

UTILIZATION OF SIMULATED ANNEALING IN OPTIMIZATION OF A MULTI-PRODUCT INVENTORY CONTROL MODEL WITH STOCHASTIC REPLENISHMENT AND SPACE CONSTRAINT

A. Taleizadeh, M.B.Gh. Aryanezhad* & A. Makoee

Ata Allah Taleizadeh, Ph.D. Student, Industrial Engineering Department, Iran University of Science & Technology

M.B.Gh. Aryanezhad, Professor, Industrial Engineering Department, Iran University of Science & Technology

A. Makoee., Assistant Professor, Industrial Engineering Department, Iran University of Science & Technology.

Keywords

Inventory Control, Stochastic Replenishment, Integer nonlinear programming, Simulated Annealing

ABSTRACT

In this paper a multi-period inventory control problem will be analyzed. Periodic replenishment will happen totally stochastic and also the periods between two replenishments are independent and identically distributed random variables. indeed producer is encountered with customer in stochastic time. Also the decision variable has been chosen as an integer. In first model shortage will be back ordered and in second model shortage will be lost sale. Finally in third model combination of them will be considered. Three main specifications of the model which has led to be new are the stochastic period length, being multi-product and multi-constraint and the fact that the decision variables are integer. As this condition is deployed simultaneously therefore the created model is different from other models in the periodic review literature. The model of this problem is an integer nonlinear programming. Also for solving the model, the Simulated Annealing is used and for analyzing the output of the algorithms a numerical example will be exhibited.

© (نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید) شماره ۲، جلد ۲۰، ۱۳۸۸

کاربرد شبیه سازی تبرید در بهینه سازی یک مدل کنترل موجودی چند محصولی همراه با محدودیت فضا و بازپرسازی تصادفی

عطا الله طالعی زاده، میربهادرقلی آریانژاد و احمد ماکویی

چکیده:

در این مقاله یک مسئله کنترل موجودی چند دوره‌ای که در آن فاصله زمانی بین دو بازپرسازی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حقیقت تولید کننده با خریدار در زمانی کاملاً تصادفی رودررو می‌شود. دیگر فرض حاکم بر مسئله وجود محدودیت فضا بوده و متغیر تصمیم نیز عدد صحیح در نظر گرفته شده است. سه مدل ارائه شده است که در مدل اول کل کمبود به حالت پس‌افت در می‌آید. در مدل دوم کل کمبود فروش از دست رفته شده و در مدل سوم

کلمات کلیدی

کنترل موجودی، بازپرسازی تصادفی، برنامه‌ریزی غیرخطی، عدد صحیح، شبیه‌سازی تبرید

تاریخ وصول: ۸۶/۱۰/۱۲

تاریخ تصویب: ۸۸/۱/۲۴

عطا الله طالعی زاده، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، ata.taleizadeh@gmail.com

دکتر میربهادرقلی آریانژاد، استاد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، Mirarya@iust.ac.ir

دکتر احمد ماکویی، استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، amakui@iust.ac.ir

که ترکیبی از مدل‌های اول و دوم است درصدی از کمبود حالت پس افت یافته و درصد باقی مانده نیز، فروش از دست رفته خواهد شد. سه خصوصیت اصلی مدل که منجر به جدید بودن مدل شده است تصادفی بودن طول دوره، چند محصولی و محدودیت دار بودن مدل و عدد صحیح بودن متغیرهای تصمیم هستند. به عنوان نمونه، مدل سوم با فرض یکنواخت بودن طول دوره بازپرسی بازنویسی شده و مدل به دست آمده نیز یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح است. همچنین برای حل مدل از شبیه سازی تبرید استفاده می‌شود و برای توضیح کارکرد الگوریتم نیز یک مثال عددی ارائه شده است.

۱. مقدمه

مدل‌های چند پرودی کنترل موجودی به طور گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف برای تولید و فروش مورد استفاده قرار می‌گیرند. از طرفی یکسری فرضیات این مدل‌ها در آغاز سبب شده تا در واقعیت امکان به کارگیری و استفاده صحیح از آن‌ها فراهم نشود. لذا برای به کارگیری آن‌ها باید سعی در کنار گذاشتن آن‌ها نمود و توسعه‌هایی جهت به کارگیری واقعی آن‌ها در عمل صورت داد. زمینه اصلی تحقیق در مورد کنترل موجودی، سیاست مرور پیوسته^۱ و مرور دوره‌ای^۲ است که سیاست مرور پیوسته می‌تواند با آزادی عمل خود در هر لحظه از زمان با توجه به موجودی در دست اقدام به بازپرسی نماید، در حالیکه در سیاست مرور دوره‌ای فقط در زمان‌های خاص مجاز به انجام این کار هستیم. طی سالیان اخیر مسایل کنترل موجودی چند پرودی در زمینه‌های متفاوتی بخصوص زنجیره تأمین^۳ بر اساس فرضیات و شرایط گوناگون مورد تحقیق و کندوکاو قرار گرفته‌اند.

در اکثر مطالعات صورت گرفته محدودیت‌های موجود در دنیای واقعی به طور کامل در مقالات لحاظ نشده‌اند و توجه بیشتر بر روی تصادفی بودن مدت تحویل^۴ و تقاضا به صورت مجزا بوده است. از طرفی در هر یک از حالات عنوان شده بعضاً نیز در مقالات، محدودیت‌هایی را لحاظ کرده‌اند یا در پاره‌ای از موارد بدون در نظر گرفتن محدودیت‌هایی نظیر، بودجه و فضا، متغیر تصمیم را عدد صحیح فرض کرده‌اند. در مقالات فراوانی بحث بازپرسی توأم^۵ نیز مدنظر قرار گرفته است که در کل نمونه‌هایی از این تحقیقات در زمینه مرور دوره‌ای و بازپرسی به صورت زیر بیان می‌شوند.

Chiang [۱] یک مدل مرور دوره‌ای را مد نظر قرار داده که طول دوره نسبتاً بلند است. هزینه‌های مسئله هزینه خرید، نگهداری و ثابت سفارش‌دهی بوده و ضمناً در مسئله تخفیف را در نظر گرفته است. نکته حائز اهمیت لحاظ کردن سفارش اضطراری برای پرهیز از کمبود می‌باشد که با هزینه‌ای بیشتر از حالت عادی اقدام به بازپرسی می‌شود. ضمناً در این مقاله از برنامه‌ریزی پویا استفاده شده است. اسماعیل محبی و همکارانش [۲] روی یک سیستم موجودی با مرور دوره‌ای و بازپرسی چندگانه و تحویل چند

مرحله‌ای تحقیق نموده‌اند. ایشان تقاضا را گسسته فرض کرده که از توزیع پواسون^۶ تبعیت می‌نماید و کمبود مجاز بوده و سیاست فروش از دست رفته^۷ در آن به کار گرفته شده است. Feng و همکارش [۳] بر روی یک مدل (R, nT) تحقیقاتی انجام داده‌اند که تقاضای تصادفی در مرحله اول وارد سیستم می‌شود کل تقاضای ارضا نشده در مرحله دوم پس‌افت می‌شود. Ouyang و همکارش [۴] در مدل (R,T) طول دوره و مدت تحویل را متغیر تصمیم و تقاضا را یک متغیر تصادفی در نظر گرفته‌اند. ضمناً ایشان برای مدل خود محدودیت سطح خدمت^۸ را نیز لحاظ کرده‌اند. اسماعیل محبی [۵] در یک سیستم موجودی با مرور پیوسته تقاضا را پواسون مرکب در نظر گرفته و مدت تحویل را نیز تصادفی فرض کرده‌است. Chiang [۶] یک مسئله مرور دوره‌ای را طی دو حالت کمبود پس‌افت و فروش از دست رفته مورد بررسی قرار داده و سیاست مورد استفاده (R,T) بوده است. Qu و همکارانش [۷] در یک سیستم کنترل موجودی با مرور دوره‌ای سیاست حمل و نقل یکپارچه موجودی را که متفاوت از سایر مقالات است مدنظر قرار می‌دهد. ایشان یک مدل چند محصولی که دارای چندین تأمین کننده است را همراه با تقاضای تصادفی در یک افق برنامه‌ریزی محدود طراحی نموده است. Eynan و همکارش [۸] بر روی یک سیستم مرور دوره‌ای فرض تقاضای تصادفی و هزینه انبارداری متغیر را مطرح ساخته‌اند که از جمله سایر فرضیات آن می‌توان به غیرصفر بودن مدت تحویل و لحاظ کردن موجودی اطمینان اشاره نمود. Bylka [۹] در یک مسئله کنترل موجودی با مرور دوره‌ای محدودیت میزان سفارش و محدودیت در میزان کمبود پس‌افت شده را مطرح می‌سازد که مدت تحویل ثابت و تقاضای تصادفی است و قصد دارد تا با بررسی تغییرات مدت تحویل و هزینه سفارش‌دهی زمان بهینه سفارش را مشخص سازد. Minner و همکارش [۱۰] در مورد تعیین زمان بازپرسی و مقدار آن در یک مسئله چند محصولی در شرایطی که محدودیت فضا وجود دارد تحقیق کرده‌اند. ایشان فرض را بر این داشتند که تقاضای تصادفی بوده و طبق فرآیند پواسون صورت می‌گیرد. ضمناً مدت تحویل را صفر در نظر گرفتند و مسئله را در چارچوب فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف^۹ مورد بررسی قرار دادند. Goyal [۱۱] در یک مسئله بازپرسی تعیین زمان بهینه انجام این کار را مد نظر قرار

⁶. Poisson

⁷. Lost Sale

⁸. Service Level

⁹. Markov

¹. Continues Review

². Periodic Review

³. Supply Chain

⁴. Lead Time

⁵. Joint Replenishment Problem

۲. تعریف مسئله

چارچوب اصلی مسئله مورد بررسی در این مقاله عبارتست از اینکه فروشنده‌ای برای سفارش یک دسته از محصولات خود با یک تولید کننده در ارتباط است و زمان بازپرسازی می‌تواند به صورت کاملاً تصادفی رخ دهد. در حقیقت طول دوره بازپرسازی یا سیکل سیستم کنترل موجودی کاملاً تصادفی است. تصادفی بودن طول دوره کاملاً مسئله مورد بحث را واقعی کرده که در بسیاری از صنایع از جمله صنایع انحصاری کاملاً مشهود است. حتی در صنایع رقابتی نیز در بسیاری از موارد به علل مختلف طول دوره می‌تواند دستخوش نوسانات فراوانی قرار گیرد. کمبود مواد اولیه، فزونی عرضه بر تقاضا، رکود اقتصادی، بحرانهای اقتصادی و وقایع و حوادث طبیعی که بعضاً منجر به افزایش یا کاهش تقاضا می‌شوند، همه و همه مواردی هستند که طول دوره بازپرسازی را تحت تاثیر قرار می‌دهند. این موضوع در مورد کالاهای وارداتی نیز صادق است. تحریم‌های اقتصادی کوتاه مدت، بحران های حاکم بر بازارهای داخلی و خارجی، مباحث مربوط به ترخیص کالا، گشایش اعتبار و بسیاری موارد دیگر هستند که منجر به تصادفی شدن زمان دریافت کالا و طول دوره بازپرسازی می‌شوند.

در حقیقت در این تحقیق با یک مدل کنترل موجودی دوره‌ای مواجه هستیم که در آن فاصله زمانی بین دوبار بازپرسازی یک متغیر تصادفی است که همگی مستقل و هم‌توزیع فرض می‌شوند. تقاضایی که به سیستم وارد می‌شود ثابت و مشخص است و ضمناً در صورت بروز کمبود (کمبود مجاز است) درصدی پس‌افت^۱ و درصدی فروش از دست رفته می‌شود. هزینه‌های سیستم کنترل موجودی، شامل هزینه نگهداری، هزینه کمبود پس‌افت و فروش از دست‌رفته و هزینه خرید است. مدل چند محصولی بوده و محدودیت فضای انبار باید در مسئله در نظر گرفته شود. قرار است در هر سیکل سقف سطح موجودی (متغیر تصمیم R) به نحوی تعیین شود که سود حاصله ماکزیمم شود؛ با توجه به این موضوع که متغیرهای تصمیم عدد صحیح هستند.

به طور کلی فرضیات مسئله عبارتند از:

- ۱- فاصله زمانی بین بازپرسازی‌ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند.
- ۲- مسئله چند محصولی همراه با محدودیت فضا است.
- ۳- متغیرهای تصمیم عدد صحیح هستند.
- ۴- هزینه موجود در مسئله، هزینه نگهداری، کمبود و خرید است.
- ۵- کسری از کمبود می‌تواند حالت پس‌افت پیدا کند.
- ۶- تنها یک تأمین‌کننده وجود دارد.
- ۷- تقاضا ثابت است.
- ۸- کل کالای خریداری شده به فروش خواهد رسید.

داد. این کار در شرایطی صورت گرفت که افق برنامه ریزی محدود در نظر گرفته شد و تقاضا به صورت خطی کاهش می‌یافت. Yang و همکارش [۱۲] نیز همانند Goyal [۱۱] به دنبال تعیین زمان بهینه بازپرسازی بودند با این تفاوت که ایشان تقاضا را در طول افق برنامه ریزی به صورت تابعی غیر خطی فرض کردند. Yang و همکارش [۱۳] در یک مسئله بازپرسازی به دنبال تعیین مقدار بهینه آن بودند. ایشان در مدلی که ارائه کردند تقاضا را ثابت و افق برنامه ریزی را نامحدود در نظر گرفتند و فرض کردند که کمبود مجاز نیست. Cheng و همکارش [۱۴] به کمک روش ارزش فعلی^۱ خالص اقدام به تعیین زمان و مقدار بهینه بازپرسازی نمودند. در مدل ایشان تقاضا تصادفی، کمبود غیر مجاز، افق برنامه ریزی محدود و موجودی آغازین و پایانی صفر در نظر گرفته شد و سیاست تخفیف زمانی نیز استفاده شده است. Teng و همکارانش [۱۵] در مدلی که ارائه دادند به دنبال تعیین زمان بهینه بازپرسازی و قیمت فروش بهینه بودند. ایشان تقاضا را به صورت تابعی نزولی از قیمت در نظر گرفته و کمبود را مجاز ندانستند.

Lida [۱۶] در مقاله خود با استفاده از سیاست مرور دوره ای بر اساس فرض تصادفی بودن تقاضا و ظرفیت تولید مدلی ارائه کرد که در آن به دنبال تعیین مقدار بهینه تولید بود. وی تقاضا و ظرفیت تولید را مستقل از هم، مدت تحویل را صفر و کمبود را پس‌افت فرض نمود.

در این مقاله مدلی که ارائه شده است جدید بوده و توسعه مدل Ertogal و همکارش [۱۷] است. سه خصوصیت اصلی این مدل که آن را در حیطه مدل های مرور دوره ای متمایز می‌کند تصادفی بودن طول دوره، چند محصولی و محدودیت دار بودن مسئله و عدد صحیح بودن متغیرهای تصمیم است. زیرا با در نظر گرفتن هر سه خصوصیت فوق به صورت توأم برخی از فرضیات ساده سازی سایر مقالات کنار گذاشته شده اند. این در حالیست که Ertogal و همکارش [۱۷] مسئله را فقط در شرایط تصادفی بودن طول دوره بررسی کرده‌اند.

در بخش دوم صورت مسئله و فرضیات مطرح در مقاله بیان می‌شود. در قسمت سوم که بخش مدلسازی است ابتدا پارامترها و متغیرهای مسئله معرفی شده و مسئله در ابتدا برای حالت تک‌محصولی در سه حالت پس‌افت، فروش از دست‌رفته و حالت ترکیبی پس‌افت و فروش از دست رفته مدلسازی می‌شود. سپس به کمک آن‌ها مدل چند محصولی مورد نظر ساخته می‌شود و در نهایت در قسمت چهارم به شرح روش حل، شرایط و خواص آن می‌پردازیم. در قسمت پنجم روش حل را با یک مثال عددی بررسی می‌کنیم و نهایتاً در قسمت ششم یک جمع‌بندی از مقاله صورت می‌گیرد و پیشنهادات آتی مطرح می‌شود.

^۱. present Value Approach

^۲. Back Logged

C_L : متوسط هزینه فروش از دست رفته در هر سیکل

C_p : متوسط هزینه خرید در هر سیکل

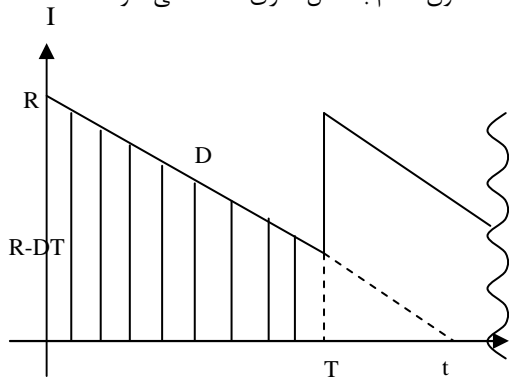
r : متوسط درآمد حاصل از فروش در هر سیکل

Z : سود حاصله در هر سیکل

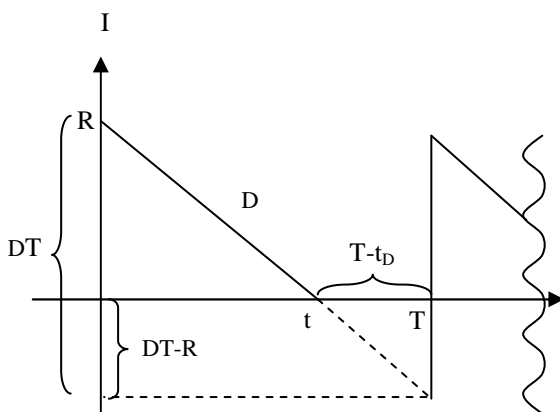
برای سادگی کار ابتدا مدل تک محصولی مدل سازی خواهد شد.

۳-۲. نمودار موجودی

با توجه به اینکه فاصله زمانی بین بازپرسی ها متغیرهای تصادفی هستند لذا با توجه به شکل ۱ و ۲ دو حالت ممکن است رخ دهد. حالت اولی در شرایطی است که فاصله زمانی بین بازپرسی ها کوچکتر از زمانی باشد که میزان موجودی به صفر می رسد t_D و حالت دوم در شرایطی است که فاصله زمانی بین بازپرسی ها بیش از زمانی است که سطح موجودی به صفر خواهد رسید. حال با توجه به توضیحات فوق اقدام به مدل سازی مسئله می شود.



شکل ۱. نمایش سیکل موجودی در حالت $T_{Min} \leq T \leq t_D$



شکل ۲. نمایش سیکل موجودی در حالت $t_D < T \leq T_{Max}$

۳-۳. مدل تک محصولی - کمبود پس افت

۳-۳-۱. محاسبه هزینه و درآمد

برای محاسبه متوسط مرور در یک سیکل باید کلیه اجزای تشکیل دهنده آن را که درآمد، هزینه خرید، هزینه نگهداری و هزینه کمبود است محاسبه نمود که عبارتند از:

و هدف تعیین میزان سفارش (سقف موجودی) به نحوی است که متوسط سود ماکزیمم شود.

۳. مدل سازی

از آنجاییکه فاصله های زمانی بین دو بازپرسی متغیرهای تصادفی مستقل هستند، لذا ماکزیمم کردن سود یک دوره معادل ماکزیمم نمودن سود کل افق برنامه ریزی است. لذا مسئله را فقط برای یک دوره مدل سازی می کنیم. در سیستم های مرور پیوسته در هر لحظه که بخواهیم می توان سفارش داد ولی در سیستم های مرور دوره ای فقط در یک زمان مشخص (گسسته) می توان اقدام به انجام سفارش نمود. همانطور که گفته شد در این مسئله، فاصله زمانی دو بازپرسی (T) تصادفی است و باید در این فواصل زمانی سفارش انجام شود. قبل از هر کاری با توجه به اینکه هزینه های سیستم، هزینه نگهداری، کمبود (پس افت و فروش از دست رفته) هستند، لذا متوسط موجودی و متوسط کمبود (در هر دو حالت) را محاسبه می کنیم.

۳-۱. پارامترها و متغیرهای مسئله:

در تمامی پارامترها و متغیرهای زیر $i = 1, 2, \dots, n$ است.

R_i : سقف موجودی محصول i ام (متغیر تصمیم)

T_i : فاصله زمانی بین دو بازپرسی (طول سیکل) محصول i ام که

یک متغیر تصادفی است ($T_{Min,i} \leq T_i \leq T_{Max,i}$).

$f_{T_i}(t_i)$: تابع چگالی احتمال برای T_i

h_i : هزینه نگهداری هر واحد موجودی محصول نوع i ام در هر سیکل

π_i : هزینه هر واحد سفارش پس افت محصول نوع i ام

W_i : هزینه خرید هر واحد از محصول نوع i ام

P_i : قیمت فروش هر واحد از محصول نوع i ام

D_i : نرخ ثابت و مشخص تقاضا برای محصول نوع i ام

t_{D_i} : زمانی که سقف موجودی محصول نوع i ام به صفر می رسد

$$t_{D_i} = \frac{R_i}{D_i}$$

β_i : درصدی از تقاضای ارضا نشده محصول نوع i ام که پس افت می شود.

I_i : متوسط موجودی محصول نوع i ام در هر سیکل

L_i : متوسط فروش از دست رفته محصول نوع i ام در هر سیکل

B_i : متوسط مقدار پس افت محصول نوع i ام در هر سیکل

Q_i : متوسط مقدار سفارش محصول نوع i ام در هر سیکل

f_i : فضای مورد نیاز برای هر واحد محصول نوع i ام در انبار

F : کل فضای انبار

C_h : متوسط هزینه نگهداری در هر سیکل

C_B : متوسط هزینه کمبود در حالت پس افت در هر سیکل

در حالت دوم متوسط کمبود از آنجایی که کل کمبود پسرفت است از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$B = \int_{t_D}^{T_{Max}} (DT - R)f_T(t)dt ; t_D < T \leq T_{Max} \quad (8)$$

زیرا همانطور که در شکل ۲-۱ مشخص است حداکثر کمبود $(DT - R)$ است.

۳-۳-۲. تعیین محدودیت‌های مسئله

از آنجایی که کل فضای در دسترس و فضای مورد نیاز برای هر واحد محصول به ترتیب f, F واحد حجم و سقف موجودی R است لذا محدودیت فضا به صورت زیر مطرح می‌شود.

$$fR \leq F \quad (9)$$

در نتیجه در پایان مدل کامل تک‌محصولی- کمبود پسرفت عبارتست از:

$$Z = r - C_p - C_h - C_B \\ = (P - W)Q - hI - \pi B$$

s.t:

$$fR \leq F$$

$$R \geq 0, Integer \quad (10)$$

و مدل ریاضی آن عبارتست از:

$$Max : Z = (P - W) \left[\int_{T_{Min}}^R (DT)f_T(t)dt + \int_R^{T_{Max}} (R + (DT - R))f_T(t)dt \right] \\ - h \left[\int_{T_{Min}}^R \left(RT - \frac{DT^2}{2} \right) f_T(t)dt + \int_R^{T_{Max}} \frac{R^2}{2D} f_T(t)dt \right] \\ - \pi \left[\int_{T_{Min}}^{T_{Max}} (DT - R)f_T(t)dt \right]$$

S.t:

$$fR \leq F$$

$$R \geq 0, Integer \quad (11)$$

۳-۴. مدل تک محصولی- فروش از دست رفته

یکی از تفاوت‌هایی که این حالت با حالت قبلی دارد در محاسبه Q است. در حقیقت عبارت (۴) به صورت زیر تغییر می‌یابد.

$$Q = \left[\int_{T_{Min}}^R (DT)f_T(t)dt + \int_R^{T_{Max}} (R)f_T(t)dt \right] \quad (12)$$

زیرا کل کمبود حالت فروش از دست رفته می‌یابد و عبارت $\beta(DT - R)$ در انتگرال دوم عبارت (۴) حذف می‌شود. تفاوت دیگری که این حالت با حالت قبلی دارد در محاسبه C_L

$$Z = r - C_p - C_h - C_B \\ = PQ - WQ - hI - \pi B \quad (1)$$

با توجه به رابطه (۱) و استفاده از مدل Ertogal در ابتدا باید اقدام به محاسبه مقدار سفارش Q ، متوسط موجودی I و متوسط کمبود پسرفت شود. لذا با توجه به شکل (۱) میزان سفارش در طی دو حالت عنوان شده عبارتست از:

متوسط سفارش (حالت اول

$$= \int_{T_{Min}}^{t_D} DTf_T(t)dt ; T_{Min} \leq T \leq t_D \quad (2)$$

زیرا که مشخص است فقط به اندازه (DT) از میزان موجودی کسر شده است.

متوسط سفارش (حالت دوم

$$= \int_{t_D}^{T_{Max}} (R + (DT - R))f_T(t)dt ; t_D \leq T \leq T_{Max} \quad (3)$$

زیرا علاوه بر اینکه کل سقف موجودی جهت ارضای تقاضا به صفر رسیده است، نیز به اندازه $(DT - R)$ هم کمبود پسرفت می‌شود که در اینحالت (کمبود پسرفت) باید سفارش داده شود. در نتیجه متوسط مقدار سفارش از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$Q = \int_{T_{Min}}^{t_D} DTf_T(t)dt + \int_{t_D}^{T_{Max}} (R + (DT - R))f_T(t)dt \quad (4)$$

جهت محاسبه متوسط موجودی مجدداً نیز با به کارگیری شکل ۱ در ابتدا متوسط موجودی طی دو حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

متوسط موجودی (حالت اول

$$T(R - DT) + \frac{DT T}{2} = RT - \frac{DT^2}{2} \quad (5)$$

چرا که مساحت دوزنقه هاشور خورده است.

$$متوسط موجودی (حالت دوم) : \frac{t_D \cdot R}{2} = \frac{R}{D} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2}{2D} \quad (6)$$

زیرا متوسط موجودی مساحت مثلث به ارتفاع R و قاعده t_D است. پس در نهایت متوسط موجودی از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۷]:

$$I = \int_{T_{Min}}^{t_D} \left(RT - \frac{DT^2}{2} \right) f_T(t)dt + \int_{t_D}^{T_{Max}} \frac{R^2}{2D} f_T(t)dt \quad (7)$$

و برای محاسبه متوسط کمبود پسرفت نیز با مراجعه به شکل (۱) کاملاً مشخص است که در حالت اول هیچ کمبودی رخ نمی‌دهد و

$$B = \beta \int_{t_D}^{T_{Max}} (DT - R) f_T(t) dt \quad ; \quad t_D < T \leq T_{Max} \quad (17)$$

$$L = (1 - \beta) \int_{t_D}^{T_{Max}} (DT - R) f_T(t) dt \quad ; \quad t_D < T \leq T_{Max} \quad (18)$$

اما جهت تعیین میزان سفارش، از آن جایی که فقط β درصد کمبود حالت پس‌افت پیدا می‌کند لذا برای جبران کمبود فقط باید $\beta(DT - R)$ را سفارش داد لذا متوسط سفارش طی دو حالت مورد نظر عبارتست از:

$$Q = \int_{T_{Min}}^{t_D} DT f_T(t) dt + \int_{t_D}^{T_{Max}} (R + \beta(DT - R)) f_T(t) dt \quad (19)$$

و در نهایت مدل ریاضی مسئله عبارتست از:

$$\begin{aligned} Z &= r - C_p - C_h - C_B - C_L \\ &= PQ - WQ - hI - \pi B - (P - W)L \end{aligned}$$

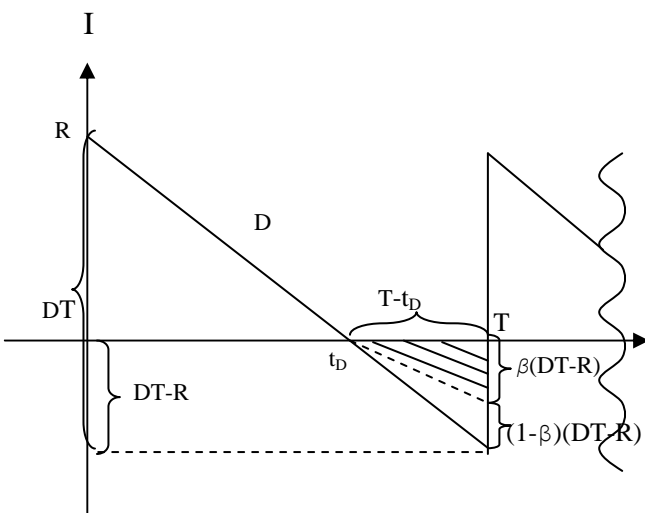
s.t:

$$\begin{aligned} fR &\leq F \\ R &\geq 0, Integer \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Max: } Z &= (P - W) \left[\int_{T_{Min}}^{\frac{R}{D}} (DT) f_T(t) dt + \int_{\frac{R}{D}}^{T_{Max}} (R + \beta(DT - R)) f_T(t) dt \right] \\ &\quad - h \left[\int_{T_{Min}}^{\frac{R}{D}} \left(RT - \frac{DT^2}{2} \right) f_T(t) dt + \int_{\frac{R}{D}}^{T_{Max}} \frac{R^2}{2D} f_T(t) dt \right] \\ &\quad - \pi \beta \left[\int_{\frac{R}{D}}^{T_{Max}} (DT - R) f_T(t) dt \right] \\ &\quad - (P - W)(1 - \beta) \left[\int_{\frac{R}{D}}^{T_{Max}} (DT - R) f_T(t) dt \right] \end{aligned}$$

S.t:

$$\begin{aligned} fR &\leq F \\ R &\geq 0, Integer \end{aligned} \quad (21)$$



شکل ۳. نمایش کمبود در حالت ترکیبی پس‌افت و فروش از دست رفته

هزینه کمبود در حالت فروش در دست رفته) است. و سایر هزینه و محدودیت‌ها عیناً در این قسمت نیز تکرار می‌شوند در حقیقت در این قسمت C_B حذف و C_L نیز به طور مشابه با به کارگیری شکل (۱) محاسبه و جایگزین می‌شود. کاملاً مشخص است با توجه به اینکه در حالت اول کمبود رخ نمی‌دهد لذا میزان فروش از دست رفته صفر است و در حالت دوم داریم:

$$L = \int_{t_D}^{T_{Max}} (DT - R) f_T(t) dt \quad ; \quad t_D < T \leq T_{Max} \quad (13)$$

زیرا کل کمبود که $(DT - R)$ است از دست می‌رود، از طرفی چون سود از دست رفته بابت هر واحد $(P - W)$ است، لذا C_L از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C_L = (P - W)L \quad (14)$$

پس مدل تک محصولی - فروش از دست رفته عبارتست از:

$$\begin{aligned} \text{Max: } Z &= r - C_p - C_h - C_L \\ &= PQ - WQ - hI - (P - W)L \end{aligned}$$

S.t:

$$\begin{aligned} fR &\leq F \\ R &\geq 0, Integer \end{aligned} \quad (15)$$

و مدل ریاضی فوق همراه با جزئیات به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Max: } Z &= (P - W) \left[\int_{T_{Min}}^{\frac{R}{D}} (DT) f_T(t) dt + \int_{\frac{R}{D}}^{T_{Max}} (R) f_T(t) dt \right] \\ &\quad - h \left[\int_{T_{Min}}^{\frac{R}{D}} \left(RT - \frac{DT^2}{2} \right) f_T(t) dt + \int_{\frac{R}{D}}^{T_{Max}} \frac{R^2}{2D} f_T(t) dt \right] \\ &\quad - \left[(P - W) \int_{\frac{R}{D}}^{T_{Max}} (DT - R) f_T(t) dt \right] \end{aligned}$$

S.t:

$$\begin{aligned} fR &\leq F \\ R &\geq 0, Integer \end{aligned} \quad (16)$$

۳-۵. مدل تک محصولی - حالت ترکیبی پس‌افت و فروش از دست رفته

در این حالت با ترکیبی کردن حالت پس‌افت و فروش از دست رفته Q, L, B با تغییراتی مواجه می‌شوند. با در نظر گرفتن شکل ۳ اقدام به محاسبه ۳ پارامتر فوق می‌کنیم. همانطور که قبلاً عنوان شد حداکثر کمبود $(DT - R)$ است که در حالت ترکیبی β درصد آن حالت پس‌افت و $(1 - \beta)$ درصد حالت فروش از دست رفته می‌یابند، لذا B, L با توجه به شکل ۲ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

مدل به اندازه کافی سخت باشد [۱۸]. تحت چنین شرایطی می توان از الگوریتمهای جستجوگر تصادفی استفاده نمود [۱۸].

۴-۱. مقدمه‌ای بر شبیه‌سازی تبرید

در سال (۱۹۵۳) متروپلیس^۱ الگوریتمی را برای ارزیابی تغییرات دمای جسم جامد ارائه داد. او ابتدا دمای جسم را بالا برده تا جسم به حالت مذاب درآید و سپس برای کاهش انرژی درونی جسم اتم‌های آن را جابجا نموده تا انرژی جسم کاهش یابد. این جابجایی مابین دو اتم انجام می‌گیرد. سپس در همسایگی این اتم، اتم دیگری را انتخاب نموده که با این اتم جابجا می‌شود. در صورتی که در اثر جابجایی، انرژی جسم کاهش یابد جابجایی پذیرفته شده ولی در صورت عدم کاهش انرژی این جابجایی با یک احتمال پذیرفته می‌شود. بعدها در سال (۱۹۸۳) Patrik با شبیه‌سازی این الگوریتم بین مینیمم کردن تابع هزینه یک مسأله و سرد کردن جسم تا زمان رسیدن آن به حالت انرژی پایه از آن برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کرد که با این عمل او و همکارانش الگوریتمی به نام SA ارائه دادند. ایشان SA را جهت مسائل بهینه‌سازی ترکیبی به کار بردند. در فرآیند آنیل نمودن در هر مرحله یک اتم به میزان کمی جابجا شده که این کار منجر به تغییر در انرژی سیستم می‌شود که با ΔE نمایش می‌دهند. اگر $\Delta E \leq 0$ باشد، جابجایی دو اتم پذیرفته شده و ساختار جامد با اتم جابجا شده به عنوان نقطه شروع مرحله بعد مورد استفاده واقع می‌شود. در حالتی که $\Delta E \geq 0$ باشد؛ به صورت احتمالی برخورد می‌شود. بدین معنی که احتمال اینکه ساختار جامد پذیرفته شود با استفاده از رابطه ذیل تعیین می‌شود که در آن:

$$T_0: \text{درجه حرارت اولیه} \quad K_b: \text{ثابت بولتزمن} \quad (24)$$

$$P(\Delta E) = e^{-\frac{\Delta E}{K_b T}}$$

هستند. در حقیقت یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت در فاصله (۰، ۱) انتخاب شده و با $P(\Delta E)$ مقایسه می‌شود. اگر عدد به دست آمده کمتر از $P(\Delta E)$ باشد؛ ساختار جدید پذیرفته شده و جهت شروع مرحله بعد استفاده می‌شود. در غیر اینصورت ساختار جدید رد می‌شود. این فرآیند ادامه پیدا می‌کند تا اینکه به یک سطح تعادل^۲ دست پیدا کند.

۴-۲. شکل عمومی الگوریتم شبیه‌سازی تبرید

معمولاً الگوریتم‌های بهبود دهنده که با یک جواب اولیه شروع شده و در طی مراحل بهبود داده می‌شود؛ ممکن است بعد از چند تکرار در نقطه بهینه محلی^۴ قرار بگیرند که گاهی از ناحیه جواب نهایی

در حقیقت این مدل در حالت تک محصولی و بدون محدودیت ارائه شده است. در توسعه مدل تک محصولی به چند محصولی حالت ترکیبی پس‌افت و فروش از دست رفته که کامل‌تر از دو حالت دیگر است در قسمت بعدی مدنظر قرار می‌گیرد.

۳-۶. مدل چند محصولی - حالت ترکیبی پس‌افت و فروش از دست رفته

با توجه به توضیحات و مدل تک محصولی ارائه شده برای حالت ترکیبی پس‌افت و فروش از دست رفته (۲۰) مدل چند محصولی آن عبارتست از:

$$S.t \text{ Max: } Z = \sum_{i=1}^n [(P_i - W_i)Q_i - h_i I_i - \pi_i B_i - (P_i - W_i)L_i]$$

:

$$\sum_{i=1}^n f_i R_i \leq F$$

$$R_i \geq 0, \text{ Integer} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

در ادامه به عنوان یک نمونه برای متغیر تصادفی T توزیع یکنواخت پیوسته در نظر گرفته شده و مدل آن به صورت زیر ارائه می‌شود.

۳-۶-۱. T_i دارای توزیع یکنواخت است.

در این حالت تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $f_{T_i}(t_i) = \frac{1}{T_{\max,i} - T_{\min,i}} T_i$ می‌باشد. حال با وارد کردن تابع چگالی و لحاظ کردن n کالا مدل به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$Max : Z = \sum_{i=1}^n \left[\frac{h_i}{6D_i^2 (T_{\max,i} - T_{\min,i})} \right] R_i^3$$

$$- \sum_{i=1}^n \left[\frac{2(p_i - w_i)(1 - \beta_i) + \pi_i \beta_i + h_i T_{\max,i}}{2D_i (T_{\max,i} - T_{\min,i})} \right] R_i^2$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{4(p_i - w_i)(1 - \beta_i)T_{\max,i} + h_i T_{\min,i}^2 + 2\pi_i \beta_i T_{\max,i}}{2(T_{\max,i} - T_{\min,i})} \right] R_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{-h_i T_{\min,i}^3 D_i + 3(p_i - w_i)(\beta_i T_{\max,i}^2 - T_{\min,i}^2) D_i}{6(T_{\max,i} - T_{\min,i})} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[\frac{-3T_{\max,i}^2 D_i (\pi_i \beta_i + (p_i - w_i)(1 - \beta_i))}{6(T_{\max,i} - T_{\min,i})} \right]$$

S.t:

$$\sum_{i=1}^n f_i R_i \leq F$$

$$R_i \geq 0, \text{ Integer} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

۴. الگوریتم حل

باتوجه به مدل (۲۳) می توان نتیجه گرفت که مدل دارای شرایط غیرخطی و عدد صحیح است. این ویژگیها موجب می شود که حل

¹ Metropolis

² Boltzman

³ Equilibrium

⁴ Local Optimum

همسایگی از روش جستجوی تصادفی استفاده می‌نمایند. در این مسئله جواب اولیه بر اساس روش اول و به کمک الگوریتم ژنتیک تولید و چندین جواب مناسب از جمله بهتری‌ن جواب انتخاب و به کمک SA اقدام به بهبود آنها شده است.

۴-۴-۲. نحوه تعیین درجه حرارت اولیه

یکی از پارامترهایی که در پذیرش یا عدم پذیرش تغییرات تابع هدف نقش دارد دما است. انتخاب مقدار اولیه دما باید به گونه‌ای صورت گیرد که در مراحل اولیه تعداد زیادی از جواب‌های نامطلوب پذیرفته شوند. این کار به دلیل امکان تغییر و توسعه بیشتر جواب است. تعداد تکرار در طول فرآیند آنیل نمودن به طور نسبی به درجه حرارت اولیه بستگی دارد. البته شیوه‌های گوناگون مطرح شده که در اینجا دمای اولیه یک عدد بزرگ فرض شده است.

۴-۴-۳. نحوه تغییر درجه حرارت

یکی از جنبه‌های اساسی در ارتباط با فرآیند آنیل نمودن، تغییر درجه حرارت در طول اجرای الگوریتم SA است. در حقیقت درجه حرارت در احتمال پذیرش جواب بدتر نقش دارد. چراکه اگر درجه حرارت بسیار زیاد باشد، یک تعداد زیادی از جواب‌های بد پذیرفته و منجر به خارج شدن از نقطه بهینه محلی می‌شود. برعکس هنگامی که درجه حرارت پایین باشد، احتمال قرار گرفتن در نقطه بهینه محلی زیاد است. در ارتباط با نحوه کاهش درجه حرارت در ادبیات SA، یکی از روش‌ها، استفاده از تابع کاهش درجه حرارت بر اساس فرآیند آنیل نمودن است که در این مقاله نیز از این نوع توابع استفاده شده و تابع آن یک تابع هندسی به صورت زیر است:

$$T_k = \alpha T_{k-1}, 0 < \alpha < 1 \quad (25)$$

۴-۴-۴. شرط تعادل

در روش SA نیاز است تا پس از یک سری تکرار در درجه حرارت معین، حالت تعادل بررسی شود که آیا فرآیند آنیل نمودن در همان درجه حرارت ادامه پیدا کند و یا متوقف شده و به درجه حرارت بعدی برود. در اغلب روش‌های SA جهت بررسی شرط تعادل در یک درجه حرارت، تعداد تعویض‌های معینی باید در آن درجه حرارت انجام شود که به آن تکرار^۲ گفته می‌شود. به عنوان مثال بیش از N_k تکرار در دمای k تغییر دما صورت گیرد. در این مقاله نیز از این روش استفاده شده است.

۴-۴-۵. شرط توقف

انواع متعددی از معیارهای توقف جهت مسائل مختلف SA ارائه شده است. برخی از آنها به شرح ذیل می‌باشند:

نیز خیلی دور است. فرق الگوریتم SA با الگوریتم‌های بهینه‌سازی محلی در این است که در روش SA از توقف در ناحیه بهینه محلی اجتناب کرده و به طور گذرا از آن رد می‌شود. این حالت با پذیرفتن احتمالی جواب‌های بد انجام می‌شود، تا از نقطه بهینه محلی خارج شود. به عبارت دیگر در صورت ایجاد جواب j در همسایگی جواب قبلی یعنی i ، فقط در صورتی که جواب j باعث بهبود تابع هدف شده پذیرفته نمی‌شود، بلکه حتی هنگامی که جواب j از جواب i بدتر باشد نیز با احتمال مشخصی پذیرفته خواهد شد. این احتمال برابر است با $\left(e^{-\frac{df}{T_0}} \right)$ که در آن:

T_0 : درجه حرارت اولیه

df : میزان تغییر در تابع هدف $df = f(i) - f(j)$

اگر این احتمال از یک عدد تصادفی یکنواخت بین (۰،۱) بیشتر باشد، جواب نامناسب هم پذیرفته می‌شود. به صورت تئوری Aarts و همکارش اثبات کرده‌اند که الگوریتم SA به سمت جواب بهینه همگرایی دارد [۱۹].

۴-۳. مراحل الگوریتم شبیه‌سازی تبرید

- انتخاب جواب اولیه i از مجموعه جواب‌های امکان‌پذیر
- انتخاب درجه حرارت اولیه T_0 و تعداد تکرارها در هر دما $N(t)$.
- تعیین فرآیند کاهش درجه حرارت.
- انتخاب تابع مربوط به تعداد تعویض‌ها در هر درجه حرارت.
- مساوی صفر قرار دادن شمارنده مربوط به تغییر درجه حرارت ($t = 0$).
- تکرار حلقه فرآیند انجماد.
- محاسبه درجه حرارت جدید (کاهش دما).
- تکرار حلقه تا برقراری شرط توقف.

۴-۴. پارامترهای کنترلی در شبیه‌سازی تبرید

- به هنگام اجرای الگوریتم شبیه‌سازی تبرید، مهم‌ترین پارامترهایی که باید بررسی شوند عبارتند از:
- نحوه تولید فضای همسایگی^۱
 - نحوه تعیین درجه حرارت اولیه
 - نحوه تغییر درجه حرارت
 - شرط تعادل
 - شرط توقف

۴-۴-۱. نحوه تولید فضای همسایگی

روش‌های حل را از نظر نحوه تولید فضای همسایگی می‌توان به دو دسته طبقه‌بندی نمود. روش اول انتخاب تصادفی جواب از بین فضای امکان‌پذیر است. دسته دیگری از مسائل، جهت انتخاب فضای

² Epoch

¹ Neighborhood

جدول ۲. داده های مربوط به پارامترهای الگوریتم

T_0	$N(t)$	α
۱۰۰۰	۱۰۰	۰.۹۹
۲۰۰۰	۲۰۰	۰.۹۵
۵۰۰۰	۵۰۰	۰.۹۰

جدول ۳. بهترین ترکیب برای پارامترهای الگوریتم

T_0	$N(t)$	α
۵۰۰۰	۲۰۰	۰.۹۵

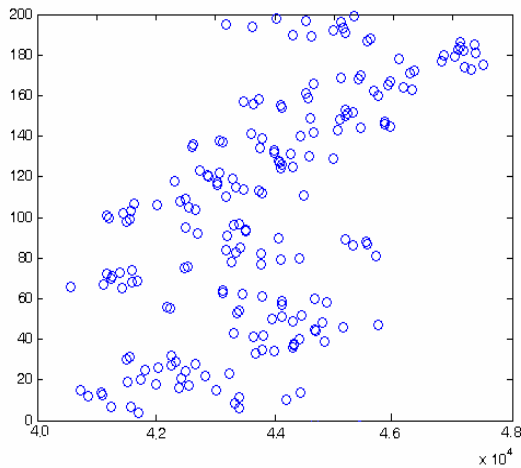
جدول ۴. بهترین جواب حاصل

محصول	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
R_i	۳۲۹	۱۲۸	۱	۱۱۴	۲۷۱	۱۵۱	۳۳	۶۷

۶. جمع بندی

در این مقاله یک مدل بازپرسازی تصادفی توسعه داده شد و از آنجایی که زمان بازپرسازی متغیر تصادفی در نظر گرفته شد لذا بر اساس تابع چگالی یکنواخت پیوسته مدل سازی مسئله صورت گرفت. در پایان نیز یک الگوریتم حل برای حل مسئله ارائه شد. از جمله کارهای آتی که می توان برای این مسئله در نظر گرفت عبارتند از:

- ۱) برخی از پارامترهای مدل را می توان فازی در نظر گرفت. تحت چنین شرایطی تحلیل مدل با استفاده از رویکردهای فازی انجام می شود.
- ۲) مدل ارائه شده را می توان با در نظر گرفتن تخفیف نمودی یا افزایشی نیز توسعه داد.
- ۳) می توان محدودیت هایی نظیر سطح خدمت یا سقف سفارش را نیز در مسئله در نظر گرفت.



شکل ۴. نمودار خروجی الگوریتم

- رسیدن به یک درجه حرارت نهایی.
 - بر اساس تعداد کل مراحل که باید انجام شود.
 - بر اساس تعداد کل تعویض های پذیرفته شده در طول فرآیند آنیل نمودن.
 - تعداد تغییرات رد شده در کل تکرارها به مقدار معینی رسیده باشد.
- لازم به ذکر است در این مقاله در شرط توقف از حالت اول استفاده شده است.

۵. مثال عددی

در این بخش نحوه کارکرد الگوریتم به همراه حل یک مثال عددی با اطلاعات ورودی جدول (۱) مورد بررسی قرار می گیرد. Ertogal و همکارش [۱۷] در مقاله خود ۸ مسئله را طرح و آنرا حل نمودند. در این قسمت از اطلاعات مسائل ارائه شده ای شان استفاده و یک مسئله ۸ محصولی همراه با محدودیت فضا طرح شده است. در این مثال $Z = 5000$ در نظر گرفته شده است. ضمناً پارامترهای الگوریتم هر یک در سه حالت مورد بررسی قرار می گیرند $(N(t), \alpha, T_0)$ که در جدول ۲ مقادیر آنها ارائه شده است. لذا در مجموع تمامی جایگشت های آن که ۲۷ حالت است، بررسی و نهایتاً بهترین ترکیب آنها انتخاب که در جدول ۳ نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که در انتخاب بهترین پارامتر از معیار ماکزیمم ماکزیمم ها استفاده شده است. یعنی از بین هر یک از ۲۷ حالت فوق که منجر به ۲۷ مقدار برتر (بیشترین تابع هدف در هر جایگشت) می شود، بهترین جواب انتخاب و آن ترکیب از پارامترها که بهترین جواب را حاصل کرده است به عنوان بهترین ترکیب انتخاب شده است. از طرفی بهترین جواب به دست آمده از الگوریتم نیز در جدول ۴ نشان داده شده است که به ازای آن مقدار $Z = 47372$ است. در پایان نیز نموداری برای خروجی های الگوریتم (مقدار تابع هدف در تکرارهای متفاوت) که مبین بهترین جواب خواهد بود ارائه شده است (شکل ۴).

جدول ۱. داده ها جهت مثال عددی

محصول	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
h_i	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
π_i	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵
W_i	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰
P_i	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۰
D_i	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
β_i	۰.۵	۰.۹	۰.۹	۰.۵	۰.۵	۰.۹	۰.۹	۰.۵
f_i	۳	۳	۳	۳	۶	۶	۶	۶
T_{Min}	۲۰	۲۰	۵۰	۵۰	۲۰	۲۰	۵۰	۵۰
T_{Max}	۴۰	۴۰	۷۰	۷۰	۴۰	۴۰	۷۰	۷۰

مراجع

- [13] Lo, W.Y., Tsai, C.H., KweiLi, R., *Exact Solution of Inventory Replenishment Policy for a Linear Trend in Demand –Two –Equation Model*, International Journal of Production Economics, Vol. 76, No. 2, Mar 2002, pp. 111-120
- [14] Chen, C.K., Hung, T.W., Weng, T.C., *A Net Present Value Approach in Developing Optimal Replenishment Policies for a Product Life Cycle*, Applied Mathematics and computation, Vol. 184, No. 2, Jan 2007, pp. 360-373.
- [15] Teng, J.T., Chang, C.T., Goyal, S.K., *Optimal Pricing and Ordering Policy Under Permissible Delay in Payment*. International Journal of Production Economics, Vol. 97, No. 2, Aug 2005, pp. 121-129.
- [16] Lida, T., *A Non-Stationary Periodic Review Production-Inventory Model with Uncertain Production Capacity and Uncertain Demand*. European Journal of Operational Research, Vol. 140, No. 3, Aug 2006, pp. 670-683.
- [17] Ertogral, K., Rahim, M.A., *Replenish-Up-To Inventory Control Policy with Random Replenishment Interval*, International Journal of Production Economics, Vol. 93-94, Jan 2005, pp. 399-405
- [18] Gen, M., *Genetic Algorithm and Engineering Design*, John Wiley & sons, 1997.
- [19] Aarts, E., Korst, J., *Simulated Annealing and Boltzman Machine*, John Wiley & sons, 1989.
- [1] Chiang, C., *Optimal Replenishment For a Periodic Review Inventory System With Two Supply Modes*, European Journal of Operational Research, Vol. 149, No.1, Aug 2003, pp. 229-244.
- [2] Mohebi, E., Morton, J.M., Posner, K., *Multiple Replenishment Orders in Continuous-Review Inventory System With Lost Sales*, Operation Research Letters, Vol.30, No. 2, Apr 2002, pp. 117-129.
- [3] Feng, K., Rao, U.S., *Echelon-Stock (R-nT) Control in two Stages Serial Stochastic Inventory System*. Operation Research Letters, Vol. 35, No. 1, Jan 2007, pp. 95-104.
- [4] Ouyang, L.Y., Chuang, B.R., *A Periodic Review Inventory Model Involving Variable Lead time With a Service Level Constraint*. International Journal of System Science, Vol. 31, No.2, May 2000, pp. 1209-1215.
- [5] Mohebbi, E., *A Replenishment Model for the Supply-Uncertainty Problem*, International Journal of Production Economics, Vol. 87, No. 1, Jan 2004, PP. 25-37
- [6] Chiang, C., *Optimal Ordering Policies for Periodic-Review Systems with Replenishment Cycles*, European Journal of Operational Research, Vol. 170, No. 1, Apr 2006, pp. 44-56.
- [7] Qu, W., Bookbinder, J.H., Iyogun, P., *An Integrated Inventory-Transportation System with Modified Periodic Policy for Multiple Product*, European Journal of Operational Research, Vol.115, No. 2, Jun 1999, pp. 254-269.
- [8] Eynan, A., Kropp, D., *Effective and Simple EOQ-like Solutions for Stochastic Demand Periodic Review System*, European Journal of Operational Research, Vol. 180, No. 3, Aug 2007, pp. 1135-1143.
- [9] Bylka, S., *Turnpike Policies for Periodic Review Inventory Model with Emergency Orders*, International Journal of Production Economics, Vol. 93-94, Jan 2005, pp. 357-373.
- [10] Minner, S., Silver, E.A., *Replenishment Policies for Multiple Products with Compound Poisson Demand That Share a Common Warehouse*, International Journal of Production Economics, Vol. 108, No. 1, July 2007, 388-398.
- [11] Goyal, S.K., Giri, B.C., *A Simple Rule for Determining Replenishment Intervals of an Inventory Item with Linear Decreasing Demand Rate*, International Journal of Production Economics, Vol. 83, No. 2, Feb 2003, pp. 139-142.
- [12] Yang, J., Zhao, G.Q., Rand, G.K., *Comparison of Several Heuristics Using an Analytic Procedure for Replenishment with Non-Linear Increasing Demand*, International Journal of Production Economics, Vol. 58, No. 1, Jan 1999, pp. 49-55.