

## Optimizing the Service Card in Multi-Depot, Multi-Product and Multi-Level Vehicle Routing Problems with the Aim of Minimizing the Total Distribution Costs

M. Mehdi Sepehri & Mehrdad Kargari

M. Mehdi Sepehri, Tarbiat Modares University  
Mehrdad Kargari, Tarbiat Modares University

### Keywords

multi-depot, multi-product and multi-level vehicle routing, minimizing distribution costs, Lagrange coefficients, network models, resource allocation and resource leveling, service card

### ABSTRACT

Optimizing the service card in multi-depot, multi-product and multi-level vehicle routing problem is one of the most important and at the same time, the most complex problems in the transportation problems contexts. Numerous exact heuristic and meta-heuristic algorithms have been developed for different vehicle routing problems. In this paper, a binary linear programming (BLP) based model for optimizing the service card in multi-depot, multi-product and multi-level vehicle routing problems with the aim of minimizing the total distribution costs has been proposed. In other words, the purpose of this paper is to determine the optimum transportation for each product in vehicle routing problems for every route, grade and level with minimum distribution costs. Then, an effective algorithm has been developed to solve the problem. The proposed algorithm using the limited resource leveling based on the Lagrange coefficients; transform the multi-product problem into multiple single-product problems. When each mathematical model for single product vehicle routing problems is solved, the assigned capacity and the required capacity values for each product are compared and then the available and total capacity is calculated. Finally, resource leveling and service card optimization processes are applied to all single-product problems. Therefore, after several steps if no considerable improvement is observed in the solution, then the optimal solution is achieved for the original problem. Design of experiments and validation tests used in the paper indicate the optimal utilization of the limited resources and a considerable reduction in the total distribution costs. Validity of the proposed algorithm against the binary linear programming model has been verified at 95% and computational time has been reduced by 5 times.

© (نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید) شماره ۱، جلد ۲۱، ۱۳۸۹

## بهینه یابی سبد سرویس در مسائل مسیریابی چند سطحی - چند محصولی و چند قرارگاهی وسایل نقلیه با هدف حداقل نمودن هزینه های توزیع

محمد مهدی سپهری<sup>۱</sup> و مهرداد کارگری

تاریخ وصول: ۸۸/۸/۲۵

تاریخ تصویب: ۸۹/۱/۳۱

دکتر محمد مهدی سپهری، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس [mehdi.sepehri@modares.ac.ir](mailto:mehdi.sepehri@modares.ac.ir)

مهرداد کارگری، دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس [m\\_kargari@modares.ac.ir](mailto:m_kargari@modares.ac.ir)

## کلمات کلیدی

مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی -  
چند محصولی و چند سطحی ،  
حداقل نمودن هزینه‌های توزیع ،  
ضرایب لاگرانژ، مدل‌های شبکه‌ای ،  
تخصیص و تسطیح منابع ،  
سبد سرویس

## چکیده:

موضوع بهینه‌یابی سبد سرویس مسایل مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی - چند محصولی و چند سطحی یکی از مهم‌ترین و در عین حال مشکل‌ترین مسائل تصمیم‌گیری در حوزه مسائل حمل و نقل می‌باشد. تاکنون الگوریتم‌های دقیق، ابتکاری و فوق‌ابتکاری متنوعی برای حل مدل‌های مختلف مسائل مسیریابی وسایل نقلیه ارائه شده است. در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک (BLP) برای بهینه‌یابی سبد سرویس در مسایل مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی - چند محصولی و چند سطحی با هدف حداقل نمودن هزینه‌های توزیع ارائه شده است. بعبارت بهتر هدف این مقاله تعیین میزان نسبت بهینه حمل و نقل برای هر یک از محصولات در وسایل نقلیه برای هر یک از مسیرها، نواحی و سطوح با حداقل هزینه توزیع می‌باشد. سپس برای حل این مدل یک الگوریتم کارا طراحی گردید. این الگوریتم با استفاده از تخصیص منابع محدود بر پایه ضرایب لاگرانژ، مسئله مسیریابی چند محصولی را به چند مسئله تک محصولی تبدیل می‌کند. بعد از حل مدل ریاضی هر یک از مسائل مسیریابی تک محصولی، با مقایسه ظرفیت تخصیص داده شده و مورد نیاز هر یک از محصولات، میزان ظرفیت باقیمانده و کل را محاسبه و سپس عملیات تسطیح منابع و بهینه‌یابی سبد سرویس در بین مسائل مسیریابی تک محصولی انجام می‌شود. براین اساس بعد از چند مرحله، تسطیح ظرفیت‌های باقیمانده، در صورتی که بهبود قابل توجهی در جواب مسئله حاصل نشود، جواب مسئله اصلی حاصل شده است. طراحی آزمایشات و اعتبار سنجی انجام شده در این مقاله بیانگر استفاده بهینه این روش از منابع کمیاب و کاهش قابل توجه هزینه‌های توزیع می‌باشد. این آزمایشات اعتبار الگوریتم طراحی شده را نسبت به مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک در سطح ۹۵ درصد تأیید نموده و زمان حل مسائل را بمیزان ۵ برابر کاهش داده است.

## ۱. مقدمه

موضوع مسیریابی وسایل نقلیه و اهمیت آن از دیر باز تاکنون مورد توجه محققین و دانش پژوهان بوده است. معمول‌ترین سیستم‌ها در دنیای پخش و توزیع، مسئله مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی - چند محصولی و چند سطحی با هدف حداقل نمودن هزینه‌های توزیع می‌باشد [۱].

مسیریابی وسایل نقلیه فعالیتی است که هدف آن استفاده بهینه از منابع توزیع، بمنظور تأمین تقاضای مشتریان در موعد معین، به میزان معین و در مکان معین با حداقل هزینه می‌باشد. در این سیستم‌ها تحویل هر محصول به مشتری نیاز به انجام یک سری عملیات در مراحل مختلف است. هر مرحله از سیستم بیانگر حمل یک یا چند کالا توسط یک یا چند ماشین از یک نقطه به نقطه دیگر است. در این سیستم هر مرحله انجام عملیات کالا را مشتریان نهایی نزدیکتر می‌کند.

یکی از مهمترین و بهترین راه‌های کنترل هزینه‌های توزیع، تصمیم‌گیری صحیح در مورد عملیات تخصیص منابع محدود برای تعیین انباشته توزیع برای هر یک از محصولات در مسیرها، سطوح و نواحی مختلف است. زیرا در مدل‌های مسیریابی وسایل نقلیه عدم استفاده کامل از ظرفیت وسایل نقلیه، افزایش موجودی در انبارهای مراحل مختلف توزیع و مسیریابی طولانی هزینه زیادی را به سیستم تحمیل می‌کند [۲].

تصمیمات مدیریتی در مسیر یابی وسایل نقلیه را بطور کلی میتوان در سه دسته مسائل تصمیم‌گیری بلند مدت، میان مدت و کوتاه مدت تقسیم بندی نمود. در مسائل بلند مدت معمولاً تأکید بیشتر بر پیش‌بینی نیازهای کلی بوده و شامل تصمیم‌گیریهای استراتژیک از قبیل انتخاب محل انبارهای توزیع، انتخاب تجهیزات و فرآیند توزیع، انتخاب نوع محصولات، ایجاد مسیرهای جدید و پیش‌بینی تقاضای مشتریان است. در برنامه‌ریزی میان مدت مواردی همچون دسته بندی مشتریان، تعیین انباشته‌های توزیع، مسیریابی هر یک از وسایل نقلیه با هدف حداقل نمودن مجموع هزینه‌های توزیع مورد نظر قرار می‌گیرد. در برنامه‌ریزی کوتاه مدت مسایلی چون زمانبندی عملیات حمل و نقل روزانه، تعیین توالی عملیات حمل و نقل و تخصیص وسایل به عملیات توزیع مورد توجه می‌باشد [۳].

امروزه پرداختن به موضوع بهینه‌یابی سبد سرویس در مسایل مسیر یابی وسایل نقلیه قبل از آنکه متوجه سخت‌افزار باشد حول محور نرم‌افزار دور می‌زند. یعنی روش‌های جدید، افزایش بهره‌وری و کاهش هزینه را صرفاً در افزایش منابع نمی‌داند و قبل از آنکه بفرک توسعه و سرمایه‌گذاری اضافی برای منابع جدید باشند، اهمیت ویژه‌ای برای بکارگیری هرچه بهتر از منابع در دسترسی قائل است. بعبارت بهتر آن بخش از تصمیمات مدیریتی که در مسیریابی وسایل نقلیه بیشتر مورد نظر است تصمیمات میان مدت بوده که

مسئله مسیریابی وسایل نقلیه بطور کلی به سه دسته زیر تقسیم میشوند:

- تامین مواد اولیه و قطعات مورد نیاز از تامین کنندگان
- جابجایی مواد و قطعات نیمه ساخته در درون کارخانه
- پخش و توزیع محصولات نهایی در بین مشتریان

هزینه‌های حمل و نقل بین (50-10) درصد قیمت تمام شده محصولات را تشکیل میدهد، بنابراین کاهش هزینه‌های حمل و نقل تاثیر قابل توجهی بر کاهش قیمت تمام شده محصولات خواهد داشت [۴-۶]. از آنجا که اخذ تصمیمات صحیح در هر یک از موارد فوق بر روی افزایش عملکرد سیستم حمل و نقل و بهره‌وری آن تاثیرگذار بوده و در توانایی و قابلیت رقابت شرکتهای پخش و توزیع نقش تعیین کننده‌ای دارد، توسعه و بهبود روشهای مدلسازی و حل مدل‌های بهینه‌یابی سید سرویس در مسائل مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی چند محصولی و چند سطحی با هدف حداقل نمودن هزینه‌های توزیع اهمیت زیادی داشته و در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. تصمیمات میان مدت مدیریتی در مسائل مسیریابی وسایل نقلیه دارای اهمیت بیشتری میباشد. تصمیمات مهم در مسائل مسیریابی این تحقیق شامل دسته بندی مشتریان، تعیین انباشته‌های توزیع و مسیریابی هر یک از وسایل نقلیه با هدف حداقل نمودن مجموع هزینه‌های توزیع می‌باشد. زیرا در مدل‌های مسیریابی چند ایستگاهی- چند محصولی و چند سطحی بعد از عملیات خوشه‌بندی مشتریان نوبت به تعیین اندازه انباشته توزیع برای هر یک از محصولات در مسیرها، سطوح و نواحی مختلف میشود. سپس عملیات مسیریابی انجام میشود [۷]. بعنوان یک اصل کلی می‌توان گفت، هرچه وسایل حمل و نقل بزرگتر باشد، زمان بارگیری و باراندازی افزایش یافته و زمان طی مسیر کاهش می‌یابد [۸]. براین اساس تلفیق سیاست‌های خوشه بندی، تعیین انباشته‌های توزیع و مسیریابی وسایل نقلیه در هر یک از مراحل، سطوح و نواحی مختلف، هزینه‌های سیستم توزیع را حداقل می‌کند [۹].

- لاپورت و همکاران [۱۰] یک الگوریتم انشعاب و تحدید برای حل مسائل MDVRP ارائه نمودند، ایشان یادآوری نمودند که این الگوریتم‌ها فقط برای حل مسائل کوچک مناسب هستند.
- سامیچراست و مارخام [۱۱] مسئله حمل و نقل مواد خام از چندین ایستگاه به مجموعه‌ای از تاسیسات را در قالب MDVRP فرموله کردند.
- واستون و همکاران [۱۲] یک مدل سه لایه بهینه سازی برای سیستم حمل و نقل محصولات کارخانجات تولیدی ارائه نمودند
- نامبیار و همکاران [۱۳] برای حل مدل سه لایه، با حذف انبارهای میانی مسئله را به مدل دو لایه تبدیل و سپس آن را حل نمودند. ایشان عقیده داشتند که همه مدل‌های چند لایه با مدل‌های دو لایه قابل حل میباشد.

دسته بندی مشتریان، تعیین میزان انباشته‌های توزیع و مسیریابی از جمله مسائل مهم آن است، زیرا در سیستم‌های توزیع بعد از تعیین تقاضای مشتریان و تجهیزات حمل، عملیات بر روی دسته‌بندی مشتریان، میزان انباشته توزیع و مسیریابی صورت می‌گیرد. براین اساس یکی از مهمترین و بهترین راههای کنترل و کاهش هزینه‌های توزیع، تصمیم گیری در خصوص دسته بندی مشتریان، تعیین انباشته توزیع و مسیریابی صحیح برای هر یک از وسایل نقلیه در هر پیرو می‌باشد.

در مسائل مسیریابی وسایل نقلیه اهمیت مسیر بین انبار مرکزی تا انبارهای میانی و انبارهای میانی تا انبار مشتریان بسیار آشکار و انکار ناپذیر است و معمولاً هزینه زیادی بر سیستم تحمیل میکند. و لذا کنترل این مسیرها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. همچنین بعنوان یک اصل قبل از عملیات مسیریابی باید مشتریان طبقه بندی شده و پس از تعیین میزان انباشته توزیع عملیات مسیریابی انجام شود. بنابراین ما بدنبال مسیریابی هستیم که با در نظر گرفتن محدودیت وسایل حمل، با حداقل هزینه تقاضای مشتریان را در موعد مقرر تامین کند. در این تحقیق تاکید بر روی برنامه ریزی میان مدت و بطور خاص روی طبقه بندی مشتریان، تعیین انباشته توزیع و مسیریابی است. حل مسئله مسیریابی مستلزم پیش بینی تقاضای مشتریان، طبقه بندی مشتریان، تخصیص وسایل حمل و نقل، تعیین انباشته توزیع و مسیریابی می‌باشد. در صورتی که تصمیمات در همه مراحل بصورت صحیح و بموقع انجام شود باعث حداقل شدن هزینه‌های پخش و توزیع است. یکی از مسائل مهم و کلیدی در بحث حمل و نقل، مدیریت ناوگان وسایل نقلیه ناهمگن مورد استفاده برای ارائه خدمات جمع آوری و توزیع بین مجموعه‌ای فروشندگان و مشتریان با عرضه و تقاضای مشخص بگونه‌ای اقتصادی و مقرون به صرفه میباشد. مدیر سیستم جمع آوری و توزیع نه تنها باید در خصوص تعداد وسایل نقلیه مورد استفاده تصمیم بگیرد، بلکه باید مشخص کند که کدام مشتریان توسط چه وسایل نقلیه ای باید سرویس بگیرند و توالی با حداقل هزینه حمل و نقل و موجودی را نیز مشخص کند. محصولات که قرار است توزیع شود در انبار بارگیری شده و محصولات جمع آوری شده نیز مجدداً به انبار بازگردانده می‌شوند. این عملیات با تخصیص یک وسیله نقلیه به یک مسیر شروع میشود. هر مسیر از یک انبار شروع میشود و مجدداً به آن ختم می‌شود. برای هر مسیر باید محدودیت‌های زمان کاری و ظرفیت وسایل حمل تامین شود. علاوه بر این اگر تقسیم تقاضا مجاز نباشد هر مشتری باید توسط یک وسیله سرویس بگیرد. تاکنون چندین نوع مسئله مسیریابی وسایل نقلیه در ادبیات موضوع مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته اند. اگر چه این مسائل به حالات عملی و کاربردی متفاوتی اشاره دارند. ولی همگی آنها بر مسئله مدیریت کارا و موثر وسایل نقلیه برای سرویس دهی به مجموعه‌ای از مشتریان متمرکز هستند. هزینه‌های

- کلارک و رایت [۲۳] یک روش هیورستیک براساس روش ذخیره سازی توسعه داده‌اند. عملکرد این روش از طریق مقایسه با کران پائین انشعاب و تحدید مورد ارزیابی قرار گرفته است. این روش بعنوان بهترین روش تولید مسیر (ستون) شناخته شده است این روش با یک جواب غیر موجه شروع شده و با ترکیب هر دو تا از مسیرها سعی در کاهش هزینه دارد.
- هدجیکس و بالداس [۲۴] مسئله MDVRP را به چهار سطح تجزیه نمودند. سطح اول تخصیص انبارها به مشتریان است، سطح دوم حل مسائل برای هر انبار است، سطح سوم یک مسئله VRP بصورت پرپودیک است و سطح آخر یک مسئله TSP برای تولید مسیرهای بهینه است.
- ژیلت و میلبر [۲۵] الگوریتم جاروب برای حل مسائل VRP را به مدل MDVRP توسعه دادند. این الگو دومرحله دارد، مرحله اول تخصیص مشتریان انبارها و مرحله دوم چند مسئله VRP ساده است. هر کدام از مسائل VRP توسط الگوریتم جاروب حل شده اند.
- تیلمن و چین [۲۶] مسئله MDVRP را بکمک الگوریتم saving بررسی کردند. مرحله اول تخصیص مشتریان به انبارها و مرحله دوم حل مسائل VRP ساده توسط الگوریتم saving برای هر انبار میباشد.
- مین و همکاران [۲۷] مسئله مسیریابی وسایل نقلیه را بکمک الگوریتم ژنتیک ترکیبی مورد بررسی قرار دادند
- میسا و بوفی [۲۸] ساده ترین نوع مسائل چند لایه مسیریابی را مورد بررسی قرار دادند. مسئله ایشان دارای دو لایه بود
- کوردا و همکاران [۲۹] یک روش جستجوی ممنوع (TS) برای حل مسائل MDVRP ارائه نمودند. در این مقاله برای جایگذاری مجدد مشتری از روش هیورستیک GENI استفاده شده است. این روش معروف ترین روش حل مسائل MDVRP میباشد.
- رناد و همکاران [۳۰] یک روش جستجوی ممنوع برای حل مسائل MDVRP ارائه نمودند. در این مقاله یک الگوریتم ابتکاری بنام Petal توسط نویسندگان ارائه شده است.
- ویلیام و همکاران [۳۱] یک الگوریتم ژنتیک ترکیبی برای حل مسائل MDVRP ارائه نمودند. در این مقاله دو روش ارائه شده است. روش اول جمعیت اولیه را بصورت تصادفی انتخاب میکند و روش دوم جمعیت اولیه را با جستجوی همسایگی (NS) تعیین میکند. جوابهای روش دوم نسبت به روش اول بهتر و زمان کمتری برای حل نیاز داشته است.
- ساک و همکاران [۳۲] مسئله MDVRP را بکمک الگوریتم ژنتیک مورد بررسی قرار دادند. در این مدل محدودیت زمان تحویل کالا به مشتری وجود دارد. مسئله TPS بعنوان ساده ترین حالت مسائل VRP و MDVRP جزء مسائل NP-Hard
- مرست و همکاران [۱۴] اولین مدل چهار لایه را برای سیستم توزیع محصولات کارخانجات ارائه نمودند. مسئله مسیریابی وسایل نقلیه چند محصولی توسط ورن و هولیدی [۱۵] مورد بررسی قرار گرفت. این مقاله دارای یک مدل سه لایه برای حمل و نقل محصولات کارخانجات ارائه نموده است.
- بنویت و همکاران [۱۶] مسئله مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی را مورد تحلیل قرار دادند. در این مدل تعداد و ظرفیت وسایل نقلیه محدود فرض شده است.
- رودلفو و جایم [۱۷] یک مدل مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی شامل بازه زمانی تحویل کالا به مشتری را بررسی کردند. این مقاله سه مرحله دارد. مرحله اول خوشه بندی مشتریان، مرحله دوم مسیریابی و مرحله سوم بهبود مسیرهای تولید شده میباشد.
- صالحی و ساری [۱۸] یک الگوریتم هیورستیک ترکیبی برای حل مسایل مسیریابی چند ایستگاهی و چند سطحی ارائه نمودند. این مدل دارای سه مرحله است مرحله اول تخصیص مشتریان به نزدیکترین انبار، مرحله دوم تولید مسیر در هر یک از خوشه ها و مرحله سوم بهبود مسیرهای تولید شده میباشد.
- فلاحی و همکاران [۱۹] یک الگوریتم جستجوی ممنوع و یک الگوریتم ژنتیک ترکیبی برای مسائل مسیریابی چند محصولی ارائه نمودند. مدل ایشان دارای سه محصول است. وسایل نقلیه یکسان در نظر گرفته شده و فقط یک ایستگاه توزیع وجود دارد در این مقاله مدل ریاضی مسئله مسیریابی وسایل نقلیه برای چند محصول بصورت برنامه ریزی خطی عدد صحیح ارائه شده است
- آلوینا و همکاران [۲۰] یک مدل چند لایه برای مسئله مسیریابی وسایل نقلیه ارائه نمود. مدل ایشان دارای سه لایه است. در این مقاله یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح و یک روش حل ابتکاری ارائه شده است. ایشان در مدل خود برای هر مسیر چند وسیله نقلیه متفاوت در نظر گرفته است. در این مدل MDVRP یک محصولی با تقاضای ثابت بررسی شده است. این روش در مقایسه با بهترین نتایج قبلی تعداد وسایل نقلیه مورد نیاز و مسیرهای طی شده را کاهش داده است.
- گیوسا و همکاران [۲۱] مسئله VRPTW چند ایستگاهی را مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله شش الگوریتم هیورستیک برای تخصیص مشتریان به انبارها طراحی و مقایسه شده است.
- چریستوفید و همکاران [۲۲] مسئله MDVRP در حالت پرپودیک را مورد بررسی قرار دادند. ایشان یک مدل برنامه ریزی خطی برای این مدل ارائه نموده و آنرا به روش آزادسازی ضرایب لاگرانژ حل نمودند. ایشان یک روش هیورستیک نیز برای حل این مدل ارائه نمود.

نقلیه وجود دارد. کمبود موجودی یا سفارشات عقب‌افتاده مجاز نیست. تقاضای هر پریود برای هر مشتری در هر سطح معین و متغیر است. کل تقاضای هر مشتری با یک وسیله نقلیه تامین می‌شود. پارامترها، متغیرهای تصمیم‌گیری، تابع هدف و محدودیت‌های این مدل در یک افق برنامه ریزی نامحدود بصورت زیر تشریح می‌گردد.

## ۲-۱. تعریف پارامترها و متغیرهای تصمیم‌گیری

$I = 1, 2, \dots, n$  شماره گره مبدا  
 $J = 1, 2, \dots, m$  شماره گره مقصد  
 $k = 1, 2, \dots, k$  نوع وسیله نقلیه  
 $r = 1, 2, \dots, R$  شماره مسیر  
 $L = 1, 2, \dots, L$  شماره سطح (لایه)  
 $a = 1, 2, \dots, A$  شماره ناحیه (منطقه)  
 $e = 1, 2, \dots, E$  شماره محصول  
 $d = 1, 2, \dots, D$  شماره مرکز توزیع / تجمیع (دپو)

$n_{La}$ : تعداد مشتریان در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $m_{kLa}$ : تعداد وسایل نقلیه  $k$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $V_{kla}$ : ظرفیت حجمی وسیله  $k$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $d_{iela}$ : تقاضای گره  $i$  یا مشتری  $i$  از محصول  $e$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $V_e$ : حجم یک واحد محصول  $e$   
 $t_{kLa}$ : زمان اتمام جمع‌آوری و آماده‌سازی کالای درخواستی وسیله  $k$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $t'_{iLa}$ : مدت زمان تخلیه بار مشتری  $i$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $t_{ijLa}$ : زمان مسافرت از مشتری  $i$  به مشتری  $j$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $M_{iLa}$ : حداکثر زمان تحویل سفارش (مهلت) به مشتری  $i$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $V_{ekLa}$ : ظرفیت حجمی وسیله  $k$  برای کالای  $e$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $S_{eLa}$ : میزان عرضه کالای  $e$  توسط انبار در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $W_{ikLa}$ : زمان رسیدن به مشتری  $i$  با وسیله  $k$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $U_{kLa}$ : زمان حرکت وسیله نقلیه  $k$  از انبار مرکزی / انبار ناحیه در سطح  $L$  و ناحیه  $a$   
 $C_{ijkla}$ : هزینه پیمون مسیر از گره  $i$  به گره  $j$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$  بوسیله  $k$   
 $X_{ijkla}$ : در صورتی که وسیله  $k$  از گره  $i$  به گره  $j$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$  حرکت نماید یک است و در غیر اینصورت صفر است.  
 $Y_{ikla}$ : اگر مشتری  $i$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$  بوسیله  $k$  تخصیص داده شود مقدار آن برابر یک است و در غیر اینصورت صفر است

است [۳۳] براین اساس مسائل VRP و MDVRP نیز NP-Hard است. بیش از 85 درصد روشهای حل ارائه شده برای مسئله MDVRP بصورت هیورستیک یا متاهیورستیک میباشد (۳۷). در این مقاله ضمن ارائه یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح برای مسائل مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی چند محصولی - چند سطحی با هدف حداقل نمودن هزینه‌های توزیع یک روش هیورستیک برای حل این مدل ارائه شده است.

- ویلیام و همکاران [۳۴] در سال ۲۰۰۸ یک روش متاهیورستیک ترکیبی بر مبنای الگوریتم ژنتیک برای حل مسایل مسیریابی با چند مرکز توزیع ارائه نمودند.
- رودلفو و همکاران [۳۵] در سال ۲۰۰۹ یک روش ترکیبی برای بهبود مسئله مسیریابی وسایل نقلیه با چند مرکز توزیع که دارای پنجره زمانی و ابعاد بزرگ هستند ارائه نمودند.
- ران و همکاران [۳۶] در سال ۲۰۱۰ یک روش هیورستیک دو مرحله‌ای برای مسائل مسیریابی با چند مرکز توزیع و ظرفیت محدود ارائه نمودند.

ساختار این مقاله در ادامه بشرح زیر است:

ابتدا مدل ریاضی بهینه‌یابی سبد سرویس در مسایل مسیریابی چند ایستگاهی - چند محصولی - چند سطحی با هدف حداقل نمودن هزینه‌های توزیع ارائه شده است. سپس این مسئله براساس الگوریتم ابتکاری تجزیه به چند مسئله تک محصولی تبدیل و بعد از تخصیص منابع کمیاب براساس ضرایب لاگرانژ به هریک از مسائل، مدل ریاضی مسئله مسیریابی تک محصولی ارائه و این مسائل بر مبنای الگوریتم ابتکاری توسعه فضای جواب حل شده اند. در نهایت با مقایسه بین منابع مورد استفاده و منابع تخصیص داده شده عملیات تسطیح منابع انجام شده است. بعد چند مرحله تکرار عملیات، جوابهای حاصل با جواب حاصل از روشهای ILP مقایسه و برتری آن مورد تأیید قرار گرفته است.

## ۲. مدل ریاضی مسئله چند محصولی

در این بخش به تشریح مدل ریاضی بهینه‌یابی سبد سرویس در مسایل مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی - چند محصولی و چند سطحی با هدف حداقل نمودن هزینه‌های توزیع می‌پردازیم. در این مسئله محصولات مختلف در استفاده از ظرفیت محدود وسایل نقلیه با یکدیگر رقابت میکنند، لذا می‌بایست با توجه محدودیت ظرفیت وسایل نقلیه، دسته‌های حمل و نقل در هریک از سطوح و مسیرها بگونه‌ای تعیین گردد که تقاضای تمامی محصولات برای همه مشتریان در همه سطوح تامین شود. در این مدل یک مرکز توزیع اصلی وجود دارد. این مرکز توزیع اقلام مورد نیاز انبارهای منطقه‌ای را بین آنها توزیع می‌کند. در مرحله بعد انبارهای منطقه‌ای کالاهای مورد نیاز مشتریان را بین آنها توزیع می‌کنند. در هر مرحله (سطح) توزیع محدودیت ظرفیت وسایل

$$t_{kla} + t_{0jla} - w_{jkla} \leq (1 - X_{0jkla}) \cdot M \quad (11)$$

$$k=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A \quad i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m \quad i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^k \sum_{i \in S} \sum_{j \in N-S} X_{ijkla} \geq 1 \quad \text{for } \forall S \in N, |S| \geq a \quad 0 \in S \quad (12)$$

$$L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$$

$$X_{ijkla} = 0, 1 \quad i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,m / i \neq j \\ k=1,2,\dots,k \quad a=1,2,\dots,A \quad L=1,2,\dots,L \quad (13)$$

$$W_{ikla} \geq 0 \quad K=1,2,\dots,k \quad i=1,2,\dots,n \\ L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A \quad (14)$$

در مدل ریاضی مسئله اصلی رابطه (۱) بیانگر تابع هدف به منظور حداقل نمودن هزینه های توزیع می باشد. رابطه (۲) باعث می شود که درخواست (سفارش) هر مشتری توسط یک وسیله نقلیه انجام شود. رابطه (۳) بیانگر این موضوع است که هر وسیله نقلیه باید مسیر خود را از انبار مرکزی / ناحیه شروع کند. در رابطه (۴) اندیس صفر (n+1)، برای انبار مرکزی و انبار ناحیه بکار می رود. رابطه (۵) باعث می شود که هر وسیله مسیر خود را باید به انبار مرکزی / ناحیه ختم کند. رابطه (۶) باعث ایجاد حلقه توسط هر وسیله نقلیه می شود. رابطه (۷) باعث می شود که زمان رسیدن به هر مشتری نباید زودتر از زمان رسیدن به مشتری قبلی بعلاوه زمان تخلیه بار و طی مسیر تا رسیدن به مشتری قبلی باشد. رابطه (۸) در واقع رابطه غیر خطی (۷) را به یک رابطه خطی تبدیل نموده است و در مدل فقط از رابطه (۸) استفاده می شود. رابطه (۹) باعث می شود زمان رسیدن به هر مشتری نباید از حداکثر زمان تحویل به مشتری تجاوز کند. رابطه (۱۰) محدودیت ظرفیت وسیله نقلیه را تعریف می کند. به گونه ای که حجم درخواست های تخصیص یافته به وسیله نقلیه در هر مسیر از ظرفیت آن تجاوز نکند. رابطه (۱۱) باعث می شود که زمان تحویل کالا به مشتری نباید از زمان انجام جمع آوری و آماده سازی درخواست آن بعلاوه زمان لازم برای رسیدن از انبار مرکزی / ناحیه به مشتری باشد. در این محدودیت M یک عدد مثبت بزرگ و حداقل برابر  $t_{jla} + t_{0jla}$  می باشد. رابطه (۱۲) باعث جلوگیری از تشکیل حلقه زیر تور می شود. محدودیت (۱۳) و (۱۴) بیانگر محدودیت علامت در متغیرهای تصمیم گیری می باشد.

۲-۳. محدودیت های مرتبط با زمان بندی حرکت وسایل نقلیه

اگر بخواهیم برنامه زمان بندی شروع مسافرت ها از انبار مرکزی / انبار ناحیه توسط هر وسیله نقلیه در همه سطوح و نواحی را داشته

در صورتی که مشتری I در سطح L و ناحیه a از وسیله k کالای e را دریافت کند برابر یک است و در غیر این صورت صفر است.

۲-۲. مدل ریاضی مسئله اصلی

تابع هدف:

$$MIN \quad Z = \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ l \neq j}}^m \sum_{k=1}^k \sum_{l=1}^L \sum_{a=1}^A C_{ijkla} \cdot X_{ijkla} \quad (1)$$

محدودیت های مدل:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ l \neq j}}^m \sum_{l=1}^L \sum_{a=1}^A X_{ijkla} = 1 \quad (2)$$

$$k=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad A=1,2,\dots,A$$

$$\sum_{j=1}^{m+1} X_{0jkla} = 1 \quad (3)$$

$$K=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad A=1,2,\dots,A$$

$$d_{0ela} = d_{n+1,ela}, \quad t_{0la} = t_{n+1,la}, \quad t_{0jla} = t_{i,m+1,la} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} X_{i,0,k,l,a} = 1 \quad (5)$$

$$K=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad A=1,2,\dots,A$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n X_{ijkla} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m X_{ijkla} = 0 \quad (6)$$

$$X_{ijkla} (w_{ikla} + t'_{ila} + t_{ijla} - w_{jkla}) \leq 0 \quad (7)$$

$$k=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A \\ j=1,2,\dots,m \quad i \neq j$$

$$w_{ikla} + t'_{ila} + t_{ijla} - w_{jkla} \leq (1 - X_{ijkla}) \cdot M_{ila} \quad (8)$$

$$w_{ikla} \leq M_{ila} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n X_{ijkla} \quad (9)$$

$$k=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A \\ j=1,2,\dots,m \quad i \neq j$$

$$\left[ \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^e (d_{iela} \cdot V_e) \right] \left[ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{e=1}^e Z_{iekla} \right] \leq V_{kla} \quad (10)$$

مسئله دوگان با یک مجموعه از ضرایب لاگرانژ  $(\lambda_{ekla})$  مواجه است بغیر از این دسته محدودیت هیچکدام از محدودیت دیگر در ارتباط با همه محصولات نمیباشد. بنابراین سایر محدودیت‌ها نمی‌توانند بعنوان عامل تجزیه برای ایجاد مسائل مستقل قرار گیرند. بر این اساس بکمک ضرایب لاگرانژ متناظر با محدودیت ظرفیت وسایل نقلیه مسئله مسیریابی  $n$  محصولی به  $n$  مسئله یک محصولی تبدیل میشود.

در این رابطه کابورو همکاران [۲] نشان دادند که اولاً روش ساده سازی ضرایب لاگرانژ نسبت به سایر ساده سازیها دقیق تر عمل میکند. ثانیاً روش ساده سازی ضرایب لاگرانژ بر مبنای محدودیت ظرفیت در مقایسه با سایر محدودیت‌ها قوی ترین حد پائین را نسبت به جواب بهینه ارائه میدهد. ثالثاً تخصیص و استفاده بهینه از منابع کمیاب در مدل‌های بهینه سازی چند مرحله ای باعث تبدیل مدل اصلی به  $n$  مسئله مستقل خواهد شد. در این مدل از نظر عامل (الف) جواب حاصل لزوماً بهینه نیست زیرا:

باشیم باید محدودیت‌های زیر را به مدل ارائه شده اضافه کنیم. این عمل باعث افزایش بار محاسباتی و پیچیدگی مدل میشود.

$$Y_{ikla} = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n X_{ijkla} \quad (15)$$

$$I=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$$

$$U_{kla} \geq \sum_{j=1}^m X_{0jkla} \cdot t_{kla} \quad (16)$$

$$I=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$$

$$Y_{ikla} = 0,1 \quad (17)$$

$$I=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,K \\ L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$$

محدودیت‌های مرتبط با زمانبندی حرکت وسایل نقلیه به صورت زیر تعریف می‌شوند. رابطه (۱۵) باعث می‌شود که هر مشتری فقط به یک وسیله نقلیه تخصیص یابد. رابطه (۱۶) ( زمان شروع به حرکت وسیله نقلیه را حداقل برابر زمان اتمام جمع آوری و آماده سازی سفارش قرار می‌دهد و رابطه (۱۷) بیانگر محدودیت علامت در متغیرهای تصمیم‌گیری می‌باشد.

### ۳. تجزیه مدل ریاضی چند محصولی

محدودیت‌های مدل ریاضی مسئله چند محصولی دارای ساختارهای متفاوت هستند. این امر سبب  $Np$ -Hard شدن مدل مزبور میگردد و لذا جهت حل این مسئله میبایست از روشهای ابتکاری و یا فوق ابتکاری استفاده نمود [۳۳]. یکی از روشهای ابتکاری برای حل مسائل پیچیده بهینه سازی روش تجزیه میباشد. برای استفاده از روش تجزیه در مسائلی که دارای چندین دسته محدودیت با ساختارهای متفاوت هستند، معمولاً این سوال مطرح میگردد، که کدام دسته از محدودیت‌ها باید بعنوان عامل تجزیه در نظر گرفته شود. در پاسخ به این سوال باید روابط متضادی که بین عوامل زیر برقرار میباشد را در نظر گرفت [۱].

الف - قدرت حد حاصل از ترکیب جواب مسائل تجزیه شده

ب- سهولت تجزیه مسئله اصلی به مسائل فرعی

ج- سهولت حل هریک از مسائل فرعی

د- سهولت ترکیب جواب مسائل فرعی برای دستیابی به مسئله اصلی

ه- سهولت تسطیح منابع باقی مانده و تکرار مراحل برای دستیابی به جواب مطلوب

در مدل ریاضی مسئله چند محصولی مشاهده میشود که تنها محدودیت ظرفیت وسایل نقلیه (رابطه 10) در ارتباط با همه محصولات است. متغیرهای متناظر با این دسته محدودیت در

$$\text{Convex} \left[ X : \text{Min} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^E d_{iela} \cdot V_e \right) \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{e=1}^E Z_{iekla} \right) - V_{kla} \right] \leq \quad (18)$$

$$\left[ X : \left( \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^E d_{iela} \cdot V_e \right) \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{e=1}^E Z_{iekla} \right) \leq V_{kla} \right]$$

یعنی حل حاصل از مسئله یک محصولی قوی تر از حل حاصل از روش آزاد سازی خطی است. به عبارت دیگر حد پائین تابع هدف جهت هر یک از مسائل تک محصولی کوچکتر یا مساوی با حد پائین تابع هدف مسئله اصلی است. از نظر عامل (ب) تجزیه مسئله اصلی و تخصیص منابع محدود باعث ایجاد  $(n)$  مسئله یک محصولی مستقل میشود. از نظر عامل (ج) هر یک از مسائل مستقل دارای  $m$  متغیر است که حل آن نسبت به حالت قبل که دارای  $m.e$  متغیر تصمیم‌گیری وجود دارد بر مراتب آسان تر است. عملیات مربوط به مراحل (د) و (ه) با توجه به روابط ارائه شده در قسمت زیر براحتی قابل انجام است.

#### ۳-۱. مراحل تجزیه مدل چند محصولی

۱- محاسبه متوسط مقدار (حجم) محصولات در خواستی مشتریان از کالای  $e$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$

$$\bar{d}_{ela} = \frac{1}{n_{ila}} \sum_{i=1}^n d_{iela} \quad (19)$$

$$e=1,2,\dots,E \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$$

۲- محاسبه نسبت ظرفیت مورد نیاز هر یک از محصولات

$$\lambda_{ela} = \frac{\bar{d}_{ela} \cdot v_e}{\sum_{e=1}^E \bar{d}_{ela} \cdot v_e} \quad (20)$$

$e=1,2,\dots,E \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$

۳- محاسبه ظرفیت مورد نیاز هر یک از محصولات در وسیله R برای سطح L و ناحیه a

$$V_{ekla} = \lambda_{ela} \cdot V_{kla} \quad (21)$$

$e=1,2,\dots,E \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$

#### ۴. مدل ریاضی یک محصولی

پس از تخصیص منابع محدود و تجزیه مدل ریاضی n محصولی به n مدل ریاضی تک محصولی، مدل ریاضی مسئله مسیریابی وسایل نقلیه چند ایستگاهی، چند سطحی و یک محصولی بصورت زیر خواهد بود. پارامترها، متغیرهای تصمیم‌گیری، تابع هدف و محدودیت‌های مدل تک محصولی در مقایسه با مدل چند محصولی بصورت جدول (۱) تغییر می‌کند.

#### جدول ۱. مقایسه مدل تک محصولی و چند محصولی

مدل چند محصولی	مدل تک محصولی
$d_{ila}$ : تقاضای مشتری i برای کالا e برای سطح L و ناحیه a	$d_{ila}$ : تقاضای مشتری i در سطح L و ناحیه a
$Z_{iekla}$ : در صورتی که مشتری i در سطح L و ناحیه a از خودرو k کالا e دریافت کند یک و در غیر اینصورت صفر است.	$Z_{ikla}$ : در صورتی که مشتری i در سطح L و ناحیه a از خودرو k کالا دریافت کند یک است در غیر اینصورت صفر است.
$V_{kla}$ : ظرفیت حجمی وسیله k در سطح L و ناحیه a	$V_{ekla}$ : ظرفیت حجمی وسیله k برای کالا e در سطح L و ناحیه a
$\left[ \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^E d_{ilea} \cdot v_e \right] \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^E Z_{iekla} \right] \leq V_{kla}$	$\left[ \sum_{i=1}^n d_{ila} \cdot v_e \right] \left[ \sum_{i=1}^n Z_{ikla} \right] \leq V_{ekla}$
$\lambda_{ela}$ : نسبت ظرفیت مورد نیاز محصول e در سطح L و ناحیه a	$V_{ekla} = \lambda_{ela} \cdot V_{kla}$

شبکه‌های مظلوف از جمله روش حداکثر جریان با حداقل هزینه و معادلات کرشهف قابل حل است [۱].

#### ۵-۱. تعیین وضعیت متغیرهای صفر و یک

با توجه به اینکه در مدل مورد مطالعه کمبود موجودی/سفرشات عقب افتاده مجاز نیست، تمامی وسایل نقلیه در هر مسیر می‌بایست حداقل به میزان تقاضای مشتری اول ظرفیت داشته باشد تا جواب ممکن حاصل شود. یعنی:

$$V_{ekla} \geq d_{ila} \Rightarrow \quad (23)$$

$$(Z_{ikla} = X_{oikla} = Y_{ikla} = 1$$

$I=1,2,\dots,n \quad k=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$

علاوه بر مشتری اول در بعضی از مسیرها برای مشتریان دیگر هم باید ظرفیت وجود داشته تا جواب ممکن حاصل گردد. در صورتیکه این موضوع مشخص شود کمک شایانی به روشن شدن وضعیت بعضی از متغیرهای  $Z_{ikla}$  خواهد نمود به تبع آن کاهش قابل ملاحظه‌ای در حجم محاسبات الگوریتم انشعاب و تحدید پیشنهادی رخ میدهد برای دسترسی به این موضوع ابتدا لازم است حداقل ظرفیت ارسال (i) از مشتری I به مشتری (i+1) را بدست آورد.

#### ۵. روش ریاضی حل هر یک از مسائل مسیریابی تک محصولی

نظر به اینکه هدف ارائه یک روش انشعاب و تحدید برای حل مدل ریاضی تک محصولی میباشد، می‌بایست بگونه‌ای عمل نمائیم که در هر مرحله تکرار، وضعیت یکی از متغیرهای صفر و یک از نظر صفر و یک بودن روشن شود. در این حالت اگر یک وضعیت میانی را در نظر بگیریم تعدادی از متغیرها مقدار یک داشته، تعدادی دیگر مقدار صفر بخود گرفته و مابقی آزاد هستند. بدین منظور برای متغیرهای صفر و یک مدل  $[Z_{ikla}, X_{ijkla}, Y_{ikla}]$  را بصورت متغیرهای پیوسته بین صفر و یک فرض می‌کنیم.

$$[0 \leq (Z_{ikla}, X_{ijkla}, Y_{ikla}) \leq 1] \quad (22)$$

در اثر این عمل فضای جواب مدل ریاضی تک محصولی توسعه می‌یابد و لذا جواب حاصل از این مسئله بعنوان یک حد پائین برای مسئله اصلی بکار میرود. در این صورت برای هر یک از متغیرهای صفر و یک مدل تک محصولی یک عمل آزادسازی صورت گرفته است. بعد از انجام عملیات آزاد سازی متغیرهای صفر و یک، مسئله مسیریابی تک محصولی به یک مدل شبکه با هزینه خطی تبدیل میشود. این مدل خطی با یکی از روشهای متداول حل مسائل



باید  $V^A_{ekla}(i+1)$  را محاسبه کنیم بنابراین:

$$V_{ekla}(i+1) = \min\{d_{i+1, la} \cdot V_e, V_{ekla}(i)\} \quad (30)$$

حداقل رابطه فوق برابر  $d_{i+1, la} \cdot V_e$  یا  $V^A_{ekla}(i)$  خواهد بود. همچنین همواره رابطه  $V^A_{ekla}(i+1) \leq V^A_{ekla}(i)$  برقرار است از طرف دیگر با علم به اینکه مجموع تقاضای مشتریان تا مشتری  $(i-1)$  مشخص می‌باشد و رابطه برقرار است. قضیه ثابت شده است. این قضیه برای تعیین وضعیت صفر و یک بودن متغیرهای  $Z_{ikla}$  استفاده شده است.

$$[F_{i+1, kla} \leq F_{i, kla} < d_{ila} \cdot V_e + V_{ekla}(i)] \quad (31)$$

### ۳-۵. الگوریتم انشعاب و تحدید

**قدم (۱):** وجود جواب اولیه (قابل قبول) را با توجه به روابط (۳۲) و (۳۳) بررسی کنید:

$$q_{kla} = \max(V_{1kla}, V_{2kla}, \dots, V_{ekla}) \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^n V^A_{ekla}(i) \leq q_{ekla} \times n \quad (33)$$

اگر رابطه (۳۳) ارضاء شود آنگاه مسئله دارای جواب قابل است و اگر رابطه (۳۳) ارضاء نشود مسئله جواب قابل قبول ندارد و متوقف می‌شود. با الگوی بخش (۵-۱) وضعیت متغیرهای صفر و یک را تعیین کنید.

**قدم (۲):** مدل توسعه یافته مسئله مسیریابی تک محصولی را به روش (Out of Kilter) حل کنید. در اینصورت میزان ظرفیت مورد نیاز هر یک از وسایل نقلیه در هر مسیر و در سطح  $L$  و ناحیه  $a$  محاسبه می‌شود.

**قدم (۳):** وضعیت متغیرهای صفر و یک را تعیین کنید.

**قدم (۴):** در صورتی که بین متغیرهای  $X_{ijkla}$  هیچ متغیر آزادی وجود نداشته باشد متوقف می‌شوید. در غیر اینصورت از بین متغیرهای آزاد آن متغیری که بیشترین بهبود هزینه در تابع هدف را دارد، انتخاب و عملیات انشعاب را انجام می‌دهیم.

$$\Delta_{i, kla} = \max\{C_{ijkla} \cdot X_{ijkla} / i \neq j\} \quad (34)$$

$i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,m$

**قدم (۵):** اگر در یک مسیر از مشتری  $(i)$  تا مشتری  $(n)$  وضعیت همه متغیرهای صفر و یک تعیین شده و شرط زیر برقرار باشد و یا بهبودی در جواب حاصل نشود توقف کنید. در غیر اینصورت به قدم سوم برگردید.

$$\sum_{J=1}^m Z_{ijkla} \cdot d_{ila} \cdot V_e \leq V_{ekla} \quad (35)$$

$K=1,2,\dots,k \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$

$$q_{ekla} = \min[V_{e1la}, V_{e2la}, \dots, V_{ekla}] \quad (24)$$

$$V^L_{ekla}(i) = \begin{cases} \min\{d_{i+1, la} \cdot v_e + V_{ekla}(i+1), q'_k\} & \text{if } i < n \\ 0 & \text{if } i = n \end{cases}$$

برای آنکه تشخیص دهیم که برای مشتری  $i+1$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$  باید وسیله جدید در نظر گرفته شود یا خیر ابتدا باید  $(i)$   $V^A_{ekla}$  برای همه مشتریان محاسبه شود. (یعنی آیا کامیون در گره  $I$  به دپو بر می‌گردد یا اینکه به مسیر ادامه می‌دهد و به گره  $i+1$  می‌رود و گرنه در اول دپو قرار داریم و ماشین جدید تخصیص می‌یابد.)

$$V^A_{ekla}(i) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{i-r} d_{la} \cdot v_e + d_{ila} \cdot V_e \leq q_{ekla} & \text{if } i \leq n \\ d_{ila} \cdot v_e & \text{if } i = n \\ \sum_{i=1}^{i-r} d_{la} \cdot v_e + d_{ila} \cdot V_e > q_{ekla} & \end{cases} \quad (25)$$

سپس حداکثر حجم جریانی که می‌تواند از مشتری  $I$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$  توسط وسیله  $K$  عبور کند را محاسبه کنیم.

$$V^u_{ekla}(i) = \begin{cases} q_{ekla} - \sum_{i=1}^{il} d_{ila} \cdot v_e \geq d_{i+1, la} \cdot V_e \Rightarrow Z_{ikla} = X_{ijkla} = Y_{ijkla} = 1 \\ q_{ekla} - \sum_{i=1}^{il} d_{ila} \cdot v_e < d_{i+1, la} \cdot V_e \Rightarrow Z_{ikla} = X_{ijkla} = Y_{ijkla} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

### ۲-۵. ارتباط متغیرهای صفر و یک در هر مسیر

برای تعیین ارتباط متغیرهای صفر و یک در هر مسیر برای سطح  $L$  و ناحیه  $A$  و مسیر  $k$  از قضیه زیر استفاده شده است. قضیه: در صورتی که با شرط  $Z_{ikla} = 1$  در سطح  $L$  و ناحیه  $a$  با وسیله  $k$  جواب قابل قبول حاصل شود. برای مشتریان بعدی وسیله نقلیه جدید تخصیص شود.

$$\text{IF } Z_{ikla} = 1 \Rightarrow (Z_{i+1, kla} = Z_{i+2, kla} = \dots = Z_{nkla} = 1) \quad (27)$$

OR IF

$$d_{ila} > 0 \Rightarrow (d_{i+1, la} = d_{i+2, la} = \dots = d_{nla}) > 0$$

**اثبات:** فرض کنید شرط  $Z_{ikla} = 1$  در شروع مسئله برقرار باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$F_{ikla} < d_{ila} \cdot V_e + V_{ekla}(i) \quad (28)$$

برای روشن شدن وضعیت متغیرهای

$$(Z_{i+1, kla} \text{ و } Z_{i+2, kla} \text{ و } \dots \text{ و } Z_{nkla}) \quad (29)$$

**قدم ۴-** عملیات تسطیح منابع را بکمک رابطه (۳۸) برای کل ظرفیت باقیمانده (RCT) در وسیله  $k$ ، سطح  $L$  و ناحیه  $a$  انجام دهید.

**قدم ۵-** به قدم دوم برگردید و تا زمان رسیدن به شرط توقف مسئله را ادامه دهید. شرایط توقف در مراحل مختلف الگوریتم انشعاب تحدید در قسمت (۳-۵) بیان شده است.

### ۶. اعتبار الگوریتم پیشنهادی

جهت بررسی میزان کارایی الگوریتم پیشنهادی ارائه شده تعداد ۳۰۰ عدد مسئله تصادفی با مشخصات زیر ایجاد شده اند.

۱- ابعاد مسایل ایجاد شده در محدود (N.E.L.D.K) = (۸×۵×۲×۵×۱) الی (N.E.L.D.K) = (۰۰×۱۵×۵×۲×۰×۳)

است. لیست مسائل در جدول (۲) آمده است

۲- زمان باراندازی و بارگیری برای هر یک از انبارهای میانی در هر سطح و ناحیه بصورت تصادفی و جداگانه از توزیع یکنواخت (۸۰-۳۰) دقیقه انتخاب شده اند.

۳- زمان طی مسیر هر بین هر دو انبار یا مشتری در همه سطوح و نواحی بصورت جداگانه از توزیع یکنواخت (۱۰۰-۱۰۰۰) دقیقه انتخاب شده اند.

۴- حجم هر یک از محصولات بصورت تصادفی و جداگانه از توزیع یکنواخت (۱۰۰×۱۰۰×۱۰-۱۰۰×۱۰۰×۱۰) سانتیمتر مکعب انتخاب شده اند.

۵- حجم هر یک از وسایل نقلیه بصورت تصادفی و جداگانه از توزیع یکنواخت (۲۰۰×۲۰۰×۲۰۰-۵۰۰×۲۰۰×۱۰۰) سانتیمتر مکعب انتخاب شده اند.

۶- تقاضای انبارهای میانی برای هر یک از محصولات بصورت تصادفی از توزیع یکنواخت (۲۰۰-۱۰۰۰) انتخاب شده اند.

۷- تقاضای مشتریان برای هر یک از محصولات بصورت تصادفی از توزیع یکنواخت (۱۰-۵۰) انتخاب شده اند.

۸- زمان باراندازی برای هر یک از مشتریان در هر سطح و ناحیه بصورت تصادفی و جداگانه از توزیع یکنواخت (۳۰-۲۰) دقیقه انتخاب شده اند.

برای حل مسائل فوق یک برنامه در محیط Matlab نوشته شده است این برنامه برای حل مسائل با الگوریتم پیشنهادی نوشته شده است. نتایج مقایسه‌ای از دو جنبه زمان حل و هزینه حمل و نقل در جدول (۲) آمده است.

پس از حل هر یک از مسائل مسیریابی چند ایستگاهی چند سطحی و یک محصولی توسط الگوریتم ارائه شده، نوبت به مقایسه میزان ظرفیت تخصیص داده شده و ظرفیت استفاده شده می‌رسد. این عملیات که باعث تسطیح ظرفیت‌های باقیمانده خواهد شد. بکمک روابط و توضیحات قسمت (۴-۵) انجام می‌شود.

### ۴-۵. تسطیح منابع و ظرفیت باقیمانده

در این مرحله برای انجام عملیات تسطیح منابع، میزان ظرفیت باقیمانده (مازاد) برای هر یک از مسائل تک محصولی بکمک رابطه زیر محاسبه شده است.

$$RC_{ekla} = (V_{ekla} - \sum_{i=1}^n d_{ila} \cdot V_e) \quad (36)$$

$$e=1,2,\dots,E \quad K=1,2,\dots,K \quad L=1,2,\dots,L \quad a=1,2,\dots,A$$

کل ظرفیت باقیمانده توسط رابطه

$$\{ RCT_{kla} = \sum_{e=1}^E RC_{ekLa} \} \quad (37)$$

محاسبه می‌شود این ظرفیت باقیمانده را به نسبت ظرفیت منابع استفاده شده در هر یک از مسائل تک محصولی توزیع می‌کنیم. روش اجرای کار به اینصورت است که به مسائل تک محصولی که دارای ظرفیت باقیمانده زیادتری هستند مقدار ظرفیت کمتری تخصیص می‌یابد و به مسائل تک محصولی که ظرفیت باقیمانده کمتری دارند مقدار ظرفیت بیشتری تخصیص می‌یابد. عملیات تسطیح منابع طبق رابطه زیر انجام می‌شود. با اجرای عملیات تسطیح منابع در هر مرحله جوابهای موجه بهتری حاصل خواهد شد.

$$LRC_{ekla} = RCT_{kla} \cdot \left( \frac{V_{ekla} - \sum_{i=1}^n d_{ila} \cdot V_e}{V_{ekla}} \right) - 1 \quad (38)$$

### ۵-۵. الگوریتم حل مسئله چند محصولی

**قدم ۱-** مسئله اصلی را با استفاده از ضرایب لاگرانژ در منابع کمیاب به (E) مسئله یک محصولی مستقل تبدیل کنید.

**قدم ۲-** هر یک از مسائل تک محصولی را با روش ابتکاری ارائه شده در قسمت (۳-۵) و (۱-۵) حل کنید.

**قدم ۳-** ظرفیت باقیمانده هر یک از مسائل تک محصولی رانسبت به ظرفیت تخصیص یافته بکمک روابط (۳۷ و ۳۶) محاسبه کنید.

جدول ۲. مقایسه زمان حل هزینه حمل و نقل الگوریتم پیشنهادی و BLP

Pr0blem size	زمان حل (دقیقه)		هزینه حمل و نقل	
	BLP	HDC	BLP	HDC
۸×۵×۲×۵×۱	۰.۵۷	۰.۳۲	۲۸۵.۱۷	۲۸۹.۱۱
۱۰×۵×۲×۵×۱	۰.۸۲	۰.۵۶	۲۹۷.۱۵	۳۰۱.۸۱
۱۲×۵×۲×۵×۱	۰.۹۷	۰.۶۴	۳۱۵.۱۱	۳۲۰.۸۵
۱۵×۵×۲×۵×۱	۱.۲۵	۰.۸۵	۳۴۲.۱۷	۳۵۱.۱۶

ادامه جدول ۲. مقایسه زمان حل هزینه حمل و نقل الگوریتم پیشنهادی و BLP

Pr0blem size N.E.L.D.K	زمان حل (دقیقه)		هزینه حمل و نقل	
	BLP	HDC	BLP	HDC
۲۰×۵×۲×۵×۱	۳.۸۴	۱.۲۸	۳۸۱.۴۱	۳۹۷.۲۴
۲۵×۵×۲×۵×۱	۷.۵۱	۳.۱۲	۳۹۴.۸۵	۴۱۰.۱۱
۳۰×۸×۲×۸×۱	۹.۷۱	۴.۱۵	۴۱۵.۱۱	۴۲۱.۶۸
۳۵×۸×۲×۸×۱	۱۴.۴۵	۵.۱۷	۴۲۵.۱۹	۴۳۸.۷۹
۴۰×۸×۲×۸×۱	۲۵.۸۱	۷.۲۴	۴۷۱.۴۸	۵۱۵.۱۱
۴۵×۸×۳×۸×۲	۳۶.۲۵	۱۵.۱۷	۴۹۵.۱۸	۵۱۷.۱۴
۵۰×۸×۳×۸×۲	۴۷.۹۲	۱۸.۱۱	۵۱۲.۱۱	۵۲۰.۱۲
۵۵×۸×۳×۸×۲	۸۲.۴۵	۱۹.۲۷	۵۴۰.۲۵	۵۵۱.۳۸
۶۰×۱۰×۳×۱۰×۲	۹۵.۲۷	۲۵.۱۲	۵۵۰.۱۲	۵۶۱.۱۹
۶۵×۱۰×۳×۱۰×۲	۱۱۷.۴۲	۲۷.۴۹	۵۶۱.۱۷	۵۷۲.۵۷
۷۰×۱۰×۳×۱۰×۲	۱۲۵.۱۸	۳۲.۱۹	۵۷۵.۴۷	۵۸۱.۹۸
۷۵×۱۰×۳×۱۰×۲	۲۱۷.۱۱	۳۵.۱۸	۵۹۰.۱۸	۶۰۱.۲۵
۸۰×۱۰×۳×۱۰×۲	۳۱۵.۲۲	۳۸.۱۲	۵۹۹.۸۹	۶۰۷.۷۹
۸۵×۱۰×۳×۱۰×۲	۴۱۲.۱۱	۴۵.۱۹	۶۱۵.۱۱	۶۲۸.۴۱
۹۰×۱۲×۴×۱۲×۲	۵۱۶.۷۵	۵۱.۱۷	۶۲۲.۴۵	۶۳۷.۱۱
۹۵×۱۲×۴×۱۲×۲	۵۲۵.۱۱	۵۸.۱۵	۶۴۱.۴۲	۶۵۴.۱۵
۱۰۰×۱۲×۴×۱۲×۲	۵۸۰.۱۵	۶۵.۱۲	۶۵۷.۷۹	۶۶۱.۱۲
۱۱۰×۱۲×۴×۱۲×۳	۵۹۵.۴۲	۷۴.۱۷	۷۱۵.۴۱	۷۲۴.۱۵
۱۱۵×۱۲×۴×۱۲×۳	-	۸۱.۱۵	-	۷۴۵.۱۷
۱۲۰×۱۲×۴×۱۲×۳	-	۹۵.۱۱	-	۷۵۱.۱۹
۱۲۵×۱۵×۴×۱۵×۳	-	۱۱۵.۱۷	-	۷۶۸.۷۹
۱۳۰×۱۵×۴×۱۵×۳	-	۱۱۸.۴۸	-	۷۷۱.۲۷
۱۳۵×۱۵×۴×۱۵×۳	-	۱۲۰.۱۱	-	۷۸۵.۵۷
۱۴۰×۱۵×۵×۱۵×۳	-	۱۲۵.۷۵	-	۷۹۶.۱۱
۱۴۵×۱۵×۵×۱۵×۳	-	۱۳۱.۱۴	-	۸۲۱.۳۲
۱۵۰×۱۵×۵×۱۵×۳	-	۱۴۵.۲۵	-	۸۳۵.۴۷

از مسائل و در کل محاسبه شده و سپس عملیات تسطیح منابع انجام شده است. این مراحل تا رسیدن به شرط توقف تکرار شده است. در حل هر یک از مسائل تک محصولی سه مرحله خوشه بندی انبارهای میانی و مشتریان، مسیریابی و بهبود مسیره‌های تولید شده وجود دارد. نتایج محاسباتی بیانگر آن است که استفاده از ضرایب لاگرانژ منابع کمیاب برای تجزیه مسائل مسیریابی چند محصولی به چند مسئله مسیریابی تک محصولی یک روش کارا می‌باشد. جوابهای این الگوریتم نسبت به جواب بهینه حداکثر 5 درصد اختلاف داشته و مدت زمان حل را نسبت به روش BLP تا ۵ برابر کاهش داده است. همچنین تلفیق مسئله مسیریابی چند ایستگاهی با مفاهیم تقاضای فازی، احتمالی و پویا میتواند بعنوان تحقیقات آتی مورد بررسی و ارزیابی قرار گیرد.

### منابع

- [1] Brian R., "Formulation and Exact Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows",

نتایج مقایسه‌ای در جدول (۲) نشان می‌دهد که روش HDC علاوه بر ارائه جوابهای نزدیک بهینه، مسائل را در زمان کمتری نیز حل نموده است. مقدار جواب حاصل توسط الگوریتم HDC نسبت به الگوریتم BLP حداکثر ۵ درصد اختلاف داشته و زمان حل را به طور متوسط ۷۳ درصد کاهش داده است.

### ۷. نتیجه گیری و تحقیقات آتی

در این تحقیق مسئله مسیریابی چند ایستگاهی - چند محصولی و چند سطحی با هدف حداقل نمودن هزینه‌های توزیع مورد بررسی قرار گرفت. برای بررسی این مسئله یک مدل برنامه ریزی خطی صفر و یک مشتمل بر ۱۵ سری محدودیت و ۵ سری متغیر پیوسته و صفر و یک ارائه شده است. با استفاده از ضرایب لاگرانژ منابع کمیاب برای محدودیت ظرفیت وسایل نقلیه مسئله چند محصولی و چند مسئله یک محصولی تبدیل شد. پس از حل هر یک از مسائل یک محصولی با الگوریتم پیشنهادی، ظرفیت‌های باقیمانده برای هر یک

- [14] Mercer, A., "Strategic Planning of Physical Distribution Systems", International Journal physical Distribution, Vol.1, 1978, pp: 20-25.
- [15] Wren, A., Holliday, A., "Computer Scheduling of Vehicles From One or More Depots a Number of Delivery Points, operational Research Quantity, Vol .23, No . 3, 1989, pp:333-344.
- [16] Benoit, C., Francors, J., Gordeou, A., Gilbert, L., "the Multi-Depot Vehicle Routing Problem, with Inte – Depot Routes, European Journd of operational Research , No. 176 , 2005, pp. 756-773.
- [17] Rodolfo, D., Jaim, .C., "A Cluster – Vased Optimization Approach for the Multi – Depot Heterogeneous Fleet Vehicle Wiating Problem with Time Windows", Eurpean journal of operational Research, NO, 176, 2007, pp: 1478-1507.
- [18] Salhi, S., Sari.M., "A Multi-Level Composite Search Heuristic for the Multi – Depot Vehicle Fleet Mix Problem" . European journal of operational Resarch ,No. 103, 1997, pp: 95-112.
- [19] Fallahi, A., Christian, P., Robert, C., "A Memertic Algorithm and a Taba Search for the Multi-Compartment Vehicle Routing Problem", computer and operations Research, vol. 35, NO. 4, 2008, pp: 1725-1741.
- [20] Alvina G.H., Ret, R.L.C., & Qiang, M., "Distance – Constrained Capacitated Vehicle Routing Problems with Flexible Assignment of Start and End Depots", Mathematical and computer Modeling, Vol. 47, 2008, pp: 140-152.
- [21] Giosa, I.D, Tansini, I.L., Viera, I.C., "New Ssignment Slgorithm for Multi- Depot Vehicle Routing Problem", journal of operational Research society, NO.53, 2002, pp:977-984.
- [22] Christofides N, Mngozi .A., Toth.P., "Exaet Algorithm for the Vehicle Routing Problem, Based on Spanning Tree and Shortest Path Relaxation", mathematical programming, NO.20, 1981, pp: 255-282.
- [23] Clarre, G., wright, J.w., "Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points". Operations Research ,No. 12, 1964, pp: 568-581 .
- [24] Hadjiconstan –tionou, E., Baldacci, R., "A Multi – Depot Period Vehicle Routing Problem Arising in the Utilities Sector", Journal of the operational Resarch society No. 49, 1998, pp: 1239-1248.
- [25] Gillet, B. E.P., Miller, L.R., "A Heuristic Algorithms for Vehicle Dispatchinh Problem". Journal of operation Research, No. 22, 1974, pp:340-349.
- computer and operational Research, Vol .35, NO.7,2008, pp: 2307-2330.
- [2] Gabor, N., Salhi, S., "Location – Routing: Issues, Models, and Methods", European Journal of operational Research, Vol. 177, No. 2, 2007, pp:649-672.
- [3] Franrlin, L., Shen, S., "An over view of a heuristic for Vehicle Routing Problem with Time Windows", computer and operations Research, Vol .37, NO.2, 1998, pp: 331-334.
- [4] Feiyue, L., Bruce, G., Edward,W., "The Open Vehicle Routing Problem: Algorithms, Large-Scale Test Problems. And Computational Resalts", computer and operations Research, Vol .34, NO.10, 2007, pp: 2918-2930.
- [5] Laporte, G., "The Vehicle Routing Problem: An Overview of Exact and Approximated", algorithms, European journal of operatronal Resarch, Vol.59, NO. 3 , 1992, PP: 345-385.
- [6] Milligan, B., "Transportation Holds up its and of Jit bargain" purchasing Boston. Vol. 129, NO.4, 2000, PP: 75-82.
- [7] Nathalie, P., Ander, L ., James, F., "A Survey of Models and Algorithms for Winter Road Maintenance, Part III : Vehicle Routing and Depot Location for Spreading" , computer and operation Research , Vol .34,NO.1, 2007, pp: 211-257.
- [8] Paolo, T., Daniele, V., "Models, Relaxations and exact Approches for the Capacitated Vehicle Routing Problem", Discrete Applied mathematics, Vol.123, No.3, 2002, pp: 487-512.
- [9] Tolgo, B., "The Multiple –Traveling salesman Problem: an Over View of Formulation and Solutions Procedures", OMEGA, Vol .34 , NO.3, 2006, PP:209-219.
- [10] Laporte, G ., Nobert, .y., Taillefer,s., "Taillefer, Solving a Family of Multiple-Depot Vehicle Routing and Location- Routing Problems", Transportation science, NO.22 , 1988, pp: 161-172.
- [11] Sumichrast, R.T., Marrham, I.S., "A Heuristic and Lower Bound for a Multi – Depot Routing Problem ". computers ans Operations Research,No. 22, 1995, pp: 1047-1056.
- [12] Waston, C.D., T, Dohrn, D.J., "Depot Location with Van Salesman -A Practical Approach , OMEGA," Vol.1, 1973, PP: 321-329.
- [13] Nambiar, J.M., Gelders, L.F., Van, W.L.N., "A Large Scale Location- Allocation, Problem in the Notional Rubber Induetry", European Journal of operational Research, Vol .4, 1981,pp: 183-189.

- [26] Tillman, FA., Cain, T.M., "An Upperbound Algorithms for the Single and Multiple –Terminal Delivery Problem", Management science, NO.18, 1972, pp: 662-682.
- [27] Min, S.H., Lee., J, Han .I., "Hybrid Genetic Algorithms and Support Vector Machines for bankruptcy Prediction". Expert system with Applications, No. 31, 2006, pp: 652-660.
- [28] Mesa, J.A., Boffey, T.B., "A Review of Extensive Facility Location in Networks", European Journal of operational Research, Vol.95, 1996, pp. 592-603.
- [29] Gendreau, M., Laporte, G., poptin, J.Y., "Vehicle Routing Modern Heuristic", in: Local search in combinatorial Optimization. John wiley and sons, 1997, pp: 311-336.
- [30] Renaud, J., Laporte, G., Doctor, F.F., "A Tabu Search Heuristic for the Multiple –Depot Vehicle Routing Problem". Computers and operations research, No. 23, 1996, pp: 229-235.
- [31] Wiliam, H., George, T.S., ping, J., Henry, C., "A Hybrid Genetic Algorithm for the Multi–Depot Vehicle Routing Problem" Engineering Application of Artificial intelligence , 2007, pp.Article in press .
- [32] Sur, B., Heany, H., Gyu, C., Meny, G., "Integrated GA-VRP Solver for Multi – Depot System", Computer and Industrial engineering, NO. 53, 2007, pp: 233-240.
- [33] Coor, S.A., "An Approximation Algorithm for the Traveling Selesman Problem with Bacrhaults" , operation Research, NO. 45, 1971, pp : 639-431.
- [34] Wiliam, Ho, George. T.S, Ho, ping, j.I., Henry, C.W., Lau, "A Hybrid Genetic Algorithm for the Multi – Depot Vehicle Routing Problem" Engineering Application of Artificial intelligence ,Vol. 21, No.4, 2008, pp: 548-557.
- [35] Rodolfo, G., Dondo, Jaime Cerda, "Ahybrid Local Improvement Algorithm for Large- Scale Multi – Depot Vehicle Routing Problems with Time Windows", Computers and chernreced engineering, Vol, 33, NO, 2, 2009, pp: 513-530.
- [36] Ran, Liu, Zhibin jiang, Richard Y.K., Fang, Peny chen, Xido Liu "Two- Phase Heuristic Algorithms for Fall Trackliuds Multi – Depot Copacitated Vehicle Routing Problem in Ccarrier Collaboation, Computers and operation Resarch, Vol. 37, No. 5, 2010, pp: 950-959.
- [۳۷] توسعه مدل بهینه هزینه کل توزیع لجستیک در شرایط یک تولیدکننده و چند انبار توزیع در مدیریت زنجیره تأمین (SCM) ، جلد ۱۹، شماره ۱، نشریه بین المللی علوم مهندسی ۱۳۸۷.