



Performance Comparison of Bootstrap Techniques in Interval Estimation of Process Capability Indices in AR (1) Processes

Samrad Jafarian Namin, Sedigh Raissi & Amirhossein Amiri*

Samrad Jafarian Namin, M.Sc of Industrial Engineering Department, Islamic Azad University-South Tehran Branch, Iran

Sedigh Raissi, Associate professor of Industrial Engineering Department, Islamic Azad University-South Tehran Branch, Iran

Amirhossein Amiri, Associate professor of Industrial Engineering Department, Faculty of Engineering, Shahed University, Tehran, Iran

Keywords

Process capability indices,
AR (1) Autocorrelated process,
Bootstrap confidence interval

ABSTRACT

Process capability indices (PCIs) are used as effective quality engineering tool on comparison between voice of the customer and voice of the process. By using them, process potential and capability in satisfying customers' expectations is evaluated. The independency of observations over time is one of the assumptions of the most PCI developed. However, the development of sampling technology by using sensors has led to increasing the number of sampling as well as decreasing the time interval between sampling. This leads to occurrence of autocorrelation between successive observations and violation of the independency between observations in return. In this paper, confidence intervals of the popular PCIs estimated using two different Bootstrap resampling techniques when data correlated by an AR(1) process. Accordingly, performance of the proposed interval estimators compared in terms of average coverage percentage and average interval length through numerical examples. Simulations results indicate that standard bootstrap method frequently outperforms percentile based bootstrap method. In addition, vast amount of data is brought about average coverage percentage closer to a nominal confidence level and lower average interval length with more accuracy. Finally, the application to the real data indicated that performance of the methods were very well.

© 2016 IUST Publication, IJIEPM Vol. 27, No. 3, All Rights Reserved



مقایسه عملکرد روش های بوتاسترپ در برآورد فاصله ای شاخص های قابلیت فرآیندهای خودهمبسته اتورگرسیو مرتبه اول

سمراد جعفریان نمین، صدیق رئیسی و امیرحسین امیری*

کلمات کلیدی

شاخص های قابلیت فرآیند،
فرآیند خودهمبسته $AR(1)$ ،
فاصله اطمینان بوتاسترپ

چکیده:

شاخص های قابلیت فرآیند به عنوان یک ابزار کارای مهندسی کیفیت به منظور مقایسه صدای فرآیند و صدای مشتری استفاده می شوند و به کمک آنها می توان توان بالقوه و کارایی عملیاتی فرآیندها را در تامین انتظارات مشتریان ارزیابی کرد. استقلال مشاهدات از متداول ترین مفروضات اکثر شاخص های قابلیت فرآیند است. اما با پیشرفت تکنولوژی های نمونه برداری و استفاده وسیع تر از انواع حسگرها، دفعات نمونه گیری افزایش و فواصل بین نمونه گیری کاهش یافته است که نتیجه آن افزایش حجم نمونه های در اختیار و استخراج الگوهای همبستگی میان اطلاعات نمونه ای است. طبیعی است در این شرایط فرض استقلال مقادیر نمونه ای نقض می شود. در این مقاله برای فرآیندهای خودبرگشتی مرتبه اول، برآورد فاصله ای معروفترین شاخص های توانایی فرآیند با بهره گیری از دو روش بوتاسترپ محاسبه شده است تا عملکرد این روش ها توسط دو شاخص مهم متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان با بهره گیری از روش شبیه سازی شود. نتایج شبیه سازی نشان داد که روش بوتاسترپ استاندارد غالباً عملکرد بهتری نسبت به روش بوتاسترپ صدکی دارد. همچنین، نشان داده شد که دسترسی به حجم قابل ملاحظه ای از داده ها منجر به حصول متوسط درصد پوشش نزدیک به سطح اطمینان اسمی و متوسط طول فاصله اطمینان کوچکتر با دقت بیشتر خواهد شد. در نهایت، مثالی کاربردی برای مشاهدات واقعی نشان داد که این روش ها از عملکرد مناسبی برخوردارند.

۱. مقدمه

صنایع تولیدی از اواخر ۱۹۷۰ تقاضای رو به افزایشی از کیفیت را تجربه کرده اند. تحلیل قابلیت فرآیند، رویکرد موثری جهت اطمینان از دستیابی به سطح مطلوبی از کیفیت می باشد. در همین راستا، از پرکاربردترین شاخص های توسعه داده شده می توان به:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}, \quad (1)$$

$$C_{pk} = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right), \quad (2)$$

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{\sqrt{6\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \quad (3)$$

اشاره کرد. در روابط فوق، USL و LSL بترتیب نشان دهنده حدود مشخصات بالا و پایین، σ مبین انحراف استاندارد، μ میانگین فرآیند و T بعنوان مقدار هدف می باشد (۱)، (۲) و (۳).

ژانگ و همکاران [۴] با بررسی رفتار توزیع آماری برآوردکننده های نمونه و تخمین فاصله ای C_{pk} تحت فرض توزیع نرمال و استقلال مشاهدات نشان دادند که تغییرپذیری نمونه برای برآورد این شاخص ها را نمی توان نادیده گرفت و باید برآورد فاصله ای لحاظ شود. در همین راستا، مطالعات مختلفی برای ساختن حدود اطمینان از انواع شاخص های قابلیت فرآیند و با

تاریخ وصول: ۹۳/۰۲/۱۱

تاریخ تصویب: ۹۴/۰۲/۱۳

سمراد جعفریان نمین، کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، st_s_jafarian@azad.ac.ir

صدیق رئیسی، دانشیار و عضو هیات علمی دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، raissi@azad.ac.ir

*نویسنده مسئول مقاله: امیرحسین امیری، دانشیار و عضو هیات علمی گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد، amiri@shahed.ac.ir

فرض داده‌های مستقل در [۵]، [۶]، [۷]، [۸] و [۹] انجام شده است.

امروزه با پیشرفت تکنولوژی‌های نمونه‌برداری به کمک حسگرها دفعات نمونه‌گیری افزایش و فواصل بین نمونه‌گیری کاهش یافته است که نتیجه آن افزایش حجم نمونه‌های در اختیار و استخراج الگوهای همبستگی میان اطلاعات نمونه‌ای است که بر اساس آن فرض استقلال نقض می‌شود و بنظر می‌رسد نمودارهای کنترل استاندارد اثر بخشی لازم را نداشته باشند ([۱۰] و [۱۱]).

باکس و جنکینز [۱۲] استراتژی سه مرحله‌ای تشخیص مدل، برازش مدل و بررسی درستی مدل را برای یافتن مدل مناسب و منطبق بر سری زمانی گسسته پیشنهاد نمودند. یکی از مدل‌های سری زمانی خطی و تک‌متغیره که در الگوسازی وضعیت‌های دنیای واقعی از اهمیت زیادی برخوردار است فرآیند خودبرگشتی مرتبه اول (AR(۱)) بر اساس مدل زیر می‌باشد:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + a_t, \quad (4)$$

که ϕ_1 ضریب خودهمبستگی بوده و فرض می‌شود که a_t مستقل از X_{t-1} است. واریانس مشاهدات نیز عبارت است از:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}. \quad (5)$$

در این مطالعه، لازم است که از نمونه در دسترس برای شاخص‌های قابلیت فرآیند، برآورد نقطه‌ای محاسبه شود. با محاسبه میانگین و انحراف معیار نمونه از روابط:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (6)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}, \quad (7)$$

و سپس با جاگذاری $\mu = \bar{x}$ و $\sigma = S$ در روابط (۱)، (۲) و (۳) مقادیر تخمین نقطه‌ای از این شاخص‌ها به دست می‌آید (در حضور خودهمبستگی از نوع AR(۱) برای محاسبه مقدار واقعی شاخص قابلیت فرآیند باید واریانس مشاهدات طبق رابطه (۵) محاسبه شود).

شور [۱۳] اثرات مختلف نادیده گرفتن خود همبستگی در برآورد میانگین و انحراف استاندارد فرآیند را مورد بررسی قرار داد. اما، نخستین روابط تقریبی که برای برآورد فاصله‌ای شاخص‌های قابلیت فرآیند و با فرض حصول داده‌هایی از فرآیندهای ایستای گوسی توسعه یافت را می‌توان در [۱۴] مشاهده نمود. پس از آن،

مطالعات دیگری نیز در این زمینه به انجام رسیده است ([۱۵]، [۱۶] و [۱۷]). برای مطالعه بیشتر در مورد شاخص‌های قابلیت فرآیند و سایر تحقیقات مرتبط با آن به [۱۸] مراجعه شود.

در تمامی مطالعات صورت گرفته شده توزیع احتمالی شاخص‌های قابلیت فرآیند، بعنوان اساس محاسبه فاصله اطمینان، ناشناخته مانده است. بوت‌استرپ روشی مبتنی بر استفاده از رایانه در استنباط آماری است که بدون نیاز به فرض‌های غیرواقعی و روابط غیر قابل اثبات خاصی می‌تواند با استفاده از داده‌های واقعی و الگوریتم‌های کامپیوتری فهم مستقیمی از واریانس و فاصله اطمینان در اختیار کاربر قرار دهد [۱۹]. قابلیت استفاده از بوت‌استرپ هم بصورت پارامتری (با توزیع مشخص) و هم بصورت ناپارامتری (با توزیع نامشخص) از نقاط قوت این روش بشمار می‌رود. دو مزیت اصلی رویه بوت‌استرپ بر روشهای سنتی آماری عبارتند از:

(۱) سادگی بوت‌استرپ و امکان استنباط بدون در نظر گرفتن مفروضات قوی برای توزیع

(۲) استوار بودن بوت‌استرپ نسبت به روش‌های کلاسیک آماری تاکنون، این تکنیک برای گستره وسیعی از مسائل از جمله ایجاد فواصل اطمینان توسعه یافته است؛ و در همین زمینه روشهای مختلفی ارائه شده است [۲۰]. فرانکلین و واسرمن [۲۱] اولین مطالعه در زمینه بررسی خواص فاصله اطمینان روشهای بوت‌استرپ برای C_{pk} را در حالت مشاهدات مستقل انجام دادند. سایر مطالعات مشابه را می‌توان در [۲۲] و [۲۳] جستجو کرد.

هدف این مطالعه معطوف به ایجاد برآوردهای فاصله‌ای از شاخص‌های قابلیت فرآیند، با توزیع نامعلوم، در حضور خودهمبستگی میان داده‌هاست؛ و در این راستا، استفاده از روش‌های ناپارامتری بوت‌استرپ، راه حلی نوین است که با کمک آن می‌توان به هدف مذکور دست یافت. اخیراً، جعفریان و همکاران [۲۴] برآوردهای فاصله‌ای برای شاخص‌های C_p ، C_{pk} و C_{pm} داده‌های حاصل از فرآیند خودهمبسته AR(۱) را با روش بوت‌استرپ معمولی ارائه کرده‌اند. نتایج آنها نشان داد که بوت‌استرپ استاندارد عملکرد بهتری دارد. با وجود کاربرد گسترده، بوت‌استرپ معمولی ممکن است در مواجهه با داده‌های خودهمبسته عملکرد مناسبی نداشته باشد. در این مقاله علاوه بر بررسی بیشتر روش بوت‌استرپ معمولی، استفاده از روش بوت‌استرپ بلوکی حلقوی نیز توسعه داده می‌شود.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم روش بوت‌استرپ معمولی توضیح داده می‌شود. معرفی روش بوت‌استرپ بلوکی در بخش سوم صورت می‌گیرد. نحوه ساختن فواصل اطمینان به روش بوت‌استرپ برای این شاخص‌ها در بخش چهارم ارائه می‌شوند. سپس در بخش پنجم با استفاده از

بوت‌استرپ مناسب ۱۰۰۰ می‌باشد. البته با توجه اهمیت نتایج، قابلیت محاسباتی رایانه و محدودیت زمان می‌توان بر این تعداد افزود [۲۳].

با وجود کاربرد گسترده، بوت‌استرپ معمولی ممکن است در مواجهه با داده‌های خودهمبسته عملکرد مناسبی نداشته باشد. بنابراین در ادامه، سعی بر اینست تا راهکار مناسبی برای این مورد پیشنهاد شود.

۳. روش بوت‌استرپ بلوکی

در بکارگیری روش بوت‌استرپ برای مشاهدات ایستا، بایستی ترتیب زمانی مشاهدات تا حدی حفظ شود. این راهکار، اساس روش‌های بوت‌استرپ بلوکی را تشکیل می‌دهد. فرآیند بلوک‌بندی با تقسیم مجموعه داده‌های اولیه به بلوک‌هایی با طول (های) مشخص شروع، و در ادامه، نمونه‌گیری بلوکی به جای مشاهدات انفرادی انجام می‌شود. ایده اصلی بلوک‌بندی نیز بر این فرض استوار است که بلوک‌ها مستقل و هم‌توزیع هستند. لاهییری [۲۵] رفتار مجانبی روش‌های بوت‌استرپ بلوکی متداول را بر مبنای طول بلوک تصادفی و غیر تصادفی مورد مقایسه قرار داد. در نهایت چنین نتیجه‌گیری شد که استفاده از بلوک‌های همپوش بر بلوک‌های ناهمپوش ارجح‌تر است، و طول بلوک غیرتصادفی معمولاً میانگین مربع خطای کمتری نسبت به بلوک تصادفی دارد. بنابراین، لاهییری بیان کرد که روشهای بوت‌استرپ بلوکی متحرک^۴ (MBB) و بوت‌استرپ بلوکی حلقوی^۵ (CBB) از لحاظ میانگین مربع خطا تقریباً معادلند. بلوک‌هایی به طول l ($l = 1, \dots, n$) در نظر می‌گیریم. با ایجاد تعداد $(n - l + 1)$ بلوک همپوش طبق روش MBB، برای بلوک i ام با فرض $1 \leq i \leq n - l + 1$ داریم:

$$B_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i+l-1}) \quad (8)$$

از داده‌های مورد مطالعه برای تشکیل l بلوک با طول l بصورت $B = (B_1, \dots, B_k)$ استفاده می‌شود که در روش همپوش $k = n - l + 1$ است. به طور کلی، نمونه بوت‌استرپ بلوکی به صورت $(B_1^*, \dots, B_k^*)$ با انجام بازنمونه‌گیری تصادفی و با جاگذاری از بلوک‌ها بدست می‌آید. اگر $B_i^* = (x_{i1}^*, x_{i2}^*, \dots, x_{i+l-1}^*)$ نشان‌دهنده نمونه بوت‌استرپ بلوکی i ام باشد با کنار هم قرار دادن کل بلوک‌های بوت‌استرپی داریم:

$$X^* = (x_{11}^*, \dots, x_{1l}^*, x_{21}^*, \dots, x_{2l}^*, \dots, x_{k1}^*, \dots, x_{kl}^*) \quad (9)$$

که یک سری زمانی بوت‌استرپ به طول n می‌باشد. بر اساس کل این نمونه جدید متشکل از k بلوک مستقل، آماره مورد نظر محاسبه می‌شود. اما در روش MBB، چند مشاهده اولی

مطالعات، شبیه سازی عملکرد این فواصل اطمینان پیشنهادی، و مقایسه نتایج روش‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک مثال موردی نیز برای تایید عملکرد روش‌های ارائه فاصله اطمینان در بخش ششم ارزیابی می‌شود. در بخش انتهایی نتیجه گیری ارائه خواهد شد.

۲ روش بوت‌استرپ معمولی^۱ (OB)

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ نمونه‌ای تصادفی به اندازه n باشد، یک نمونه بوت‌استرپ معادل نمونه‌های تکراری برداشته شده (با جاگذاری) به اندازه n از داده‌های اولیه بصورت $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ می‌باشد. اگر C را نماد عمومی شاخص قابلیت فرآیند در نظر بگیریم بر اساس نمونه بوت‌استرپی می‌توان آماره بوت‌استرپی $\hat{C}^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ را محاسبه نمود. با انجام این فرآیند نمونه‌گیری به دفعات مشخص B ، می‌توان B مقدار $\hat{C}^*$ را محاسبه کرد که هر کدام برآوردی برای $\hat{C}$ محسوب می‌شود و کل مجموعه، توزیع بوت‌استرپ برای $\hat{C}$ را تشکیل می‌دهد. پس، می‌توان تقریبی از تابع توزیع جمعی نامعلوم $F_{\hat{C}}$ را بوسیله تابع توزیع تجمعی تجربی $\hat{F}_{\hat{C}^*}$ ارائه کرد [۲۳]. گام‌های الگوریتم بوت‌استرپ معمولی عبارتند از:

- (۱) جمع‌آوری داده‌های اولیه $x_1, x_2, \dots, x_n$
 - (۲) نمونه‌گیری بوت‌استرپی $x_1^*, \dots, x_n^*$ بصورت تصادفی و با جاگذاری از داده‌های اولیه.
 - (۳) محاسبه $\hat{C}^* = \hat{C}(x_1^*, \dots, x_n^*)$
 - (۴) تکرار مراحل ۲ و ۳ به تعداد B بار برای بدست آوردن $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{C}_B^*$
 - (۵) ارائه برآوردها و محاسبه فاصله اطمینان مورد نظر.
- توزیع‌های بوت‌استرپی فقط بر اساس نمونه‌های تصادفی از توزیع کامل بوت‌استرپ محاسبه می‌شوند. بنابراین، ممکن است بعلا خطاهای نمونه‌گیری، توزیعی اریب برای شاخص حاصل شود. خطای تکنیک بوت‌استرپ که همان اختلاف بین توزیع واقعی و تخمینی می‌باشد، از دو نوع خطای مستقل به صورت زیر تشکیل شده است:
- خطای آماری^۲؛ به تعداد و صحت داده‌های اولیه بستگی دارد،
 - خطای شبیه‌سازی^۳؛ که با افزایش زیرگروه‌های بوت‌استرپ (B) کاهش می‌یابد [۲۰].

بطور کلی، n^n حالت ممکن برای بازنمونه‌گیری (B) وجود دارد. اما، بعلا حجم بالای محاسبات حتی برای نمونه‌های کوچک در عمل، فقط نمونه‌های تصادفی از کل حالات ممکن گرفته می‌شود. با اینکه در بیشتر موارد ۲۰۰ بار بازنمونه‌گیری کفایت می‌کند، اما، برای ارائه برآورد دقیقی از فاصله اطمینان حداقل بازنمونه‌گیری

$(x_1, \dots, x_{l-1})$ و آخری $(x_{n-l+1}, \dots, x_n)$ شانس کمتری نسبت به سایر مشاهدات برای ظاهر شدن در بلوکها و نمونه بوت‌استرپ دارند. بنابراین در انجام برآورد، اربیی تصادفی معناداری وجود خواهد داشت.

یک روش ساده برای داشتن توزیع بوت‌استرپی ناریب، قرار دادن مقادیر x_i ها پیرامون یک دایره می‌باشد $(x_i \equiv x_{i+n})$ (به ازای $i > n$)، $i_n \equiv x_n$ یا $x_i \equiv x_{i-n}$ با فرض $n, i_n = i \pmod{n}$ ، و $n+1 \leq i \leq n+l+1$. در این روش، بلوک‌هایی به طول l (در قالب هر عدد صحیح) از تمامی کمانهای مشاهدات اطراف دایره بصورت B_i به ازای $1 \leq i \leq n$ مفروض است. از این مجموعه بلوک‌ها به تعداد k بلوک $k = n/l$ عدد صحیح و مثبت تصادفی انتخاب می‌شود. سپس از به هم پیوستن k بلوک $(B_1^*, \dots, B_k^*)$ ، نمونه بوت‌استرپ $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ به روش CBB شکل می‌گیرد [۲۶]. الگوریتم پیشنهادی بازنمونه‌گیری به روش CBB برای ایجاد فواصل اطمینان شاخص‌های قابلیت فرآیند در گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

- (۱) جمع‌آوری داده‌های اولیه $x_1, x_2, \dots, x_n$
- (۲) تقسیم داده‌های اولیه به n بلوک همپوش با طول l ؛ که اولین بلوک $(x_1, \dots, x_l)$ ، دومین بلوک $(x_{l+1}, \dots, x_{2l})$ ، ... و آخرین بلوک $(x_{n-l+1}, \dots, x_n)$ می‌باشد.
- (۳) انتخاب تصادفی و باجگذاری k بلوک (با احتمال $1/n$)، و قرار دادن آنها به دنبال هم برای تشکیل $(x_1^*, \dots, x_n^*)$.
- (۴) محاسبه $\hat{C}^* = \hat{C}(x_1^*, \dots, x_n^*)$.
- (۵) تکرار مراحل ۳ و ۴ به تعداد B بار برای بدست آوردن $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{C}_B^*$.
- (۶) ارائه برآوردها و محاسبه فاصله اطمینان مورد نظر.

۴. برآورد فاصله‌ای شاخص‌های قابلیت فرآیندهای خودهمبسته به روش بوت‌استرپ

با توجه به الگوریتم‌های ارائه اشاره شده در بخش‌های قبل می‌توان با انتخاب نوع فاصله اطمینان مشخص برای شاخص قابلیت فرآیند مورد نظر، برآورد فاصله‌ای از آن ارائه کرد. برای بحث بیشتر در مورد روشهای مختلف ایجاد فاصله اطمینان می‌توان به [۲۷] رجوع کرد. در این بخش، با دو روش مختلف نحوه ساختن فاصله اطمینان بوت‌استرپی دوطرفه $100(1-2\alpha)$ درصد برای شاخص‌های قابلیت فرآیند بصورت گام به گام توضیح داده می‌شود.

۴-۱. بوت استرپ استاندارد^۱ (SB)

در این روش فرض بر اینست که $\hat{C}$ از توزیع نرمال پیروی می‌کند. در تمامی مراحل فرض می‌کنیم $\hat{C}^*(i)$ نشان‌دهنده

i امین برآورد مرتب شده بر اساس تعداد B بوت‌استرپ محاسبه شده باشد که برآوردی برای $C^*(i)$ محسوب می‌شود. گام‌های الگوریتم ایجاد فاصله اطمینان دوطرفه $100(1-2\alpha)$ درصد به روش SB عبارتند از:

- (۱) محاسبه میانگین و انحراف استاندارد برآوردهای بوت‌استرپی از روابط زیر پس از بدست آوردن $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{C}_B^*$:

$$\hat{C}^* = \frac{\sum_{i=1}^B \hat{C}^*(i)}{B}, \quad (10)$$

$$\hat{S}_C^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^B (\hat{C}^*(i) - \hat{C}^*)^2}{B-1}} \quad (11)$$

- (۲) با برآورد $\hat{C}$ از داده‌های اولیه، فاصله اطمینان SB بصورت زیر محاسبه می‌شود Z_α چارک α بالایی توزیع نرمال استاندارد است؛ و $\hat{C}$ از داده‌های اولیه برآورد شده است):

$$\hat{C} \pm Z_\alpha \hat{S}_C^*. \quad (12)$$

۴-۲. بوت استرپ صدکی با اربیی اصلاح و تسریع شده^۲ (BCa)

به منظور بهبود سرعت همگرایی بوت‌استرپ صدکی روشی توسعه یافت که فاصله صدکی را با تصحیح اربیی و واریانس غیر ثابت تعدیل می‌کند. ساختن این نوع فاصله بستگی به برآورد دو عامل اصلاح اربیی Z_0 و تسریع a دارد. گام‌های الگوریتم ایجاد فاصله اطمینان $100(1-2\alpha)$ درصد به روش BCa بصورت زیر بیان می‌شود:

- (۱) پس از بدست آوردن $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{C}_B^*$ ، مجموعه مرتب شده $\hat{C}^*(i)$ تشکیل می‌شود.

- (۲) بر اساس مقادیر مرتب شده توزیع C^* و برآورد $\hat{C}$ از داده‌های اولیه، احتمال $P_0 = P_r(\hat{C}^* \leq \hat{C})$ و میانه اربیی $\hat{C}^*$ بصورت

$$Z_0 = \Phi^{-1}(P_0)$$
 محاسبه می‌شود.

- (۳) محاسبه عامل تسریع $\hat{C}_T(i)$ برآورد معمولی C است که از نمونه اولیه پس از حذف نقطه i ام محاسبه می‌شود):

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{C}_{(-)} - \hat{C}_{(i)})^2}{\left(\sum_{i=1}^n (\hat{C}_{(-)} - \hat{C}_{(i)})^2 \right)^{3/2}}, \quad (13)$$

$$\hat{C}_{(-)} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{C}_{(i)}}{n} \quad (14)$$

- (۴) تعیین ضریب اطمینان صدک‌های بالا و پایین:

برای حصول اطمینان ۰/۹۹، یک فاصله اطمینان ۰/۹۵ واقعی باید درصد پوششی حداقل بین بازه فوق داشته باشد. پس از محاسبه ACP در هر حالت و مقایسه با محدوده قابل قبول، می‌توان تعداد دفعاتی از کل حالتها که مقدار ACP مناسب بدست می‌آید را جمع کرد و این نتایج را با معیار FTA نشان داد.^{۱۰} با توجه به مطالب فوق، نتایج حاصل از روشهای مختلف در بخشهای ذیل بررسی شده است (میانگین ACP و AIL و تعداد FTA از جداول کلی به ازای همه ۱۲ نتیجه ممکن برای هر ϕ یکسان و ترکیبات مختلف μ ، σ و n محاسبه، و بدلیل تاثیر کم μ و σ در نتایج جداول کامل، تنها خلاصه این موارد ارائه شده است).

جدول ۱. مقادیر شاخص‌های قابلیت فرآیند به کار رفته در

مطالعه شبیه‌سازی		$ \phi $			
	(μ, σ)	۰/۰۰	۰/۲۵	۰/۷۵	
C_p	(۵۰، ۲)	۱/۷۵	۱/۶۹	۱/۱۶	
	(۵۲، ۲)	۱/۷۵	۱/۶۹	۱/۱۶	
	(۵۰، ۳)	۱/۱۷	۱/۱۳	۰/۷۷	
	(۵۲، ۳)	۱/۱۷	۱/۱۳	۰/۷۷	
C_{pk}	(۵۰، ۲)	۱/۶۷	۱/۶۲	۱/۱۰	
	(۵۲، ۲)	۱/۵۰	۱/۴۵	۰/۹۹	
	(۵۰، ۳)	۱/۱۱	۱/۰۷	۰/۷۳	
	(۵۲، ۳)	۱/۰۰	۰/۹۷	۰/۶۶	
C_{pm}	(۵۰، ۲)	۱/۵۷	۱/۵۳	۱/۱۰	
	(۵۲، ۲)	۰/۹۷	۰/۹۶	۰/۸۲	
	(۵۰، ۳)	۱/۱۱	۱/۰۸	۰/۷۵	
	(۵۲، ۳)	۰/۸۳	۰/۸۱	۰/۶۴	

۱-۵. بررسی نتایج روش OB

نتایج کلی با توجه به مفروضات مسئله شبیه‌سازی در همان چارچوب مرجع [۲۴] بدست آمده است. در آنجا با مقایسه سه روش مختلف برآورد فاصله اطمینان بوت‌استرپی با اندازه نمونه کوچک نتایجی حاصل شده بود که عملکرد روش SB را تایید می‌کرد. در این مطالعه علاوه بر بررسی نتایج با اندازه نمونه بزرگ، روش BCa نیز در مقایسات وارد شد که نتایج حاصل در جدول ۲ برای C_p ، C_{pk} و C_{pm} نشان داده شده است. بر اساس بررسی‌های صورت گرفته، می‌توان نتایج زیر را برای مطالعات شبیه‌سازی این بخش برشمرد:

- بطور کلی در حالت مستقل و تا حدودی برای حالت با همبستگی کم روش SB از عملکرد مناسب‌تری برای ارائه فواصل اطمینان شاخص‌های قابلیت فرآیند نسبت به روش BCa برخوردار است. بعنوان مثال برای شاخص C_{pk} با اندازه

$$P_{AU} = \Phi \left(Z_0 + \frac{Z_0 + Z_\alpha}{1 - \hat{\alpha}(Z_0 + Z_\alpha)} \right), \quad (15)$$

$$P_{AL} = \Phi \left(Z_0 + \frac{Z_0 - Z_\alpha}{1 - \hat{\alpha}(Z_0 - Z_\alpha)} \right). \quad (16)$$

(۵) محاسبه فاصله اطمینان BCa:

$$[\hat{C}^*(P_{ALB}), \hat{C}^*(P_{AUB})] \quad (4)$$

۵. مطالعات شبیه‌سازی

تعیین احتمال برآورده شدن نیازهای قابلیت فرآیند بر اساس برآورد فاصله اطمینان ۰/۹۵ برای شاخص‌های قابلیت فرآیند خودهمبسته AR(۱) به روش بوت‌استرپ از طریق مطالعه شبیه‌سازی انجام گرفت. در این مطالعه، با اجرای شبیه‌سازی مونت کارلو توسط نرم‌افزار Matlab، فواصل اطمینان برای تعداد زیادی از مجموعه داده‌های شبیه‌سازی شده بر اساس دو معیار مورد ارزیابی قرار گرفتند:

- متوسط درصد پوشش^۸ (ACP)-نسبت دفعاتی که فاصله اطمینان حاصل از هر بار شبیه‌سازی مقدار واقعی را شامل می‌شود.
- متوسط طول فاصله^۹ (AIL)-اندازه‌گیری میانگین پهنای (تفاضل حد پایین از حد بالا) فواصل اطمینان.

با فرض اینکه فرآیند تحت کنترل آماری است مقادیر شاخص‌های قابلیت فرآیند C_p ، C_{pk} و C_{pm} (در محدوده خوب تا ضعیف) برای استفاده در این مطالعه با توجه به حدود مشخصات قابل قبول $USL=61$ و $LSL=40$ مقدار هدف $T=49$ و همچنین ترکیبات مختلف μ و σ در جدول ۱ محاسبه شدند. برای هر اندازه نمونه کوچک $n=20, 40, 70$ و بزرگ $n=200, 400, 600$ از فرآیند ایستای AR(۱) با سطوح مختلف همبستگی و ترکیبات مختلف μ و σ به تعداد $B=1000$ نمونه بوت‌استرپی از نمونه اولیه برداشته شد تا امکان برآورد فواصل اطمینان ۰/۹۵ برای شاخص‌های قابلیت مذکور از روش‌های SB و BCa میسر شود. سپس، این شبیه‌سازی به تعداد $N=1000$ بار دیگر تکرار شد تا ACP و AIL مشخص شود.

با توجه به مقدار مورد انتظار ۰/۹۵، دفعات پوشش فواصل اطمینان حاصل از کل شبیه‌سازی انجام شده برای هر حالت، یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $P=0/95$ و $N=1000$ می‌باشد. پس، یک فاصله اطمینان ۰/۹۹ برای دفعات پوشش عبارت است از:

$$0/95 \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{(0/95)(0/05)}{1000}} = [0/932, 0/968], \quad (18)$$

- نتایج FTA نامناسبی در سطح خودهمبستگی بالا، چه در طرف مثبت و چه در طرف منفی آن، حاصل می‌شود.
- افزایش مقادیر انحراف استاندارد، پارامتر خودهمبستگی و اندازه نمونه روندی کاهشی را برای AIL نشان می‌دهد. اما، تاثیر میانگین برای شاخص‌های قابلیت فرآیند مختلف تغییرات متفاوتی را در AIL به همراه دارد.
- اختلاف مقادیر AIL بستگی به نوع شاخص قابلیت فرآیند، و نقش میانگین در محاسبات آن، دارد و روشهای مختلف بوت/استرپ، بعلاوه داشتن نتایج مشابه، تفاوت چندانی با هم ندارند.

۲-۵. بررسی نتایج روش CBB

- با توجه به مسئله مفروض و ارائه راهکاری مناسب‌تر برای مشاهدات خودهمبسته، نتایج حاصل از شبیه‌سازی به روش CBB در جدول ۳ گردآوری شد. با تحلیل این نتایج، می‌توان موارد زیر را بیان کرد:
- همانند آنچه که در بررسی نتایج OB عنوان شد روش SB اغلب عملکرد مناسب‌تری برای ارائه فواصل اطمینان شاخص‌های قابلیت فرآیند نسبت به روش BCa برخوردار است.

- نمونه کوچک و سطح همبستگی $\phi = -0.25$ ، فاصله اطمینان ارائه شده به روش SB در ۵ مورد از کل ۱۲ مورد شاخص قابلیت فرآیند را در بر گرفت در حالیکه طبق روش BCa نتیجه‌ای حاصل نشد. دلیل این امر را می‌توان چنین تفسیر کرد که چون در روش بوت/استرپ نمونه‌گیری بصورت تصادفی انجام می‌شود پس در اندازه نمونه کم با توجه به ارائه فواصل صدکی به روش BCa امکان آریبی در برآورد وجود دارد در حالیکه در روش SB فواصل همواره متقارن است. با افزایش قابل ملاحظه اندازه نمونه چون خطای آماری در انجام برآورد کاهش می‌یابد نتایج هر دو روش SB و BCa ضمن بهبود، به یکدیگر نزدیکتر می‌شود. بنابراین، روش SB مناسب‌تر به نظر می‌رسد.
- با افزایش اندازه پارامتر خودهمبستگی، به تدریج از میزان متوسط درصد پوشش کاسته می‌شود.
- تغییرات اندازه نمونه بصورت افزایشی غالباً افزایش ACP را به همراه دارد که دلیلی بر کاهش خطای آماری است. البته بتدریج، با افزایش اندازه نمونه، از روند افزایشی ACP کاسته می‌شود.
- تغییرات مقادیر میانگین و انحراف استاندارد نشان‌دهنده تاثیر نسبتاً کم برای نتایج ACP می‌باشد.

جدول ۲. مقایسه عملکرد برآوردکننده‌های فاصله‌ای شاخص‌های قابلیت فرآیند به روش OB (فاصله اطمینان ۹۵٪)

		شاخص C_p														
		ϕ			-۰/۷۵			-۰/۲۵			۰/۰۰			۰/۲۵		
n	روش	AC	FT	AI	AC	FT	AI	AC	FT	AI	AC	FT	AI	AC	FT	AI
۳۰	SB	۷۳	۰	۴۸	۹۲	۲	۷۲	۹۴	۱۲	۷۵	۹۳	۶	۷۳	۷۴	۰	۵۵
۳۰	BCa	۶۵	۰	۴۲	۹۰	۰	۶۲	۹۲	۳	۶۵	۹۰	۰	۶۳	۶۱	۰	۴۷
۷۰	SB	۶۹	۰	۱۴	۹۳	۷	۲۱	۹۵	۱۲	۲۲	۹۳	۷	۲۱	۷۰	۰	۱۵
۷۰	BCa	۷۰	۰	۱۴	۹۳	۴	۲۱	۹۴	۱۱	۲۲	۹۳	۲	۲۱	۶۸	۰	۱۴
		شاخص C_{pk}														
۳۰	SB	۷۹	۰	۴۷	۹۳	۵	۶۸	۹۴	۱۱	۷۰	۹۲	۱	۶۸	۷۲	۰	۵۱
۳۰	BCa	۷۳	۰	۴۴	۹۱	۰	۶۱	۹۲	۳	۶۳	۸۹	۰	۶۱	۶۵	۰	۴۶
۷۰	SB	۷۶	۰	۱۵	۹۴	۹	۲۰	۹۵	۱۲	۲۱	۹۲	۲	۲۰	۶۶	۰	۱۵
۷۰	BCa	۷۶	۰	۱۵	۹۴	۸	۲۰	۹۴	۱۱	۲۱	۹۱	۰	۲۰	۶۵	۰	۱۵
		شاخص C_{pm}														
۳۰	SB	۸۲	۰	۳۷	۹۵	۹	۴۷	۹۴	۹	۴۸	۸۹	۰	۴۸	۶۴	۰	۳۸
۳۰	BCa	۷۸	۰	۳۵	۹۴	۷	۴۵	۹۳	۴	۴۵	۸۷	۰	۴۴	۵۹	۰	۳۶
۷۰	SB	۸۰	۰	۱۲	۹۶	۱۱	۱۵	۹۵	۱۱	۱۵	۹۰	۱	۱۵	۶۳	۰	۱۲
۷۰	BCa	۸۰	۰	۱۲	۹۶	۱۱	۱۵	۹۵	۱۱	۱۵	۹۰	۰	۱۵	۶۲	۰	۱۲

جدول ۳. مقایسه عملکرد برآوردکننده‌های فاصله‌ای شاخص‌های قابلیت فرآیند به روش CBB (فاصله اطمینان ۹۵٪)

		شاخص C_p														
		ϕ			-۰/۷۵			-۰/۲۵			۰/۰۰			۰/۲۵		
n	روش	AC	FT	AI	AC	FT	AI	AC	FT	AI	AC	FT	AI	AC	FT	AI

۱)	SB	۷۹	۰	۶۱	۹۱	۰	۶۸	۹۳	۵	۷۲	۹۳	۶	۷۳	۸۳	۰	۷۷
۲)	BCa	۷۴	۰	۵۵	۸۷	۰	۶۰	۸۹	۰	۶۳	۸۸	۰	۶۲	۶۷	۰	۵۶
۳)	SB	۹۰	۰	۲۴	۹۴	۱۰	۲۲	۹۵	۱۲	۲۲	۹۴	۱۲	۲۲	۹۰	۰	۲۵
۴)	BCa	۹۰	۱	۲۳	۹۴	۹	۲۲	۹۵	۱۲	۲۲	۹۴	۱۰	۲۲	۸۹	۰	۲۳
شاخص C_{pk}																
۱)	SB	۸۴	۰	۶۵	۹۴	۶	۷۴	۹۵	۹	۷۸	۹۵	۸	۸۱	۸۹	۰	۸۹
۲)	BCa	۷۵	۰	۵۱	۸۸	۰	۵۸	۹۰	۰	۶۰	۸۸	۰	۶۰	۷۴	۰	۵۸
۳)	SB	۹۰	۰	۲۲	۹۴	۱۱	۲۱	۹۵	۱۲	۲۱	۹۴	۱۱	۲۲	۹۰	۰	۲۶
۴)	BCa	۸۹	۰	۲۱	۹۳	۶	۲۰	۹۴	۱۰	۲۱	۹۳	۷	۲۱	۸۹	۰	۲۶
شاخص C_{pm}																
۱)	SB	۷۹	۰	۳۹	۹۱	۰	۴۲	۹۲	۷	۴۶	۸۹	۰	۴۹	۷۸	۰	۵۴
۲)	BCa	۷۶	۰	۳۶	۸۹	۰	۳۹	۹۰	۳	۴۳	۸۷	۰	۴۵	۷۲	۰	۴۹
۳)	SB	۹۰	۰	۱۶	۹۴	۱۱	۱۴	۹۵	۱۱	۱۵	۹۳	۹	۱۷	۹۰	۰	۲۲
۴)	BCa	۸۹	۰	۱۶	۹۵	۱۲	۱۴	۹۴	۱۲	۱۵	۹۴	۹	۱۶	۹۰	۰	۲۲

که اگر خودهمبستگی نادیده گرفته شود نتایج حاصل در سطح خودهمبستگی ضعیف چندان تحت تاثیر قرار نمی‌گیرند. مطابق شکل ۱، برای اندازه نمونه کوچک و سطوح خودهمبستگی ضعیف‌تر، نتایج AIL تقریباً یکسانی برای هر دو روش بدست آمده است؛ در حالیکه، در سطح شدیدتر خودهمبستگی مقدار AIL برای OB کاهش یافته است. با افزایش اندازه نمونه مطابق شکل ۱، د. مشاهده می‌شود که نتایج AIL نسبت به حالت اندازه نمونه کوچک کاهش چشمگیری یافته است. با توجه به مطالب فوق می‌توان گفت که دسترسی به حجم قابل ملاحظه‌ای از داده‌ها منجر به حصول ACP نزدیک به سطح اطمینان اسمی و AIL کوچکتر با دقت بیشتر می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌شود همین نتایج برای شاخص‌های C_{pk} و C_{pm} مطابق شکل ۱ صدق می‌کند.

۶. مثال موردی

در این بخش، ۱۰۰ مشاهده مربوط به غلظت یک مایع شیمیایی که هر ۳۰ دقیقه اندازه‌گیری شده است بعنوان مثال موردی در نظر گرفته شد [۱۱]. با فرض حدود مشخصات قابل قبول $27/9 \pm 2.0$ ، برابری میانگین داده‌ها با مقدار هدف و مقدار ۶/۲ برای انحراف استاندارد، هدف بررسی این موضوع بود که آیا فاصله اطمینان ۹۵٪ مقدار واقعی شاخص‌های قابلیت فرآیند $C_{pm}=C_{pk}=C_p=1/5$ را در بر می‌گیرد یا نه. ارائه فاصله اطمینان توسط نرم‌افزار Matlab و تحلیل آماری نتایج توسط نرم‌افزار Minitab انجام گرفت. برای این مثال موردی، بدلیل توزیع نامعلوم شاخص‌های مذکور در حضور خودهمبستگی میان داده‌ها استفاده از روش ناپارامتری بوت‌استرپ پیشنهاد شده است. مزیت دیگر این روش در عدم نیاز به تشخیص الگوی خودهمبستگی میان مشاهدات نهفته است، اما، روش‌های تقریبی که در بخش ۱ مرور شدند غالباً بر تشخیص الگوی خودهمبسته مبتنی هستند.

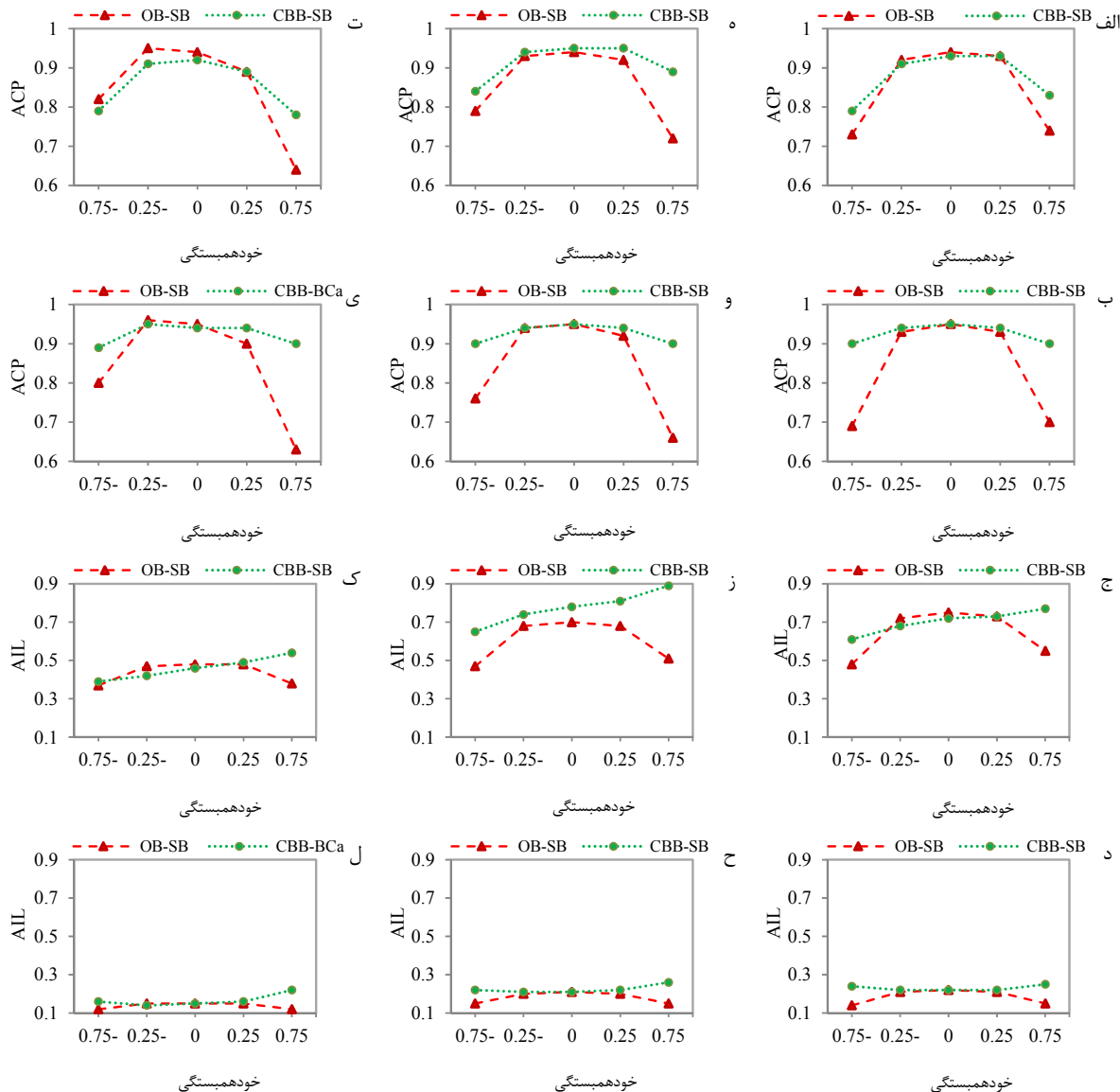
- با افزایش اندازه پارامتر خودهمبستگی، به تدریج از میزان متوسط درصد پوشش کاسته می‌شود.
- نتایج FTA در طرف منفی و مثبت سطح معادلی از پارامتر خودهمبستگی تفاوت چندانی ندارد.
- به دلیل کاهش خطای آماری با افزایش اندازه نمونه غالباً مقادیر ACP به سطح اطمینان اسمی نزدیک‌تر می‌شود.
- تغییرات مقادیر میانگین و انحراف استاندارد نشان دهنده تاثیر ناچیزی برای نتایج ACP می‌باشد.
- افزایش مقادیر انحراف استاندارد و اندازه نمونه و کاهش $|\phi|$ روندی کاهشی را برای AIL نشان می‌دهد. اما، تاثیر میانگین برای شاخص‌های مختلف تغییرات متفاوتی را در AIL به همراه دارد.
- اختلاف در مورد مقادیر AIL بستگی به نوع شاخص قابلیت فرآیند دارد و روش‌های مختلف بوت‌استرپ از این لحاظ تفاوت چندانی با هم ندارند.

۵-۳. مقایسه نتایج روش‌های OB و CBB

در این بخش، مقایسه مناسب‌ترین نتایج دو بخش قبلی بر اساس معیارهای ACP و AIL و سطوح مختلف خودهمبستگی برای شاخص‌های قابلیت فرآیند در شکل ۱ نمایش داده شده است. با مشاهده شکل ۱، الف واضح است که در هر دو روش با شدت یافتن سطح خودهمبستگی همواره مقادیر ACP از مقدار اسمی سطح اطمینان دورتر می‌شوند. با افزایش اندازه نمونه مطابق شکل ۱، ب. عملکرد OB آن هم در سطح بالای خودهمبستگی بدتر می‌شود؛ اما، نتایج CBB بهبود می‌یابد. در واقع با افزایش اندازه نمونه، دلیل عملکرد بهتر CBB در مقایسه با OB، که برای مشاهدات مستقل کاربرد دارد، در بلوک‌بندی نهفته است. بعبارت دیگر، در OB بلوک‌بندی صورت نمی‌گیرد (یعنی $l=1$) و همین باعث کاهش امکان تقلید الگوهای وابستگی میان داده‌های اصلی، و در نتیجه، کاهش ACP می‌شود. اما، مزیت روش OB در این است

طبق شکل ۵.۲ فرض توزیع نرمال برای باقیمانده‌های مدل $AR(1)$ برقرار است و توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی باقیمانده‌ها به ترتیب در شکل ۵.۲ و ۵.۳ امکان انطباق هر گونه ساختار خودهمبسته دیگری را از ذهن دور می‌سازد. بنابراین، کفایت مدل انطباقی $AR(1)$ با خودهمبستگی مثبت بر داده‌ها تأیید می‌شود. در نهایت، نمودارهای کنترل مقادیر انفرادی و میانگین متحرک باقیمانده‌ها به ترتیب در شکل ۵.۳ و ۵.۴ فرآیند را در شرایط تحت کنترل نشان می‌دهد.

در گام اول مطالعات مربوط به قابلیت هر فرآیندی باید از تحت کنترل بودن آن مطمئن شد. مشخص است که نمودار سری زمانی در شکل ۵.۲ حالت ایستا دارد و داده‌ها بدون هیچگونه تناوب و روندی حول مقدار هدف نوسان می‌کنند. بنابراین، از آنجاییکه تابع خودهمبستگی در شکل ۵.۲ ب. الگوی نمایی نزولی دارد و تابع خودهمبستگی جزئی در شکل ۵.۳ ج. فقط در اولین مقدارش معنادار است انطباق مدل $X_t = 0.7478 X_{t-1} + 0.4769 a_t$ بر داده‌ها منطقی بنظر می‌رسد جاییکه $\sigma_x = 6.277$ بدست می‌آید.



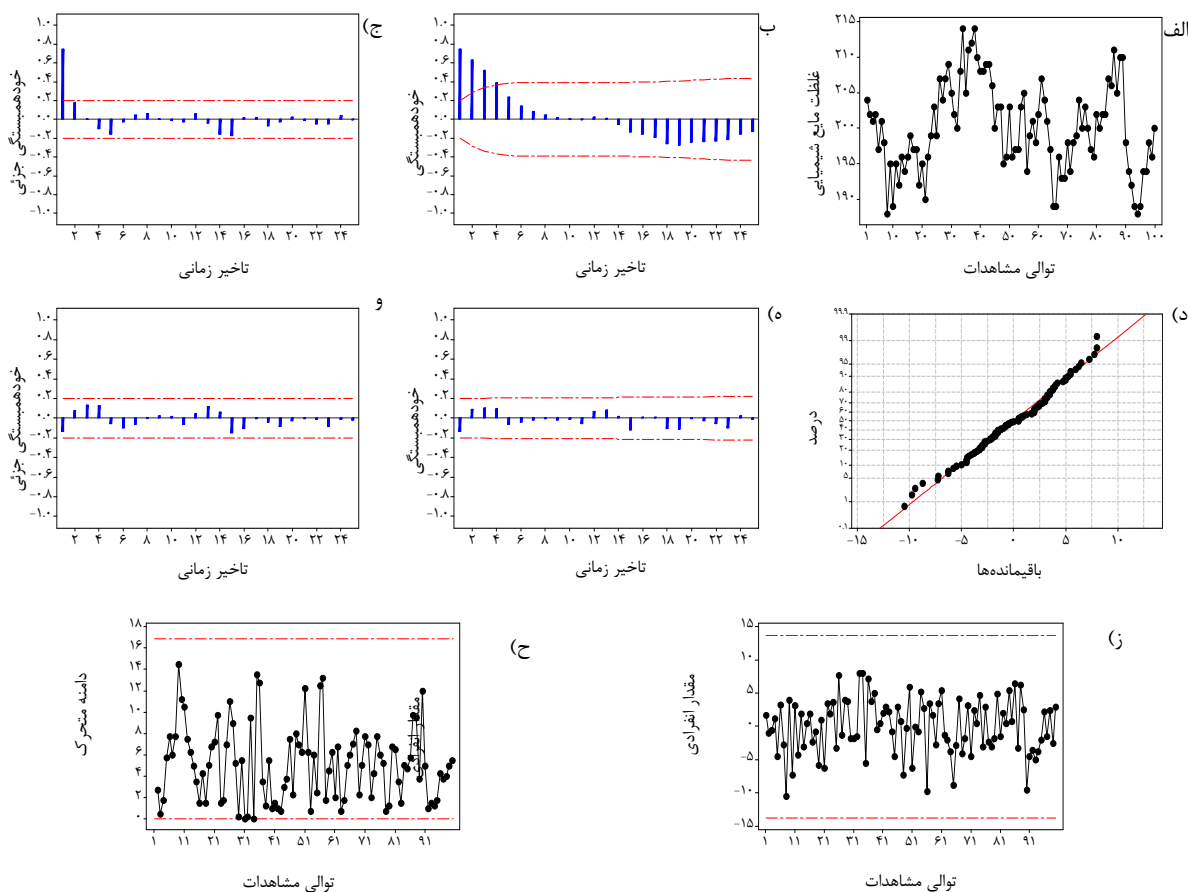
شکل ۱. مقایسه نتایج ACP و AIL روش‌های مختلف برای با سطوح متفاوت پارامتر خودهمبستگی: الف) شاخص C_p ، ACP و اندازه نمونه کوچک. ب) شاخص C_p ، ACP و اندازه نمونه بزرگ. ج) شاخص C_p ، AIL و اندازه نمونه کوچک. د) شاخص C_p ، AIL و اندازه نمونه بزرگ. ه) شاخص C_{pk} ، ACP و اندازه نمونه کوچک. و) شاخص C_{pk} ، ACP و اندازه نمونه بزرگ. ز) شاخص C_{pk} ، AIL و اندازه نمونه کوچک. ح) شاخص C_{pk} ، AIL و اندازه نمونه بزرگ. ت) شاخص C_{pm} ، ACP و اندازه نمونه کوچک. ی) شاخص C_{pm} ، ACP و اندازه نمونه بزرگ. ک) شاخص C_{pm} ، AIL و اندازه نمونه کوچک. ل) شاخص C_{pm} ، AIL و اندازه نمونه بزرگ

بدین طریق محاسبه شده است که در همه موارد مقادیر واقعی شاخص‌های قابلیت فرآیند را در بر می‌گیرند. علت این امر را می‌توان علاوه بر کاهش خطای شبیه‌سازی از طریق افزایش B، در کیفیت مناسب داده‌ها جستجو کرد جایکه کاهش خطای آماری را در پی دارد.

در ادامه، با توجه به قابلیت رایانه و محدود بودن شمار محاسبات، با افزایش B تعداد ۵۰۰۰ نمونه بوت‌استرپی از نمونه اولیه برداشته شد تا با کاهش خطای شبیه‌سازی، امکان برآورد دقیق‌تر فواصل اطمینان ۹۵٪ برای شاخص‌های قابلیت فرآیند میسر شود. بدلیل عملکرد مناسب روش SB، حدود فواصل اطمینان در جدول ۴

جدول ۴. فواصل اطمینان بوت‌استرپی SB برای شاخص‌های قابلیت فرآیند

	شاخص قابلیت فرآیند	بوت‌استرپ	حد پایین فاصله	حد بالای فاصله
C_p		OB	۱/۲۹	۱/۶۶
		CBB	۱/۱۵	۱/۸۳
C_{pk}		OB	۱/۳۲	۱/۶۸
		CBB	۱/۱۷	۱/۸۱
C_{pm}		OB	۱/۱۶	۱/۸۰
		CBB	۱/۱۸	۱/۸۰



شکل ۲. تحلیل ۱۰۰ مشاهده مربوط به غلظت یک مایع شیمیایی: (الف) نمودار سری زمانی مشاهدات؛ (ب) نمودار خودهمبستگی مشاهدات؛ (ج) نمودار خودهمبستگی جزئی مشاهدات (با سطح معنادار ۵٪)؛ (د) نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌ها؛ (ه) نمودار تابع خودهمبستگی باقیمانده‌ها (با سطح معنادار ۵٪)؛ (و) نمودار تابع خودهمبستگی جزئی باقیمانده‌ها (با سطح معنادار ۵٪)؛ (ز) نمودار کنترل مقادیر انفرادی باقیمانده‌ها؛ (ح) نمودار کنترل دامنه متحرک باقیمانده‌ها.

۷. نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای مطالعات آتی

هدف تحقیق حاضر معطوف به ایجاد برآورد فاصله‌ای شاخص‌های C_p ، C_{pk} و C_{pm} برای داده‌های خودهمبسته $AR(1)$ بود. بدلیل توزیع نامعلوم شاخص‌های مذکور در حضور خودهمبستگی میان داده‌ها استفاده از روش ناپارامتری بوت‌استرپ پیشنهاد شده است. بوت‌استرپ روشی مبتنی بر استفاده از رایانه در استنباط آماری است که بدون نیاز به فرض‌های غیرواقعی و روابط غیر قابل اثبات خاصی می‌تواند با استفاده از داده‌های واقعی و الگوریتم‌های کامپیوتری فهم مستقیمی از واریانس و فاصله اطمینان در اختیار کاربر قرار دهد. مزیت این روش نسبت به روش‌های تقریبی موجود در ادبیات که غالباً بر تشخیص الگوی خودهمبسته مبتنی هستند، در عدم نیاز به تشخیص چنین الگویی میان مشاهدات نهفته است. اخیراً، چنین مطالعه‌ای برای برآوردهای فاصله‌ای شاخص‌های مذکور با روش بوت‌استرپ معمولی ارائه شده است [۲۴]. با وجود کاربرد گسترده، بوت‌استرپ معمولی ممکن است در مواجهه با داده‌های خودهمبسته عملکرد مناسبی نداشته باشد. یعنی، در بکارگیری روش بوت‌استرپ برای مشاهدات ایستا، بایستی ترتیب زمانی مشاهدات تا حدی حفظ شود. این راهکار، اساس روش‌های بوت‌استرپ بلوکی را تشکیل می‌دهد. در این مقاله علاوه بر بررسی بیشتر روش بوت‌استرپ معمولی، استفاده از روش بوت‌استرپ بلوکی حلقوی نیز توسعه داده شد. با توجه به الگوریتم‌های ارائه شده در قالب دو روش OB و CBB از دو نوع برآوردکننده فاصله‌ای SB بر اساس فرض توزیع نرمال و BCa بر اساس ارائه فواصل صدکی استفاده شد.

انجام شبیه‌سازی با استفاده از مثالهای عددی و ارزیابی بر اساس معیارهای مختلف نشان داد که، بدون توجه به سطح همبستگی و روش بوت‌استرپ مفروض، حدود ۹۵٪ روش SB، با فواصل متقارنی بر مبنای توزیع نرمال، غالباً عملکرد بهتری دارد و با وجود اینکه در ارائه روش BCa تلاش بر اصلاح ارببی برآورد مورد نظر معطوف بوده اما در این مطالعه از عملکرد ضعیفتری برخوردار است. بررسی و تحلیل نتایج نشان داد که بطور کلی، از عوامل تاثیرگذار بر میزان متوسط درصد پوشش می‌توان به دو عامل مهم اشاره کرد. یکی پارامتر خودهمبستگی، که فاصله گرفتن آن از حالت مستقل منجر به کاهش متوسط درصد پوشش می‌شود. دیگری اندازه نمونه، که تغییرات آن بصورت افزایشی غالباً افزایش متوسط درصد پوشش را به همراه دارد. البته، بتدریج از روند افزایشی ACP کاسته می‌شود. به نظر می‌رسد این روند کاهش در ACP بدلیل لحاظ کردن حداقل تکرارهای بوت‌استرپ (B) در تمامی مراحل این مطالعه باشد. همانطور که قبلاً بیان شد با توجه به اهمیت نتایج، قابلیت محاسباتی رایانه و محدودیت زمان می‌توان با افزایش B موجبات کاهش خطای شبیه‌سازی را فراهم ساخت. در مورد معیار متوسط طول فاصله نیز می‌توان گفت که افزایش مقادیر انحراف استاندارد و

اندازه نمونه، و کاهش شدت پارامتر خودهمبستگی منجر به افزایش دقت فواصل اطمینان از این لحاظ می‌شوند که روندی کاهشی برای AIL به همراه دارند. اما، تاثیر میانگین، با توجه به جایگاه آن در روابط شاخص‌های مختلف، تغییرات متفاوتی را در AIL موجب می‌شود.

غالباً در عمل، فرض استقلال برآورده نمی‌شود. برآوردهای فاصله اطمینان ناپارامتری این ویژگی را دارند تا از خطای محاسباتی بر مبنای فرض استقلال جلوگیری نمایند اگر سطوحی از همبستگی میان داده‌های فرآیند مورد بررسی وجود داشته باشد. در حقیقت، مزیت روش OB در این است که اگر خودهمبستگی نادیده گرفته شود نتایج حاصل در سطح خودهمبستگی ضعیف (و اندازه نمونه کوچک) چندان تحت تاثیر قرار نمی‌گیرند. البته، می‌توان با استفاده از روش CBB به نتایج مطلوبتری، حتی در سطوح خودهمبستگی بالاتر، دست یافت. نتایج انجام مقایسات نشان داد که در هر دو روش، به جز سطح خودهمبستگی شدید، تقریباً مقادیر ACP به مقدار اسمی سطح اطمینان نزدیک می‌باشند؛ و با افزایش اندازه نمونه عملکرد CBB بهبود می‌یابد اما عملکرد OB آن هم در سطح بالای خودهمبستگی، بعلاوه کاهش امکان تقلید الگوهای وابستگی میان داده‌های اصلی، بدتر می‌شود. نتایج معیار AIL نیز در اندازه نمونه کوچک و در سطوح خودهمبستگی ضعیف‌تر تقریباً یکسان بود، و افزایش اندازه نمونه، کاهش قابل ملاحظه‌ای را در این مقادیر نشان می‌داد. بنابراین، می‌توان چنین نتیجه گرفت که دسترسی به حجم قابل ملاحظه‌ای از داده‌ها منجر به حصول متوسط درصد پوشش نزدیک به سطح اطمینان اسمی و متوسط طول فاصله اطمینان کوچکتر با دقت بیشتر می‌شود.

در ادامه، یک مثال موردی برای تایید عملکرد روش‌های ارائه فاصله اطمینان در نظر گرفته شد. پس از انجام بررسی‌های لازم در مورد تحت کنترل بودن فرآیند، برای ارائه فواصل اطمینان به روش SB بر تعداد تکرارهای بوت‌استرپ افزوده شد تا با کاهش خطای شبیه‌سازی، امکان برآورد دقیق‌تر آنها میسر شود. نتایج نشان داد که در همه موارد حدود فواصل اطمینان محاسبه شده مقادیر واقعی شاخص‌های قابلیت فرآیند را در بر می‌گیرند.

از جمله پیشنهادات برای مطالعات آتی در راستای این مقاله می‌توان به توسعه روش‌های جایگزین برای بهبود نتایج به روش بوت‌استرپ، توسعه کاربرد بوت‌استرپ برای سایر سریهای زمانی ایستا، فصلی و نایستا و مطالعه مشابهی برای فرآیندهای غیر نرمال و خودهمبسته اشاره کرد.

پی‌نوشت

1. Ordinary bootstrap
2. Statistical error
3. Simulation error
4. Moving block bootstrap
5. Circular block bootstrap

- [11] Montgomery DC. Introduction to Statistical Quality Control, 6th Edition, Wiley, (2008).
- [12] Box GEP, Jenkins GM. Time Series Analysis, Forecasting and Control, 4th Edition, Holden-Day, (2008).
- [13] Shore H. Process capability analysis when data are autocorrelated, Quality Engineering, Vol. 9, No. 4, (1997), pp. 615-626.
- [14] Zhang NF. Estimating process capability indexes for autocorrelated data, Journal of Applied Statistics, Vol. 25, No. 4, (1998), pp. 559-574.
- [15] Wallgren E. Essays on capability indices for autocorrelated data, Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Social Science, Vol. 25, No. 1, (2007), pp. 1-36.
- [16] Guevara RD, Vargas JA. Comparison of Process Capability Indices under autocorrelated data, Revista Colombiana de Estadística, Vol. 30, No. 2, (2007), pp. 301-316.
- [17] Lovelace CR, Swain JJ, Zeinelabdin H, Gupta JND. Lower confidence limits for process capability indices C_p and C_{pk} when data are autocorrelated, Quality and Reliability Engineering International, Vol. 25, No. 6, (2009), pp. 663-700.
- [18] Chien-Wei W, Pearn WL, Kotz S. An overview of theory and practice on process capability indices for quality assurance, International Journal of Production Economics, Vol. 117, No. 2, (2009), pp. 338-359.
- [19] Efron B. Bootstrap methods: another look at the jackknife, The Annals of Statistics, Vol. 7, No. 1, (1979), pp. 1-26.
- [20] Efron B, Tibshirani RJ. An Introduction to the Bootstrap, Chapman & Hall, London, (1993).
- [21] Franklin LA, Wasserman GS. Bootstrap confidence interval estimation of C_{pk} : an introduction, Communications in Statistics - Simulation and Computation, Vol. 20, No. 1, (1991), pp. 231-242.
- [22] Franklin LA, Wasserman GS. Bootstrap lower confidence limits for process capability indices, Journal of Quality Technology, Vol. 24, No. 4, (1992), pp. 196-210.
6. Standard bootstrap (SB)
7. Biased-Corrected and accelerated (BCa) percentile bootstrap
8. Average coverage percentage
9. Average interval length
10. Frequency of total estimated ACPs that are appropriate

مراجع

- [1] Kane VE. Process capability indices, Journal of Quality Technology, Vol. 18, No. 1, (1986), pp. 41-52.
- [2] Hsaing TC, Taguchi G. A tutorial on quality control and assurance - the Taguchi methods, ASA Annual Meeting, Las Vegas, Nevada, USA, (1985).
- [3] Chan LK, Cheng SW, Spiring FA. A new measure of process capability: C_{pm} , Journal of Quality Technology, Vol. 20, No. 3, (1988), pp. 162-175.
- [4] Zhang NF, Stenback GA, Wardrop DM. Interval estimation of process capability index C_{pk} , Communications in Statistics: Theory and Methods, Vol. 19, No. 12, (1990), pp. 4455-4470.
- [5] Chou YM, Owen DB, Borrego ASA. Lower confidence limits on process capability indices, Journal of Quality Technology, Vol. 22, No. 3, (1990), pp. 223-229.
- [6] Bissel AF. How Reliable is your Capability Index?, Applied Statistics, Vol. 39, No. 3, (1990), pp. 331-340.
- [7] Franklin LA, Wasserman GS. A note on the conservative nature of the tables of lower confidence limits for C_{pk} with a suggested correction, Communications in Statistics - Simulation and Computation, Vol. 21, No. 4, (1992), pp. 926-932.
- [8] Kushler RH, Hurley P. Confidence bounds for capability indices, Journal of Quality Technology, Vol. 24, No. 4, (1992), pp. 188-195.
- [9] Boyles RA. The taguchi capability index, Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 1, (1991), pp. 17-26.
- [10] Alwan LC, Roberts HV. The problem of misplaced control limits, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 44, No. 3, (1995), pp. 269-306.

- [23] Balamurali S, Kalyanasundaram M. Bootstrap lower confidence limits for the process capability indices C_p , C_{pk} and C_{pm} , International Journal of Quality and Reliability Management, Vol. 19, No. 8, (2002), pp. 1088-1097.

[۲۴] جعفریان نمین، سمراد؛ رئیسی، صدیق؛ امیری، امیرحسین (۱۳۹۱). فواصل اطمینان بوت/استرپ برای شاخص‌های توانایی فرآیند خودهمبسته خودبرگشتی مرتبه ۱، نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت، جلد ۲، شماره ۴، صص. ۲۴۹-۲۳۷.

- [25] Lahiri SN. Theoretical comparisons of block bootstrap methods, The Annals of Statistics, Vol. 27, No. 1, (1999), pp. 386-404.

- [26] Politis D, Romano JP. A circular block resampling procedure for stationary data, In Exploring the limits of bootstrap, edited by R. LePage, L. Billard, New York, Wiley, (1992).

- [27] DiCiccio T, Efron B. Bootstrap confidence intervals, Statistica Science, Vol. 11, No. 3, (1996), pp. 189-228.