



## Portfolio Optimization for Retail Investors, with the Approach of Multivariate GARCH Models

Seyed Babak Ebrahimi \* & Seyed Morteza Emadi

*Seyed Babak Ebrahimi, Department of Industrial Engineering, K.N.Toosi University of Technology*

*Seyed Morteza Emadi, Industrial Engineering, K.N.Toosi University of Technology*

### Keywords

Markowitz model,  
Retail investors,  
Multivariate GARCH  
models,  
Investment portfolio.

### ABSTRACT

*In recent years, willingness to invest and trade of securities has been grown by retail investors. This group of investors, mainly trade in average or low volume levels, therefore they should consider some restrictions which have not been added to most classic financial portfolio optimization models such as Markowitz. Some of these limitations are transaction costs and the number of assets in the portfolio. In this paper, the constraints of model have been modified to maximizing the portfolio return and achieve better risk estimation and also five activated industrial indexes has been chosen since 2009 up to 2012 and optimal investment portfolio was formed with the noticed model. We hired, multivariate GARCH family models (MGARCH) as Vech, BEKK, CCC and DCC to reach conditional covariance's matrix and then we calculate, the optimal portfolio weights for each group of industries.*

© 2017 IUST Publication, IJIEPM Vol. 28, No. 1, All Rights Reserved



## بهینه‌سازی سبد سهام برای سرمایه‌گذاران خرد؛ با رویکرد مدل‌های گارچ چندمتغیره

سید بابک ابراهیمی\* و سید مرتضی عمادی

### کلمات کلیدی

#### چکیده:

در سال‌های اخیر، تمایل به سرمایه‌گذاری و خرید و فروش اوراق بهادار توسط سرمایه‌گذاران خرد افزایش یافته است. این گروه از سرمایه‌گذاران عمدتاً در سطح متوسط خرید و فروش می‌نمایند و می‌بایست محدودیت‌هایی را مدنظر قرار دهند که در اغلب مدل‌های کلاسیک مالی نظیر مدل مارکوویتز مورد توجه قرار نگرفته است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به هزینه معاملات و تعداد دارایی‌های موجود در سبد اشاره کرد. در این مقاله محدودیت‌های سرمایه‌گذاران خرد برای حداکثر نمودن بازده و تخمین ریسک در مدل مارکوویتز لحاظ شده و همچنین شاخص ۵ گروه از صنایع فعال در بازار بورس تهران در بازه زمانی سال ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۱ انتخاب و یک سبد سرمایه‌گذاری بهینه با مدل مذکور تشکیل گردید. برای این کار مدل‌های خانواده گارچ چند متغیره (MGARCH) نظیر BEKK, Vech, CCC و DCC برای به دست آوردن واریانس شرطی مورد استفاده قرار می‌گیرند و با استفاده از ماتریس واریانس-کوواریانس‌های مشروط به دست آمده، اوزان بهینه برای هر صنعت محاسبه می‌شود

مدل مارکوویتز،  
سرمایه‌گذاران خرد،  
مدل‌های گارچ چندمتغیره،  
سبد سرمایه‌گذاری.

#### ۱. مقدمه

مارکوویتز در سال ۱۹۵۲ با انتشار مقاله‌ای با عنوان «انتخاب پورتفوی<sup>۱</sup>» تئوری نوین سرمایه‌گذاری<sup>۱</sup> را ارائه نمود. در این تئوری برای اولین بار ریسک به صورت کمی در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری مدنظر قرار گرفت. مارکوویتز انحراف معیار و میانگین را به عنوان معیاری از ریسک و بازده در نظر گرفت و پیشنهاد نمود که سرمایه‌گذاران برای انتخاب از بین اوراق بهادار مختلف برای سبد سرمایه‌گذاری، ریسک و بازده را با هم مورد توجه قرار دهند. در این مدل وزن بهینه برای هر دارایی از طریق ارتباط بین ریسک و بازده به دست می‌آید، به این ترتیب که با حداکثر کردن بازده انتظاری در سطح معینی از ریسک یا حداقل کردن ریسک در سطح معینی از بازده انتظاری سعی در بهینه کردن سبد سرمایه‌گذاری داریم.

تاریخ وصول: ۹۴/۸/۱۶

تاریخ تصویب: ۹۴/۱۲/۱۸

سید مرتضی عمادی: دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی  
[memadi@kntu.ac.ir](mailto:memadi@kntu.ac.ir)

\*نویسنده مسئول مقاله: سید بابک ابراهیمی دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی  
[B\\_Ebrahimi@kntu.ac.ir](mailto:B_Ebrahimi@kntu.ac.ir)

بر مبنای مدل‌های کلاسیک سرمایه‌گذاری، هنگامی که سرمایه‌گذاران خرد قصد تشکیل سبد سرمایه‌گذاری برای خود را دارند، با محدودیت‌های خاصی مواجه می‌شوند. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به هزینه‌های معاملاتی<sup>۱</sup>، حداکثر تعداد دارایی‌های سبد و حداکثر وزن هر سهم اشاره نمود. در این پژوهش، ما این محدودیت‌های مؤثر را در مدل مارکوویتز جهت بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری بکار می‌گیریم. از طرفی مطالعات تجربی بر این موضوع دلالت دارد که سری‌های زمانی دارای ویژگی‌هایی از جمله دم‌پهن<sup>۱</sup> بودن و تلاطم خوشه‌ای<sup>۲</sup> هستند. داشتن تلاطم خوشه‌ای به این معنی است که نمی‌توان نوسانات بین سری زمانی را ثابت در نظر گرفت، بنابراین مجموعه‌ای از تلاطم‌های پویا مورد نیاز است تا بتوان رابطه بین ریسک و بازده به درستی تبیین نمود. یکی از مدل‌های پرکاربرد در مدل‌سازی تلاطم مشروط و لحاظ نمودن ویژگی‌های فوق، مدل‌های چند متغیره خانواده GARCH<sup>۳</sup> می‌باشند.

از مزیت‌های مدل‌های MGARCH<sup>۳</sup> این است که ماتریس واریانس-کوواریانس را در هر لحظه از زمان در اختیار ما قرار می‌دهد و با استفاده از این ماتریس می‌توان مسئله بهینه‌سازی

سبد سهام را با کارایی بالاتری انجام داد و وزن بهینه برای دارایی‌ها را متغیر با زمان<sup>viii</sup> به دست آورد.

## ۲. ادبیات نظری و پیشینه پژوهش

از جمله نارسایی‌های مدل مارکوویتز عدم تمایز میان وضعیت‌های مختلف بازار و تخصیص اوزان یکسان به وقایع اخیر و سابق بازار است. در این راستا به‌منظور تطبیق با ساختار پویای واریانس در بازار، مدل‌های تعمیم‌یافته بر اساس مدل‌های ناهمسانی واریانس تعدیل‌یافته را می‌توان برای برآورد ماتریس واریانس-کواریانس بکار گرفت که در ادامه مطالعات اخیر صورت گرفته در این زمینه به‌اختصار آورده شده است.

تولکان و ایلماز (۲۰۱۰)<sup>ix</sup> کارایی مدل بهینه‌سازی (GMV)<sup>x</sup> از طریق مدل DCC و DECO را با بهینه‌سازی این مدل با لحاظ همبستگی ثابت<sup>xi</sup> و تخمین کواریانس نمونه‌ای<sup>xii</sup> مقایسه نمودند و معیار کارایی را نیز کم بودن تلاطم محاسبه‌شده در روش‌های موردبررسی قرار داده‌اند که نتایج نشان می‌دهد که تلاطم محاسبه‌شده در مدل DCC از سایر مدل‌ها کمتر است [۱]. لینگ دنگ و همکاران (۲۰۱۱)<sup>xiii</sup> از روش Mean-CVaR برای تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بهینه استفاده کردند. آن‌ها از تئوری ارزش فرین<sup>xiv</sup> برای به دست آوردن توزیع حاشیه‌ای هر سری بازده استفاده کرده و با استفاده از توابع کاپولا<sup>xv</sup>، توزیع توأم دارایی‌های سبد را به دست می‌آورند. مقایسه این مدل با مدل Mean-Variance نشان‌دهنده کارایی بیشتر مدل Mean-CVaR می‌باشد [۲]. فیسزدر (۲۰۱۱)<sup>xvi</sup> به مقایسه کارایی روش‌های مختلف بهینه‌سازی سبد سهام در بازار بورس لهستان زمانی که ابعاد مدل بالاست می‌پردازد. وی از هشت مدل مختلف خانواده GARCH و شش مدل دیگر برای مقایسه استفاده می‌کند. نتایج نشان‌دهنده این موضوع است که مدل‌های خانواده GARCH کارایی بیشتری نسبت به سایر مدل‌ها دارند و همچنین در بین این مدل‌ها، آن‌هایی که پارامترها را در دو مرحله تخمین می‌زنند از دقت بیشتری برخوردار هستند [۳]. کروساکی و شین کیم (۲۰۱۳)<sup>xvii</sup> از مدل Mean-CVaR برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری و کاهش ریسک آن استفاده کردند و برای بررسی کارایی مدل، نتایج به‌دست‌آمده را با نتایج مدل‌های Mean-Variance مقایسه کردند که مقایسات انجام‌گرفته نشان‌دهنده کمتر بودن ضرر تجمعی مدل Mean-CVaR نسبت به مدل دیگر می‌باشد [۴]. آلن و همکاران (۲۰۱۳)<sup>xviii</sup> با استفاده از دو مدل VARMA-GARCH و VARMA-AGARCH به بررسی سرایت تلاطم بین بازار سهام چین و بازار سهام کشورهای استرالیا، ژاپن، سنگاپور هنگ‌کنگ و آمریکا پرداختند که نتایج نشان‌دهنده وجود سرایت

تلاطم از بازار سهام بازار چین به بازار سایر کشورها در دوران قبل از بحران مالی جهانی بوده است. این سرایت در دوران بحران مالی به حداقل مقدار خود می‌رسد و در این دوران همبستگی بین بازار چین و بازار آمریکا منفی می‌باشد [۵]. میرلس و همکاران (۲۰۱۳)<sup>xi</sup> به بررسی همبستگی بین سهام شرکت‌های با اندازه‌ی مختلف (بزرگ-کوچک-متوسط) با استفاده از مدل‌های GARCH در بازار سهام اسپانیا پرداختند و دریافتند که هر گروه به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم به گروه‌های دیگر وابسته بوده و سبد سرمایه‌گذاری متشکل از سهام شرکت‌های کوچک و متوسط که بیشتر سهم سبد را سهام شرکت‌های متوسط دارند دارای کمترین ریسک است [۶]. چانیم و همکاران (۲۰۱۴)<sup>xx</sup> سبد سهام بهینه با ابعاد زیاد را با استفاده از داده‌های بازار سهام کشور تایلند موردبررسی قرار دادند. آن‌ها فرض نرمال بودن برای سری‌های بازده رو مناسب ندانستند به همین دلیل از توزیع t-student برای سری‌های بازده استفاده نمودند و ریسک و بازده هر سری زمانی را با استفاده از مدل ARMA(1,1)-GARCH(1,1) مدل‌سازی نمودند. همچنین در این پژوهش توابع کاپولا برای به دست آوردن توزیع توأم سری‌های زمانی مورد استفاده قرار گرفته است [۷]. تالاسینوس و همکاران (۲۰۱۵)<sup>xxi</sup> به بررسی همبستگی بین اوراق قرضه دولتی و بازار سهام در سه کشور آلمان، فرانسه و یونان با استفاده از مدل‌های خانواده GARCH پرداختند و سعی در تشکیل یک سبد سرمایه‌گذاری بهینه بین اوراق قرضه دولتی و سهام نمودند. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که اوزان این دارایی‌ها تقریباً برابر بوده و همچنین علیرغم وجود همبستگی غیرشرطی کم و منفی، همبستگی شرطی به‌صورت متفاوت بوده و به‌شدت معنادار است [۸]. بن مسعود و همکاران (۲۰۱۵)<sup>xxii</sup> با استفاده از سنج‌های CVaR و VaR به تشکیل یک سبد سرمایه‌گذاری بهینه از شاخص بازار سهام کشورهای مصر، مالزی، آفریقای شمالی و ترکیه پرداختند. در این تحقیق با استفاده از مدل GJR-GARCH اثرات نامتقارن شوک‌ها در نظر گرفته شد و با استفاده از تئوری ارزش فرین توزیع دم‌پهن سری‌های بازده حاصل گردید. سپس با استفاده از توابع کاپولا توزیع توأم را برای سری‌های بازده محاسبه و اوزان بهینه را برای هر یک از سری‌ها به دست می‌آورند [۹]. مندس و همکاران (۲۰۱۵)<sup>xxiii</sup> از روش طراحی آزمایشات مختلط<sup>xxiv</sup> (MDE) برای حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه‌ی غیرخطی استفاده کرده‌اند. آن‌ها از یک مسئله‌ی سه هدفه با اهداف حداکثر کردن بازده، حداقل ریسک و حداکثر کردن آنتروپی برای تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بهینه استفاده نمودند. ریسک و بازده هر سری زمانی با استفاده از مدل ARMA-GARCH محاسبه شد. نتایج نشان‌دهنده کارایی مدل MDE بوده و نشان داد که استفاده از این مدل باعث کاهش اشتباهات در

روش، عملکرد آن در بورس اوراق بهادار تهران با عملکرد چند روش فرا ابتکاری دیگر مقایسه شده است که نتایج مقایسه حاکی از برتری روش پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر است [۱۶]. رادمهر و شمس قارنه (۱۳۹۲)، با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی تبرید و داده‌های فازی سعی در ارائه روشی برای بهینه‌سازی سبد سهام داشته و مدل خود را بر روی داده‌های بازار اوراق بهادار تهران پیاده کرده‌اند. ایشان برای حل مشکل تعیین اندازه و چیدمان بازه مجموعه‌های فازی سه عملگر جدید طراحی کرده‌اند و از روش تاگوجی به‌عنوان ابزاری برای تعیین مقادیر بهینه‌ی پارامترها و فاکتورهای مدل استفاده نموده‌اند [۱۷]. اصغریور و همکاران (۱۳۹۳) با استفاده از دو روش پارامتریک و ناپارامتریک سنجی VaR را برای سهام صنایع غذایی بازار بورس تهران به دست آورده‌اند و با این سنجی سعی در تشکیل پورتفوی بهینه داشته‌اند. ایشان از مدل MS-GARCH<sup>xxix</sup> به‌عنوان روش پارامتریک و از روش بوت استریپ به‌عنوان روش ناپارامتریک استفاده نمودند. آزمون‌های مختلف صورت گرفته برای مقایسه دو روش به ارجحیت روش پارامتریک نسبت به روش ناپارامتریک اشاره دارد [۱۸].

### ۳. روش‌شناسی پژوهش

#### ۳-۱. طراحی مدل سبد بهینه کارآمد برای سرمایه‌گذاران خرد

با در نظر گرفتن فروض نرمال بودن توزیع بازده دارایی، بازار کامل بدون مالیات (بدون هزینه معاملاتی)، ممنوعیت فروش استقراضی (نامنفی بودن اوزان دارایی) و تقسیم‌پذیر بودن دارایی‌ها، مدل مارکوویتز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{i=1}^n r_i x_i \geq r_e \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (3)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

که در آن متغیرها به شکل زیر قابل تعریف می‌باشد

$n$ : تعداد دارایی‌های موجود

$x_i$ : نسبت (وزن) سرمایه‌گذاری در دارایی  $i$ ام

$\sigma_{ij}$ : کوواریانس بین بازده دارایی  $i$  و  $j$

$r_i$ : بازده دارایی  $i$ ام

$r_e$ : حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار

تصمیم‌گیری می‌شود [۱۰]. رنکوویک و همکاران (2016)<sup>xxv</sup> ارزش در معرض خطر را به‌منظور تعیین سرمایه موردنیاز<sup>xxvi</sup> (CP) بانک‌ها محاسبه نمودند و با استفاده از مدل Mean-VaR و به‌کارگیری مدل تک متغیره GARCH الگوریتم ژنتیک سبد سرمایه‌گذاری بهینه‌ای از ۴۰ سهم بزرگ کشور آمریکا را به دست آوردند [۱۱]. آیوسوک و اسریونچیتا (۲۰۱۶)<sup>xxvii</sup> فرض نرمال بودن سری‌های بازده را نادرست دانسته‌اند، به همین منظور از تئوری ارزش فرین (EVT) برای مدل‌سازی قسمت دم‌پهن سری‌های بازده استفاده نمودند و در ادامه با استفاده از تئوری کاپولا رابطه همبستگی بین سهم‌ها را محاسبه نمودند. درنهایت با استفاده از مدل Copula-GARCH-EVT و به‌کارگیری شاخص بازار سهام کشورهای آسیایی نظیر تایلند، سنگاپور، هند، فیلیپین و مالزی یک سبد سرمایه‌گذار بهینه به دست آورده‌اند [۱۲]. باشر و سادورسکای (۲۰۱۶)<sup>xxviii</sup> با استفاده از سه مدل GO-GARCH، DCC و ADCC همبستگی شرطی بین شاخص سهام بازارهای نوظهور و قیمت نفت، طلا و اوراق قرضه را به‌منظور پوشش ریسک سهام این کشورها محاسبه نمودند. نتایج تحقیق بیان‌گر این موضوع است که در اکثر موارد، نفت بهترین دارایی برای پوشش ریسک بازار سهام در بازارهای نوظهور می‌باشد. همچنین مدل ADCC کارایی مؤثرتری نسبت به دو مدل دیگر در محاسبه نسبت پوشش ریسک دارد [۱۳].

ازجمله مطالعات صورت گرفته در کشور می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

حیدری و ملابهرامی (۱۳۸۹) از مدل‌های گارچ چند متغیره برای بهینه‌سازی مدل Mean-Variance در بازار سهام ایران استفاده کرده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که سهامی که دارای نوسان کمتری هستند، وزن بیشتری را در سبد دارایی به خود اختصاص می‌دهند [۱۴]. حسینی و نجفی (۱۳۹۱) از مدل‌های گارچ چند متغیره و سنجی ریسک VaR برای تشکیل پورتفوی بهینه در بازار اوراق بهادار تهران در دو حالت وجود ریسک نقدینگی و عدم وجود ریسک نقدینگی استفاده نمودند. نتایج نشان‌دهنده این بود که اوزان دارایی‌ها در حالت لحاظ کردن ریسک نقدینگی متفاوت باحالتی است که ریسک نقدینگی وجود ندارد و ریسک نقدینگی از مواردی است که باید در تشکیل پورتفوی بهینه در نظر گرفته شود [۱۵]. درخشان و همکاران (۱۳۹۱)، از الگوریتم‌های فرا ابتکاری برای بهینه‌سازی سبد سهام در بازار ایران استفاده نمودند. در این تحقیق بعد از پس از توسعه مدل مارکوویتز، روشی مبتنی بر ترکیب دو روش بهینه‌یابی اجماع مورچگان و شبیه‌سازی تبرید-تدریجی پارتو پیشنهاد گردید. به‌منظور اعتبار سنجی این

جدول ۱. محدودیت‌های کاربردی برای سرمایه‌گذاران خرد

عنوان محدودیت	توضیحات	رابطه محدودیت	تعریف پارامترها
محدودیت تعداد دارایی‌های موجود در پورتنفوی	با استفاده از این محدودیت، تعداد دارایی‌های موجود در سبد سرمایه‌گذاری از طریق معرفی یک متغیر دودویی $Z_i$ (اگر دارایی $i$ در سبد سرمایه‌گذاری باشد، مساوی یک و در غیر این صورت مساوی صفر) مشخص می‌شود.	$k_{\min} \leq \sum_{i=1}^n Z_i \leq k_{\max}$ (۵)	$Z_i$ : متغیر صفر و یک $k_{\min}$ : حداقل دارایی در سبد $k_{\max}$ : حداکثر دارایی در سبد
محدودیت‌های سقف و کف	با اعمال این محدودیت‌ها، حداقل و حداکثر نسبت (به ترتیب $\epsilon_i$ و $\delta_i$ ) برای هر دارایی که مجاز است در سبد سرمایه‌گذاری نگهداری شود، تعیین می‌گردد. محدودیت‌های سقف (محدودیت‌های حد بالا) به منظور جلوگیری از تجاوز بیش‌ازاندازه‌ی نسبت دارایی خاص معرفی می‌شود و در برخی موارد توسط قوانین و مقررات به مدل تحمیل می‌شوند. محدودیت‌های کف (حد پایین) برای جلوگیری از هزینه‌ی مدیریت نسبت‌های بسیار کم دارایی‌ها به کار گرفته می‌شود و ممکن است توسط هزینه‌های معاملاتی ایجاب شود. با اعمال محدودیت کف، محدودیت شماره (۴) در مدل مارکوویتز پایه ( $x_i \geq 0$ ) زائد می‌شود [19].	$\epsilon_i Z_i \leq x_i \leq \delta_i Z_i$ (۶)	$\epsilon_i$ : حداقل نسبت مجاز برای دارایی $\delta_i$ : حداکثر نسبت مجاز برای دارایی
اعمال هزینه معاملاتی	برای سرمایه‌گذاران خرد با توجه به حجم معامله نسبتاً محدودی که دارند، در نظر گرفتن هزینه معاملاتی در هنگام تشکیل سبد سرمایه‌گذاری حائز اهمیت می‌باشد. در این پژوهش با توجه به این‌که مدل مارکوویتز یک مرحله‌ای و بدون بازنگری برای یافتن وزن بهینه مدنظر است، از هزینه معاملاتی متغیر که درصدی از حجم معاملات می‌باشد استفاده شده است.	$\sum_{i=1}^n (r_i Z_i x_i - C Z_i x_i) \geq r_e$ (۷)	$C$ : هزینه معاملاتی که در ایران معادل کارمزد خرید و فروش می‌باشد $r_e$ : حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار

در نهایت مدل موردنظر به صورت زیر تشکیل داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\ & \text{Subject to} \\ & z = \text{integer} \\ & \sum_{i=1}^n (r_i Z_i x_i - C Z_i x_i) \geq r_e \\ & k_{\min} \leq \sum_{i=1}^n Z_i \\ & \leq k_{\max} \\ & \epsilon_i Z_i \leq x_i \leq \delta_i Z_i \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned}$$

۲-۳. ماتریس واریانس-کواریانس مشروط

در این پژوهش برای بهینه‌سازی سبد سهام برای سرمایه‌گذاران خرد می‌بایست ماتریس واریانس-کواریانس شرطی را

• مدل **D-Vech(p,q)**  
بولرسلو **XXX** در سال ۱۹۸۸ مدل D-Vech را پیشنهاد کرد که در آن ماتریس‌های  $A$  و  $B$  قطری بوده و ماتریس  $H_t$  از رابطه (۸) تعیین می‌گردد.

که در آن  $h_{11,t}$  و  $h_{22,t}$  واریانس های شرطی مدل  $GARCH(1,1)$  می باشند.

• مدل DCC

انگل در سال ۲۰۰۲، فرض ثابت بودن همبستگی های شرطی را واقع بینانه ندانست و مدل DCC که مدل همبستگی شرطی پویا است را ارائه نمود. برآوردهای گوناگونی از مدل DCC وجود دارد ولی یکی از پرکاربردترین آن ها مدل انگل در سال ۲۰۰۲ است. مدل DCC شبیه به مدل CCC است با این تفاوت که در آن همبستگی در طول زمان متغیر بوده و ماتریس واریانس کوواریانس به صورت رابطه (۱۲) تعریف می شود:

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (12)$$

که در آن  $D_t$  ماتریس قطری است که درایه های روی قطر اصلی انحراف معیار استاندارد شرطی - همان ریشه دوم واریانس شرطی در مدل  $GARCH(1,1)$  می باشد.  $R_t$  نیز ماتریس همبستگی شرطی است که در طول زمان متغیر می باشد. چندین روش برای به دست آوردن پارامتر  $R_t$  وجود دارد که یکی از آن ها روش هموارسازی نمایی انگل در سال ۲۰۰۲ است.

$$Q_t = S \odot (\hat{u} - A - B) + A \odot (u_{t-1} u_{t-1}') + B \odot Q_{t-1} \quad (13)$$

$$u_t = D_t^{-1} \varepsilon_t \quad (14)$$

که در آن  $S$  ماتریس همبستگی غیرشرطی است و  $Q_t$  ماتریس متقارن  $N \times N$  معین مثبت است.

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \quad (15)$$

مدل DCC یکی از مدل های پر کاربرد و جدید برای مدل سازی پارامترهای همبستگی های متغیر با زمان در بهینه سازی سبد سرمایه گذاری است. این مدل سهولت تخمین مدل همبستگی شرطی ثابت را حفظ می کند و همچنین همبستگی ها را در طول زمان متغیر در نظر می گیرد. مدل DCC ماتریس واریانس-کوواریانس قطعی ثابت را در هر لحظه از زمان برآورد می کند.

۴. معرفی شاخص های مورد مطالعه

شرکت های پذیرفته شده در بورس به گروه های مختلفی تقسیم می شوند که در این مطالعه ۵ گروه شامل «خودرو و ساخت قطعات»، «مواد و محصولات دارویی»، «محصولات شیمیایی»، «کاشی و سرامیک» و «قند و شکر» انتخاب شده است. بررسی شاخص های گروه ها بسیار مهم است؛ زیرا تحلیل گران بازار بیش از بقیه شاخص های بازار، این بخش را برای ارزیابی حرکات گروه های صنعت و اندازه گیری اهمیت گروه مورد استفاده قرار می دهند. انتخاب شاخص ها به گونه ای صورت گرفت که صنایع

$$H_t = c + \sum_{i=1}^p A_i \odot (\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}') + \sum_{j=1}^q B_j \odot H_{t-j} \quad (8)$$

در رابطه فوق  $p$  و  $q$  دو عدد صحیح نامنفی هستند و  $A$  و  $B$  ماتریس های متقارن  $N \times N$  هستند. عملگر  $\odot$  نیز ضرب مؤلفه در مؤلفه ماتریس است. تعداد پارامترهای تخمینی برای مدل  $D-Vech(p,q)$  برابر  $\frac{(N+5)}{2}$  است. از محدودیت های مدل  $D-Vech$  می توان به عدم تضمین معین مثبت بودن ماتریس  $H_t$  اشاره کرد.

• مدل BEKK

تضمین معین مثبت بودن ماتریس کوواریانس بدون در نظر گرفتن محدودیت های ساختاری در مدل کار آسانی نیست به همین دلیل برای این که از معین مثبت بودن ماتریس کوواریانس اطمینان حاصل شود، در سال ۱۹۹۵ انگل  $XXXI$  و همکاران مدل BEKK را پیشنهاد داده اند که به صورت رابطه (۹) است:

$$H_t = C \hat{C} + A \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' \hat{A} + B H_{t-1} \hat{B} \quad (9)$$

که در آن  $A$ ،  $B$  و  $C$  ماتریس های مربعی  $N \times N$  هستند و  $C$  یک ماتریس بالا مثلثی است. با توجه به این که تعداد پارامترهایی که در این مدل تخمین زده می شوند با افزایش ابعاد مدل به شدت زیاد می شود، این مدل اصولاً برای ابعاد بیشتر از ۳ یا ۴ مورد استفاده قرار نمی گیرند به همین دلیل در پژوهش از مدل Diagonal-BEKK استفاده می شود که در آن ماتریس  $A$  و  $B$  را به صورت قطری در نظر می گیریم.

• مدل CCC

یکی از روش های کاهش تعداد پارامترهای تخمینی در مدل  $MGARCH$ ، ثابت فرض کردن همبستگی شرطی در طول زمان است. مدل همبستگی ثابت در طول زمان در سال ۱۹۹۰ توسط بولرسلو ارائه شد.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$R$  ماتریس همبستگی شرطی در طول زمان بوده و  $\rho_{ij}$  ضریب همبستگی بین متغیر  $i$  و  $j$  است. ثابت در نظر گرفتن همبستگی های شرطی باعث کاهش تولید پارامترها شده و در نتیجه برآورد ساده تر می شود.

$$H_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{NN,t}}) [R] \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{NN,t}}) \quad (10)$$

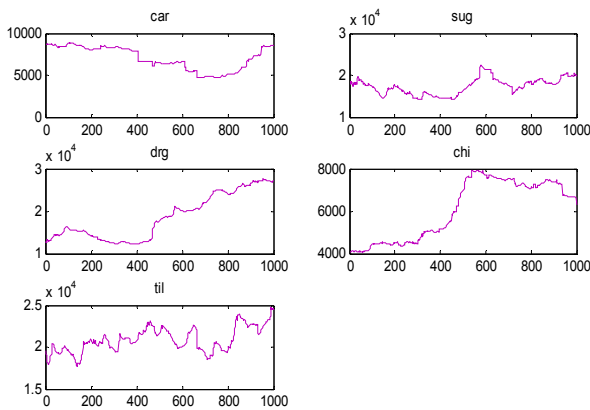
$\text{diag}$  عملگری است که عناصر روی قطر اصلی را انتخاب می کند. حالت گسترده این مدل برای  $N = 2$  و  $p = q = 1$  به شکل رابطه (۱۱) است:

$$H_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

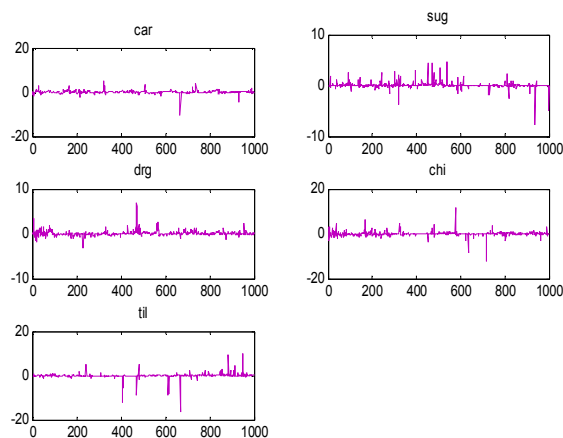
جدول ۳. نتایج آزمون ADF

گروه	بدون عرض از مبدأ و روند	عرض از مبدأ	عرض از مبدأ و روند
خودرو و ساخت قطعات	-9.671	-10.01	-10.03
قند و شکر	-15.57	-15.93	-23.87
محصولات دارویی	-13.68	-14.43	-14.44
محصولات شیمیایی	-13.11	-13.58	-13.61
کاشی و سرامیک	-25	-25.23	-25.3

نمودار شاخص قیمت و نمودار بازدهی برای پنج شاخص مورد مطالعه در بازه زمانی مشخص، به ترتیب در شکل (۱) و (۲) قابل رؤیت می‌باشد.



شکل ۱. نمودار شاخص قیمت برای شاخص‌های مورد مطالعه در بازه ۸۸-۹۱



شکل ۲. نمودار بازدهی شاخص‌های مورد مطالعه در بازه زمانی ۸۸-۹۱

مورد بررسی از نظر تئوریک کمترین وابستگی را داشته باشند. به منظور محاسبه بازدهی شاخص‌ها از لگاریتم بازدهی استفاده شده است. جدول (۲) آماره‌های توصیفی بازدهی شاخص‌های ۵ گروه مورد مطالعه را نشان می‌دهند. نتایج حاصل نشان می‌دهد که گروه خودرو و محصولات دارویی به ترتیب بیشترین بازدهی و گروه کاشی و سرامیک بیشترین واریانس را به خود اختصاص داده‌اند. نتایج آزمون جارک-برا، غیر نرمال بودن توزیع داده‌ها را به اثبات می‌رساند، همچنین مقادیر مربوط به چولگی و کشیدگی نیز اختلاف معناداری با توزیع نرمال نشان می‌دهد؛ بنابراین در تخمین معادله‌های میانگین و واریانس از توزیع t-student استفاده می‌شود.

جدول ۲. آماره‌های توصیفی شاخص‌های مورد مطالعه

گروه‌ها	مشخصات آماری			
	میانگین	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
خودرو و ساخت قطعات (car)	0.12	0.85	1.52	34.65
قند و شکر (sug)	0.069	0.648	-1.48	61.77
محصولات دارویی (drg)	0.124	0.633	0.19	35.86
محصولات شیمیایی (chi)	0.112	0.87	2.6	71.17
کاشی و سرامیک (til)	0.08	1.04	-5.08	181.27
Jarque-Bera	111992.6	383366	119592.8	517525.6
	3529949			

• آزمون ریشه واحد

از جمله آزمون‌های متداول در زمینه پایایی، آزمون ریشه واحد هست. الگوی ساده خود بازگشتی مرتبه اول AR(1) را در نظر بگیرد:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$\alpha$  عددی حقیقی و  $\varepsilon_t$  جزء خطای تصادفی است. در رابطه‌ی فوق چنانچه  $|\alpha| > 1$  باشد، سری زمانی  $y_t$  مانا است؛ اما در صورتی که  $|\alpha| = 1$ ، سری زمانی دارای ریشه واحد بوده و نامانا است.

به این ترتیب در این آزمون داریم:

$$H_0: \alpha = 1$$

نتایج آزمون ADF در جدول (۳) نشان‌دهنده مانایی بازده‌ها در ۵ شاخص مورد مطالعه هستند.

۵. تجزیه و تحلیل نتایج

در این پژوهش ماتریس واریانس-کواریانس در مدل‌های ذکر شده با استفاده از نرم‌افزار Eviews تخمین زده می‌شوند. بعد از تخمین ماتریس واریانس-کواریانس شرطی برای دارایی‌های موجود، نوبت به تشکیل سبد بهینه از دارایی‌ها و به دست آوردن اوزان بهینه برای آن‌ها می‌باشد. در این مقاله از نرم‌افزار LINGO برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی استفاده می‌شود. از خصوصیات این نرم‌افزار حل دقیق مسائل می‌باشد ولی باید به این نکته توجه کرد که با توجه به محدودیت‌های موجود ممکن است که برخی جواب‌ها در ناحیه شدنی قرار نداشته باشند. در ادامه نتایج حاصل از تخمین پارامترهای مجهول و تخصیص اوزان برای هر شاخص به تفکیک مدل‌های مورد استفاده ارائه می‌گردد.

۵-۱. تخمین مدل‌ها

• تخمین مدل D-Vech

در این قسمت پارامترهای مدل D-Vech برای دارایی‌های موجود در سبد سرمایه‌گذاری بهینه ارائه گردیده است. C ماتریس ضرایب ثابت، A ماتریس ضرایب ARCH و B ماتریس ضرایب GARCH در مدل می‌باشد.

جدول ۴. نتایج تخمین پارامترها با مدل D-Vech

کاشی و سرامیک	محصولات شیمیایی	محصولات دارویی	قند و شکر	خودرو و ساخت قطعات
C				
0.0199	0.0055	0.0199	0.0006	0.5144
0.0069	-0.002	0.0097	0.0722	
0.0051	0.0043	0.495		
0.0124	0.0379			
0.1343				
A				
0.0518	0.0425	0.1067	-0.032	0.5455
-0.041	0.0158	0.1289	0.2372	
0.0500	0.0123	0.6733		
0.0609	0.0249			
0.1278				
B				
0.04871	0.6048	0.5908	0.8889	0.0168
-0.568	0.9237	0.3452	0.6726	
-0.446	0.9550	0.7557		
-0.457	0.9572			
0.2723				

• خروجی مدل Diagonal-BEKK

همان‌طور که اشاره شد در شرایطی که بعد مدل بیش از ۳ باشد، پارامترهایی تخمینی در مدل BEKK به شدت افزایش می‌یابد و این مدل مورد استفاده قرار نمی‌گیرد و مدل D-BEKK جایگزین آن می‌شود. در مدل D-BEKK ماتریس ضرایب ARCH و GARCH به صورت قطری در نظر گرفته می‌شوند تا بدین وسیله تعداد پارامترهای تخمینی کاهش یابد. پارامترهای تخمین زده شده در مدل D-BEKK به صورت زیر است:

جدول ۵. نتایج تخمین پارامترها با مدل Diagonal-BEKK

کاشی و سرامیک	محصولات شیمیایی	محصولات دارویی	قند و شکر	خودرو و ساخت قطعات
BEKK				
C				
0.0104	0.0302	0.0131	0.0047	0.5260
0.0009	-0.002	0.0034	0.0505	
0.0082	0.0131	0.0521		
0.0136	0.0087			
0.1967				
A				
0	0	0	0	1.2036
0	0	0	0.2875	0
0	0	0.7266	0	0
0	0.1045	0	0	0
1.6864	0	0	0	0
B				
0	0	0	0	0.5531
0	0	0	0.9380	0
0	0	0.9291	0	0
0	0.9956	0	0	0
0.2662	0	0	0	0

• خروجی مدل CCC

نتایج تخمین پارامترهای مدل CCC به صورت زیر ارائه می‌گردد که M بردار ضرایب ثابت، A بردار ضرایب ARCH، B بردار ضرایب GARCH و R ماتریس همبستگی شرطی ثابت بین دارایی‌ها می‌باشد.

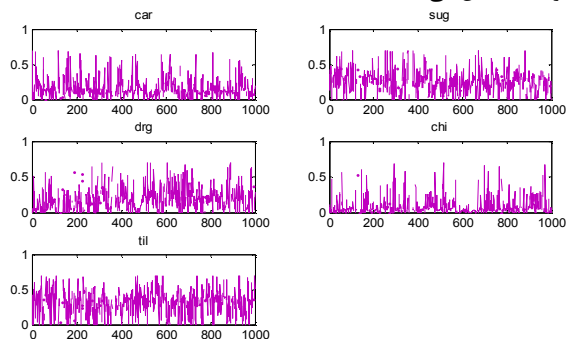


جدول ۶. نتایج تخمین پارامترها با مدل CCC

کاشی و سرامیک	محصولات شیمیایی	محصولات دارویی	قند و شکر	خودرو و ساخت قطعات
				<b>M</b>
				0.2907
				0.0365
				0.0178
				0.0006
				1.1291
				<b>A</b>
				0.1115
				0.0012
				0.184
				0.0018
				-0.457
				<b>B</b>
				0.8211
				0.1136
				0.8829
				0.8537
				0.9994
				<b>R</b>
				1
				0.0573
				0.0422
				0.0292
				-0.183
				1
				0.0960
				0.0179
				-0.012
				1
				0.0703
				-0.059
				1
				0.008
				1

نتایج بهینه‌سازی بر اساس مدل D-Vech

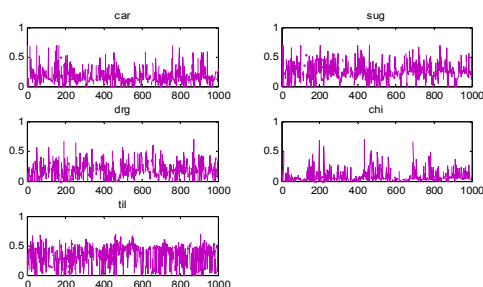
شکل (۳) نتایج تخصیص اوزان بهینه به دارایی‌های موردنظر را در دوره‌های متفاوت نمایش می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است گروه «کاشی و سرامیک» بیشترین و گروه «محصولات شیمیایی» کمترین وزن را در سبد سرمایه‌گذاری به خود اختصاص می‌دهند.



شکل ۳. نتایج تخصیص در مدل D-Vech

نتایج بهینه‌سازی بر اساس مدل D-BEKK

در شکل (۴) طریقه‌ی تخصیص اوزان بهینه بین دارایی‌های موجود در سبد سرمایه‌گذاری به نمایش گذاشته می‌شوند که گروه «کاشی و سرامیک» بیشترین و گروه «محصولات شیمیایی» کمترین وزن را در سبد دارا می‌باشند.



شکل ۴. نتایج تخصیص در مدل D-BEKK

نتایج بهینه‌سازی بر اساس مدل CCC

شکل (۵) اوزان بهینه دارایی‌ها را در دوره‌های مختلف در مدل CCC نمایش می‌دهد. در تخصیص اوزان بهینه با استفاده از مدل CCC، گروه «محصولات دارویی» بیشترین و گروه «کاشی و سرامیک» کمترین وزن را در سبد دارند.

خروجی مدل DCC

مدل DCC برخلاف مدل CCC، همبستگی بین دارایی‌ها را به صورت متغیر با زمان در نظر می‌گیرد؛ که در اینجا همبستگی پویا را با  $R_t$  نمایش می‌دهیم.

جدول ۷. نتایج تخمین پارامترها با مدل DCC

کاشی و سرامیک	محصولات شیمیایی	محصولات دارویی	قند و شکر	خودرو و ساخت قطعات
				<b>M</b>
				0.7557
				0.0399
				0.0179
				0.3413
				0.9328
				<b>A</b>
				0.3099
				0.6527
				-0.015
				0.4789
				0.7952
				<b>B</b>
				0.7232
				0.3221
				0.8532
				0.5214
				0.2556
				<b>R<sub>t</sub></b>
				1
				0.2387
				0.0738
				0.0937
				0.0088
				1
				0.0376
				-0.012
				-0.010
				1
				0.1877
				0.042
				1
				0.0407
				1

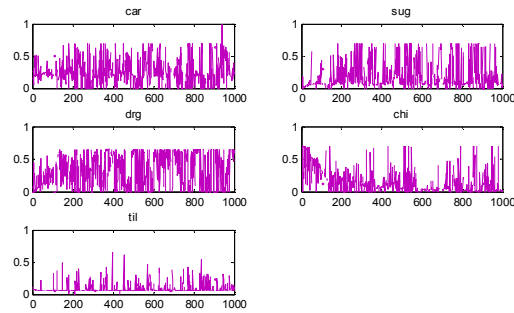
۲-۵ نتایج بهینه‌سازی

نتایج بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از مدل‌های مختلف در شکل‌های ۳-۴-۵-۶ و جدول ۸ گزارش شده است.

در این پژوهش برای مدل‌سازی بازده هر سری زمانی، از مدل خودرگرسیون برداری (VAR) استفاده می‌شود. وقفه بهینه برای مدل‌های D-BEKK، D-Vech و DCC مقدار یک می‌باشد؛ اما استفاده از VAR(1) در مدل CCC موجب بی‌معنی شدن پارامترهای تخمینی می‌شود و وقفه بهینه برای مدل CCC عدد دو می‌باشد؛ بنابراین از VAR(1) برای مدل‌سازی سری‌های زمانی در مدل‌های D-BEKK، D-Vech و DCC و از VAR(2) برای مدل‌سازی سری‌های زمانی در مدل CCC استفاده می‌شود. گزارش ارائه‌شده مربوط به اوزان بهینه دارایی‌های سبد سرمایه‌گذاری بهینه در جدول (۸) نشان می‌دهد که نتایج مدل‌های D-BEKK و D-Vech بسیار شبیه به هم می‌باشد و در این مدل‌ها گروه «کاشی و سرامیک» بیشترین و گروه «محصولات شیمیایی» کمترین سهم را در سبد سرمایه‌گذاری بهینه به خود اختصاص داده‌اند؛ اما این نتایج با اوزان به‌دست‌آمده از مدل‌های DCC و CCC متفاوت می‌باشد به‌طوری‌که در مدل CCC گروه «محصولات دارویی» بیشترین و گروه «کاشی و سرامیک» کمترین وزن را دارند و در مدل DCC گروه «قند و شکر» بیشترین و گروه «خودرو و ساخت قطعات» کمترین سهم سبد سرمایه‌گذاری را به خود اختصاص می‌دهند. علت این تفاوت را می‌توان استفاده از VAR(2) در مدل CCC همچنین فرایند دومرحله‌ای مدل DCC دانست.

### ۳-۵. نتیجه‌گیری

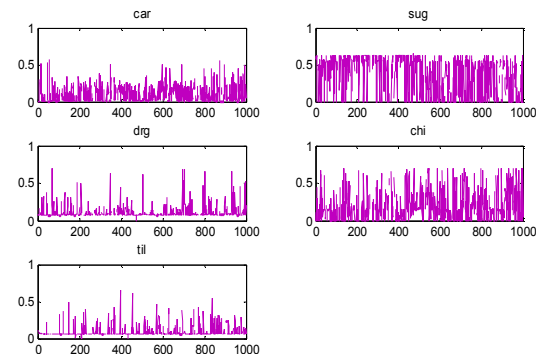
استفاده از مدل‌های کلاسیک سرمایه‌گذاری برای سرمایه‌گذاران خرد محدودیت‌هایی را به همراه دارد به همین منظور این پژوهش باهدف ارائه یک مدل کاربردی برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری توسط سرمایه‌گذاران خرد، محدودیت‌هایی ازجمله هزینه معاملاتی سرمایه‌گذاری را به مدل پایه مارکوویتز اضافه نمود. باتوجه به ویژگی‌های سری زمانی مالی ازجمله دارا بودن ناهمسانی واریانس و تلاطم خوشه‌ای، از مدل‌های خانواده GARCH برای محاسبه‌ی واریانس شرطی سری‌های زمانی استفاده نموده و در مرحله بعد، از این واریانس‌های شرطی در مدل بهینه‌سازی برای به دست آوردن اوزان بهینه دارایی‌ها استفاده می‌نماییم. در این پژوهش ۵ گروه فعال در بازار بورس اوراق بهادار تهران شامل «خودرو و ساخت قطعات»، «مواد و محصولات دارویی»، «محصولات شیمیایی»، «کاشی و سرامیک» و «قند و شکر» مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و مدل‌های D-Vech، D-BEKK، CCC و DCC از خانواده MGARCH انتخاب شده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده از بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری نشان‌دهنده‌ی شباهت مدل‌های D-Vech و D-BEKK و تفاوت آن‌ها با نتایج مدل‌های DCC و CCC می‌باشد که علت این تفاوت‌ها را می‌توان در ساختار متفاوت ماتریس واریانس-



شکل ۵. نتایج تخصیص در مدل CCC

### • نتایج بهینه‌سازی بر اساس مدل DCC

شکل (۶) اوزان دارایی‌ها در سبد سرمایه‌گذاری را در طی دوره‌های متفاوت نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشخص می‌باشد، گروه «قند و شکر» بیشترین و گروه «محصولات دارویی» کمترین سهم را در سبد بهینه به خود اختصاص می‌دهند.



شکل ۶. نتایج تخصیص در مدل DCC

در جدول (۸) متوسط اوزان بهینه هر یک از دارایی‌ها را در سبد سرمایه‌گذاری برای مدل‌های موردنظر مشاهده می‌شود.

### جدول ۸. میانگین اوزان بهینه دارایی‌ها در هر یک از

میانگین اوزان	مدل‌ها				
	خودرو و ساخت قطعات (car)	قند و شکر (sug)	محصولات دارویی (drg)	محصولات شیمیایی (chi)	کاشی و سرامیک (til)
میانگین اوزان مدل D-VEC	0.1562	0.2436	0.1921	0.0807	0.3223
میانگین اوزان مدل BEKK	0.1674	0.2530	0.1702	0.0718	0.3339
میانگین اوزان مدل CCC	0.2558	0.1842	0.3431	0.1397	0.0854
میانگین اوزان مدل DCC	0.1039	0.3681	0.1112	0.1853	0.2321

27. Apiwat Ayusuk Songsak Sriboonchitta (2016)  
 28. Syed Abul Basher, Perry Sadorsky (2016)-4  
 29. Markov Swiching GARCH  
 30. Bollerslev  
 31. Engle

منابع

[1] Yilmaz, T. Improving portfolio optimization by DCC and DECO GARCH: Evidence from Istanbul Stock Exchange, MPRA paper No. 27314, posted, (2010).  
 [2] Deng, L., Ma, C., & Yang, W. Portfolio Optimization via Pair Copula-GARCH-EVT-CVaR Model. Systems Engineering Procedia, (2011), Vol. 2, pp. 171-181.  
 [3] Fiszeder, P., Minimum Variance Portfolio Selection for Large Number of Stocks–Application of Time-Varying Covariance Matrices. Dynamic Econometric Models, (2011), Vol. 11, pp. 87-98.  
 [4] Kurosaki, T., & Kim, Y. S., Mean-CoAVaR optimization for global banking portfolios. Invest. Manag. Finan. Innovat, (2013), Vol. 10, No. 2, pp. 15-20.  
 [5] Allen, D. E., Amram, R., & McAleer, M. Volatility spillovers from the Chinese stock market to economic neighbours. Mathematics and Computers in Simulation, (2013), Vol. 94, pp. 238-257.  
 [6] Miralles-Marcelo, J. L., Miralles-Quirós, J. L., & del Mar Miralles-Quirós, M., Multivariate GARCH models and risk minimizing portfolios: The importance of medium and small firms. The Spanish Review of Financial Economics, (2013), Vol. 11, No. 1, pp. 29-38.  
 [7] Autchariyapanitkul, K., Chanaim, S., & Sriboonchitta, S., Portfolio optimization of stock returns in high-dimensions: A copula-based approach. Thai Journal of Mathematics, (2014), pp. 11-23.  
 [8] Thalassinou, E. I., Venediktova, B., & Zampeta, V., Applications of M-GARCH

کواریانس شرطی تولیدشده توسط هر یک از این مدل‌ها جستجو کرد. به هنگام استفاده از VAR(1) در مدل‌سازی بازده در مدل CCC، پارامترها بی‌معنی می‌باشند و از VAR(2) برای مدل‌سازی بازده در این مدل استفاده می‌شود. همچنین مدل DCC برخلاف سایر مدل‌ها که یک مرحله‌ای هستند، فرایند دومرحله‌ای را برای محاسبه ماتریس واریانس-کواریانس شرطی طی می‌کند. موارد بالا می‌تواند دلیل تفاوت در ساختار ماتریس واریانس-کواریانس شرطی باشد که به تفاوت در اوزان بهینه هریک از دارایی‌ها در مدل‌های مختلف منتج می‌شود. به‌طور کلی می‌توان بیان کرد که اندازه واریانس دارایی‌ها در میزان سهم آن‌ها از سبد سرمایه‌گذاری نقش اساسی دارد و دارایی‌های که واریانس بیشتری دارند (به عبارتی نوسان بیشتری دارند) سهم کمتری از پرتفوی را به خود اختصاص می‌دهند.

پی‌نوشت

1. Portfolio selection
2. modern investment theory
3. transaction cost
4. fat tail
5. cluster
6. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
7. Multivariate GARCH model
8. time-varying
9. Tolgahan and Yilmaz (2010)
10. Global Minimum Variance
11. Constant Correlation
12. sample covariance estimation
13. Ling Deng , Chaoqun Ma , Wenyu Yang (2011)
14. Extrime value theory (EVT)
15. copula
16. Fiszeder (2011)
17. Kurosaki ,Shin Kim (2013)
18. Allen ,Amram ,McAleer (2013)
19. Luis Miralles,Mar Miralles (2013)
20. Chanaim ,Autchariyapanitkul , Sriboonchitta(2014)
21. Thalassinou , Venediktova , Zampeta (2015)
22. Ben Messaoud , Aloui (2015)
23. Mendes, Paiva, Peruchi , Balestrassi , Leme, Silva (2015)
24. Mixture Design Experiment
25. Vladimir Ranković, Mikica Drenovak, Branko Urosevic, Branko Urosevic (2016)
26. Capital requirements

[۱۴] حیدری حسن، ملابهرامی احمد، بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از مدل‌های گارچ چندمتغیره، نشریه تحقیقات مالی، (۱۳۸۹)، دوره ۱۲، شماره ۳۰، صفحات ۵۶-۳۵.

[۱۵] حسینی ایمنی، سید احمد، نجفی، امیرعباس. تعیین سبد بهینه سرمایه‌گذاری در صنایع مختلف بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از رویکرد VAR-Multivariate و در نظر گرفتن ریسک نقدینگی، فصلنامه دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، (۱۳۹۱)، سال ۶، شماره ۲۰، صفحات ۷۳-۵۶.

[۱۶] درخشان، مجتبی، گل مکانی، حمیدرضا، حنفی زاده، پیام. رویکردی فرا ابتکاری برای انتخاب سبد سهام با اهداف چندگانه در بورس اوراق بهادار تهران، نشریه بین‌المللی صنایع و مدیریت تولید، (۱۳۹۱)، جلد ۲۳، شماره ۳، صفحه ۳۱۷-۳۳۱.

[۱۷] رادمهر فرید، شمس قارنه ناصر. مدل پیش‌بینی بر اساس سری زمانی فازی مرتبه بالا و الگوریتم شبیه‌سازی تبرید، مطالعه موردی: شاخص بورس تهران، نشریه بین‌المللی صنایع و مدیریت تولید، (۱۳۹۲)، جلد ۲۴، شماره ۱، صفحه ۹۶-۱۰۶.

[۱۸] اصغرپور، حسین، فلاحی، فیروز، صنوبر ناصر، رضازاده، علی. بهینه‌سازی سبد سهام در چارچوب ارزش در معرض خطر: مقایسه روش MS-GARCH و بوت استرپینگ، فصلنامه تحقیقات مدل‌سازی اقتصادی، (۱۳۹۳)، سال پنجم، شماره ۱۷، صفحات ۱۲۲-۸۷.

[۱۹] قاسمی، حمیدرضا، نجفی، امیرعباس. بهینه‌سازی سبد سهام در شرایط مجاز بودن فروش استقرایی و برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه نشریه تحقیقات مالی، (۱۳۹۱)، دوره ۱۴، شماره ۲، صفحات ۱۳۲-۱۱۷.

Model for the Selection of Securities of Banks' Investment Portfolio. Applied Economics and Finance, (2015), Vol. 2, No. 2, pp. 1-13.

[9] Messaoud, S. B., & Aloui, C. Measuring Risk of Portfolio: GARCH-Copula Model. Journal of Economic Integration, (2015), Vol. 30, No. 1, pp. 172-205.

[10] Mendes, R. R. A., Paiva, A. P., Peruchi, R. S., Balestrassi, P. P., Leme, R. C., & Silva, M. B.. Multiobjective portfolio optimization of ARMA-GARCH time series based on experimental designs. Computers & Operations Research, (2015).

[11] Rankovic, Vladimir, et al. Mean Univariate-GARCH VaR Portfolio Optimization: Actual Portfolio Approach. No. 5731. CESifo Group Munich, (2016).

[12] Ayusuk, Apiwat, and Songsak Sriboonchitta. "Copula Based Volatility Models and Extreme Value Theory for Portfolio Simulation with an Application to Asian Stock Markets." Causal Inference in Econometrics. Springer International Publishing, (2016), pp. 279-293.

[13] Basher, Syed Abul, and Perry Sadorsky. "Hedging emerging market stock prices with oil, gold, VIX, and bonds: A comparison between DCC, ADCC and GO-GARCH." Energy Economics, (2016), Vol. 54, pp. 235-247.