & Peyret [35] نتایج با دقت بالا برای مقادیر چرخش در روی خطوط افقی و عمودی گذرا از مرکز هندسی حفره را با استفاده از روش طیفی Chebyshev برای عدد رینولدز ۱۰۰۰ ارائه داده اند. نتایج آنها و نتایج حاصل از روش MCB مرتبه دوم در شکل (۲۰) نشان داده شده است و همانطورکه ملاحظه می‌شود همخوانی نتایج عالی است.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید بالادست کاملا دوبعدی برپایه مشخصه‌ها برای تحلیل جریانهای تراکم ناپذیر لزج ارائه شده است. معادلات حاکم بر جریان تراکم ناپذیر با استفاده از روش تراکم پذیری مصنوعی تصحیح شده و ساختار مشخصه های دوبعدی آنها برای اولین بار با استفاده از روش ریاضی مورد تحلیل قرار گرفته است. با استفاده از روابط به دست آمده برای مشخصه های دوبعدی معادلات، یک طرح بالادست کاملا دوبعدی به نام MCB ارائه شده که بر اساس پدیده انتشار امواج مجازی در محیط سیال تراکم ناپذیر می باشد. روش پیشنهادی در شکل گسسته سازی حجم محدود برای محاسبه بردارهای شار جابجایی مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از طرح محاسباتی MCB یک برنامه کامپیوتری با روش حجم محدود صریح برای تحلیل جریان تراکم

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

ناپذیر پایا داخل حفره در اعداد رینولدز مختلف نوشته شده است. نتایج به دست آمده از تحلیل های عددی انجام شده به صورت زیر است:

۱- روش جدید MCB نتایج دقیقتری را نسبت به طرح مرسوم CB در هر دو شکل مرتبه اول و مرتبه دوم در شبکه یکسان ارائه می‌دهد.

۲- نتایج به دست آمده با استفاده از طرح MCB مرتبه دوم حتی از نتایج طرح میانگین گیری مرکزی (که به دلیل کارتزین بودن شبکه در این مورد دقت کاملا مرتبه دوم را می‌دهد) نیز بر روی شبکه یکسان دقیقتر است.

۳- به دلیل استفاده از روابط مشخصه‌های چندبعدی و مطابقت با واقعیت فیزیکی سیال، استفاده از طرح MCB روش عددی کاملا پایداری را ارائه می‌دهد و نیازی به اضافه کردن هیچ گونه لزجت مصنوعی به منظور پایدار ساختن حل نمی‌باشد.

۴- مزیت چشمگیر روش MCB نسبت به روش مرسوم CB، نرخ همگرایی بسیار سریع آن است. این در حالی است که نرخ همگرایی کند طرح مرسوم CB به دفعات در ادبیات فن ذکر شده است.

۵- نتایج به دست آمده از روش MCB در تمامی موارد جوابهای قابل قبولی را ارائه می دهد که در مقایسه با داده‌های مرجع موجود در ادبیات فن تطابق بسیار خوبی را داراست.

مراجع

[1] Chorin, A.J., *"A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems"*, Journal of Computational Physics, Vol. 2, 1967, PP. 12– 26.

[2] Kwak, D., Kiris, C., Kim, C.S., "*Computational Challenges of Viscous Incompressible Flows*", Computers & Fluids, Vol. 34, 2005, PP. 283–299.

[3] Farmer, J., Martinelli, L., Jameson, A., *"Fast Multigrid Method for Solving Incompressible Hydrodynamic Problems with Free Surface"*, AIAA Journal, Vol. 32, 1994, PP. 1175-1182.

[4] Rogers, S.E., Kwak, D., *"Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations*", AIAA Jounral, Vol. 29, 1991, PP. 603-610.

[5] Liu, C., Zheng, X., Sung, C.H., *"Preconditioned Multigrid Methods for Unsteady Incompressible Flows"*, Journal of Computational Physics, Vol. 139, 1998, PP. 35-57.

[6] Kallinderis, Y., Ahn, H.T., "*Incompressible Navier–Stokes Method With General Hybrid Meshes*", Journal of Computational Physics, Vol. 210, 2005, PP. 75-108.

[7] Yuan, L., "*Comparison of Implicit Multigrid Schemes for Three-Dimensional Incompressible Flows*", Journal of Computational Physics, Vol. 177, 2002, PP. 134-155.

[8] Drikakis, D., Govatsos, P.A., Papantonis, D.E., *"A Characteristic Based Method for Incompressible Flows*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 19, 1994, PP. 667-685.

[9] Drikakis, D., *"A Parallel Multiblock Characteristic Based Method for Three-Dimensional Incompressible Flows*", Advances in Enginering Software, Vol. 26, 1996, PP.111-119.

[10] Drikakis, D., Iliev, O.P., Vassileva, D.P., *"A Nonlinear Multigrid Method for the Three-Dimensional Incompressible Navier–Stokes Equations"*, Journal of Computational Physics, Vol. 146, 1998, PP. 301-321.

[11] Zhao, Y., Zhang, B., "*A High-Order Characteristics Upwind FV Method for Incompressible Flow and Heat Transfer Simulation on Unstructured Grids*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, 2000, PP. 733-756.

[12] Tai, C.H., Zhao, Y., "*Parallel Unsteady Incompressible Viscous Flow Computations Using an Unstructured Multigrid Method"*, Journal of Computational Physics, Vol. 192, 2003, PP. 277-311.

[13] Tai, C.H., Zhao, Y., Liew, K.M., "*Parallel Computation of Unsteady Three-Dimensional Incompressible Viscous Flow Using an Unstructured Multigrid Method*", Computers and Structures, Vol. 82, 2004, PP. 2425-2436.

[14] Tai, C.H., Zhao, Y., Liew, K.M., "*Parallel-Multigrid Computation of Unsteady Incompressible Viscous Flows Using a Matrix-Free Implicit Method and High-Resolution Characteristics-Based Scheme"*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 194, 2005, PP. 3949-3983.

[15] Tai, C.H., Zhao, Y., Liew, K.M., "*Parallel Computation of Unsteady Incompressible Viscous Flows Around Moving Rigid Bodies Using an Immersed Object Method With Overlapping Grids"*, Journal of Computational Physics, Vol. 207, 2005, PP. 151-172.

[16] Siong, K., Zhao, C.Y., *"Numerical Study of Steady/unsteady Flow and Heat Transfer in Porous Media Using a Characteristics-Based Matrix-Free Implicit FV Method on Unstructured Grids*", International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 25, 2004, PP. 1015-1033.

[17] Shapiro, E., Drikakis, D., "*Artificial Compressibility, Characteristics-Based Schemes for Variable Density, Incompressible, Multi-Species Flows. Part I. Derivation of Different Formulations and Constant Density Limit*", Journal of Computational Physics, Vol. 210, 2005, PP. 584-607.

[18] Shapiro, E., Drikakis, D., "*Artificial Compressibility, Characteristics-Based Schemes for Variable Density, Incompressible, Multi-Species Flows. Part II. Multigrid Implementation and Numerical Tests*", Journal of Computational Physics, Vol. 210, 2005, PP. 608-631.

[19] Drikakis, D., Goldberg, U., "*Wall-Distance-Free Turbulence Models Applied to Incompressible Flows"*, International Journal of Computational Fluid Dynamics,

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]

Vol. 10, 1998, PP. 241-253.

[20] Mallinger, F., Drikakis, D., "*Instability in Three-Dimensional Unsteady Stenotic Flows*", International Journal of Computational Heat Fluid Flow, Vol. 23, 2002, PP.657-663.

[21] Drikakis, D., Smolarkiewicz, P.K., *"On Spurious Vortical Structures*", Journal of Computational Physics, Vol. 172, 2001, PP.309-325.

[22] Drikakis, D., "*Bifurcation Phenomena in Incompressible Sudden Expansion Flows*", Physics of Fluids, Vol. 9, 1997, PP. 76-87.

[23] Neofytou, P., Drikakis, D., "*Non-Newtonian Flow Instability in a Channel With a Sudden Expansion*", Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 111, 2003, PP. 127-150.

[24] Razavi, S.E., *"Far Field Boundary Conditions for Computation of Compressible Aerodynamic Flows"*, Ph.D. thesis, Department of Mechanical Engineering, McGill university, Montreal, Canada, 1995.

[25] Zacrow, M.J., Hoffman, J.D., "*Gas Dynamics*", Vol. II, John Wiley and Sons, 1997.

[26] Altas, I., Burrage, K., "*A High Accuracy Defect-Correction Multigrid Method for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations*", Journal of Computational Physics, Vol. 114, 1994, PP. 227-233.

[27] Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, C.T., *"High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*", Journal of Computational Physics, Vol. 48, 1982, PP. 387-411.

[28] Gupta, M.M., *"High Accuracy Solutions of Incompressible Navier-Stokes Equations*", Journal of Computational Physics, Vol. 93, 1991, PP. 343-359.

[29] Erturk, E., Gokcol, C., *"Fourth Order Compact Formulation of Navier-Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 50, 2006, PP. 421-436.

[30] Zhang, J., "*Numerical simulation of 2D square driven Cavity Using Fourth Order Compact Finite Difference Schemes"*, Computers & Mathematics with applications, Vol. 45, 2003, PP. 43-52.

[31] Neofytou, P., Drikakis, D., Leschziner, M.A., *"Study of Newtonian and Non Newtonian Fuid Flow in a Channel With a Moving Indentation"*, in: Sajjadi, Nash, Rampling (Eds.), Proceedings of the IMA Conference on Cardiovascular Flow Modelling with Application to Clinical Medicine, Salford, UK, 1998, Clarendon Press, Oxford, 1999.

[32] Neofytou, P., *"Revision of the Characteristics-Based Scheme for Incompressible Flows*", Journal of Computational Physics, Vol. 222, 2007, PP. 475-484.

[33] Erturk, E., Corke, T.C., Gokcol, C., *"Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 48, 2005, PP. 747-774.

[34] Bruneau, C.H., Saad, M., *"The 2D Lid-Driven Cavity Problem Revisited*", Computers & Fluids, Vol. 35, 2006, PP. 326-348.

[35] Botella, O., Peyret, R., *"Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven Cavity Flow*", Computers & Fluids, Vol. 27, 1998, PP. 421-433.

[Downloaded from ijiepm.iust.ac.ir on 2024-07-27]