

# روشی جدید برای چیدمان قطعات مستطیل شکل در یک فضای مستطیل شکل

محمد جواد اصغر پور و محمد علی هاتفی

**چکیده:** چیدمان قطعات مستطیل شکل در یک فضای مستطیل شکل، عنصر اصلی بسیاری از مسائل برش و چیدمان می‌باشد. از آن جمله می‌توان به مسائل برش، مسائل چیدمان صندوق و مسائل بارگیری پالت توزیع کننده اشاره کرد. مجموعه قطعاتی را در نظر بگیرید که هر یک دارای طول، عرض و ارزش وزنی مشخصی می‌باشند. همچنین یک فضای مستطیل شکل با طول و عرض مشخص، مورد نظر است. قرار است از مجموعه قطعات فوق، قطعاتی در فضای مستطیلی چیده شود به طوری که مجموعه ارزش وزنی قطعات چیده شده بیشینه باشد. برای دستیابی به الگوی دو بعدی فوق، روش جدیدی مبتنی بر رویکرد تولید ستون ارائه می‌گردد. در روش فوق در هر حلقه از الگوریتم حل مساله، یک الگوی یک بعدی مبتنی بر قیمت‌های سایه‌ای تولید خواهد شد. مجموعه الگوهای یک بعدی در کنار هم، الگوی دو بعدی چیدمان را خلق می‌کنند. در انتهای مقاله، طبق تحلیل صورت گرفته، روش فوق با سایر روشهای موجود با رویکرد برنامه ریزی ریاضی، مقایسه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** مسائل برش و چیدمان، برنامه‌ریزی خطی، تولید ستون

## ۱. مقدمه

از مهمترین انواع مسائلی که حوزه تحقیق در عملیات مطرح می‌شوند، مسائل برش و چیدمان<sup>۱</sup> می‌باشد [۱]. به طور عملی این مسائل می‌توانند یک بعدی، دو بعدی یا سه بعدی باشند. می‌توان به برش تیر آهن در مسائل یک بعدی، برش ورق فلزی در مسائل دو بعدی و چیدمان جعبه‌ها در کانتینر برای مسائل سه بعدی، اشاره کرد. یک مساله برش<sup>۲</sup> دو بعدی، می‌تواند گیوتینی<sup>۳</sup> یا غیر گیوتینی باشد [۲]. اگر به ازای یک الگوی برش مفروض، هر خط برش از یک لبه تا لبه مقابل ورق مورد برش ادامه یابد، الگوی فوق را گیوتینی گویند و در غیر این صورت به آن الگوی غیر گیوتینی اطلاق می‌گردد. مساله برش دو بعدی، معادل مساله چیدمان قطعات دو بعدی در یک فضای دو بعدی می‌باشد. یک مساله چیدمان قطعات

این مقاله در تاریخ ۸۲/۹/۵ دریافت و در تاریخ ۸۶/۲/۳ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر محمد جواد اصغر پور، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، mjasgharpour@yahoo.com  
محمد علی هاتفی، عضو هیات علمی پژوهشگاه صنعت نفت، hatefima@yahoo.com

مستطیل شکل، می‌تواند متعامد<sup>۴</sup> یا غیر متعامد باشد. در مساله متعامد، قطعات طوری در فضای مستطیل شکل چیده می‌شوند که ابعاد آنها موازی با ابعاد فضای چیدمان باشد و در غیر این صورت به آن مساله غیر متعامد گفته می‌شود [۳]. مساله چیدمان مطرح شده در این مقاله، از نوع دو بعدی غیر گیوتینی و متعامد می‌باشد. چیدمان قطعات مستطیل شکل در یک فضای مستطیل شکل، عنصر اصلی بسیاری از مسائل برش و چیدمان می‌باشد. در مسائل برش، طی رویکرد حلقوی گیلومر و گوموری، جایی که قصد تولید بهترین الگوی برش، بر اساس ارزشهای دوگان تولید شده مورد نظر باشد، مساله حاضر کاربرد دارد [۴ و ۵]. در بارگیری جعبه‌هایی که از لحاظ طول و عرض، متنوع می‌باشند، مساله چیدمان قطعات مستطیل شکل مطرح می‌گردد. مسائل بارگیری مذکور، طبق دسته بندی هاجسون، تحت عنوان مسائل بارگیری پالت توزیع کننده<sup>۵</sup> شناخته می‌شوند [۶]. همچنین مسائل چیدمان صندوق<sup>۶</sup>، کاملاً با مساله چیدمان قطعات مستطیل شکل، مرتبط می‌باشند.

رویکرد سنتی در مدل‌سازی یک مساله برش، بدین صورت بود که تمام الگوهای برش باید تولید می‌شدند. در سال ۱۹۶۵ رویکردی با

<sup>4</sup> Orthogonal

<sup>5</sup> Distributor's Pallet Loading

<sup>6</sup> Bin-Packing Problem

<sup>1</sup> Cutting & Packing Problems

<sup>2</sup> Cutting Problem

<sup>3</sup> Guillotine

خطی براون نوعی از مدل، به صورت باندی قابل مدلسازی است [۱۲].

چنین مدلی را در کار تسای و همکاران می توان بررسی کرد. در این روش از کنار هم قرار گرفتن مجموعه‌ای از رشته‌های بطول ورق و عرض واحد، الگوی دو بعدی تولید می‌شود [۱۳]. در قدم یک از الگوریتم، یک حد بالا برای میزان ضایعات الگوی برش محاسبه می‌گردد. اعمال این حد بالا در مدلسازی باعث کاهش حجم مدل خواهد شد.

در قدم دوم، تمام الگوهای یک بعدی ممکن در راستای طول ورق محاسبه می‌شود و در قدم سوم، مدلسازی مساله صورت می‌گیرد. در محدودیت های این مدل، اولاً باید جمع تعداد رشته‌های وارده به الگو برابر عرض ورق باشد و ثانیاً مجموع دفعاتی که بعدی مفروض در رشته‌ها تکرار می‌گردد، برابر جمع عرض قطعاتی باشد که طول آنها برابر بعد فوق است. این محدودیت عملاً موجودیت قطعاتی که هم طول می‌باشند را در الگو به صورت تجمعی اعمال می‌کند و لذا این نوع مدلسازی دارای این نقص است که قطعات در الگو، ممکن است به صورت منقطع درآیند که این معادل نبودن قطعه در الگو می‌باشد. همچنین با افزایش تنوع اندازه‌ها در ابعاد قطعات، حجم مدل به طور نمایی رشد می‌کند. از طرفی به دلیل نوع مدلسازی، تمام ابعاد باید صحیح باشند و اندازه گیری پیوسته مجاز نیست. در مقاله حاضر، تمرکز موضوعات بر مدلسازی‌های برنامه ریزی ریاضی می‌باشد. از طرفی به دلیل تحقیقات وسیعی که در حوزه مسائل برش و چیدمان صورت می‌گیرد و حجم بالای اطلاعات و مقالات مربوطه، امکان مطرح کردن تمام کارهای انجام شده در یک مقاله غیر ممکن می‌باشد. لذا در اینجا به ادبیات موضوع مسائل برش و چیدمان در حل به روش های ابتکاری پرداخته نشده است.

## ۲. طرح مساله

ورقی مستطیل شکل با طول  $L$ ، عرض  $W$  و همچنین تعداد  $m$  قطعه مستطیل شکل مورد نظر است  $i = 1, 2, \dots, m$  که قطعه  $i$  ام دارای طول  $L_i$ ، عرض  $W_i$  و ارزش  $V_i$  می‌باشد. مساله عبارتست از چیدن قطعات فوق در ورق، طوری که مجموع ارزش قطعات چیده شده در ورق، بیشینه گردد.

فرض بر این است که قطعات جهت یابی ثابت دارند. به عبارت دیگر قطعات باید طوری در ورق چیده شوند که طول آنها موازی با طول ورق، قرار گیرد. همچنین فرض بر این است که با این جهت یابی ثابت، هر قطعه به تنهایی، در ورق جای می‌گیرد. مساله فوق طبق نوع شناسی دیکهاف به صورت  $2 / V / O / R$  مشخص می‌گردد [۱۴].

عنوان تولید ستون توسط گیلومور و گوموری ارائه شد که طی آن در هر حلقه از الگوریتم، تنها یک الگوی برش، با توجه به قیمت های سایه، تولید می‌شود [۵ و ۴]. آنها این رویکرد را در یک مساله برش گیوتینی مطرح کردند. ر

وش کار بدین صورت بود که در فاز یک، بر مبنای قیمت‌های سایه متناسب با محدودیت‌های تقاضای قطعات، یک مساله کوله پشتی یک بعدی فرموله می‌شود و طی آن برای هر قطعه، بهترین الگوی یک بعدی در راستای طول ورق تعیین می‌گردد. در فاز دوم، مساله کوله پشتی دیگری مطرح است که در آن بهترین ترکیب قرار گرفتن الگوهای یک بعدی در کنار هم عاید می‌گردد. ضرایب تابع هدف در مساله کوله پشتی فاز دوم، مقادیر بهینه حاصل شده در فاز یک می‌باشند. گیلومور و گوموری برای حل مساله کوله پشتی یک بعدی، از روش برنامه ریزی پویا استفاده کردند. رویکرد محاسباتی گیلومور و گوموری بعدها توسط وندریک مورد تحلیل قرار گرفت و بر موثر بودن آن برای حل مسائل برش و چیدمان تاکید گشت [۷].

در مدلسازی یک مساله چیدمان که معادل مساله برش غیرگیوتینی می‌باشد، اصل مهم این است که جلوگیری از همپوشانی<sup>۷</sup> قطعات چگونه در محدودیت های مدل اعمال گردد، چرا که همپوشانی قطعات در یک الگوی چیدمان مفروض، معادل نشدنی بودن آن الگو می‌باشد. به هر حال در حوزه برنامه ریزی ریاضی، برای چیدمان، کارهای معدودی ارائه شده است و اغلب مدلسازی‌های موجود، با کمک متغیرهای عدد صحیح می‌باشند [۸ و ۱].

در سال ۱۹۸۵ بیزلی مدل ساده ای را در فضای دکارتی ارائه کرد. طی مدل وی، هر قطعه در فضای دکارتی، با مختصات گوشه چپ پایینی قطعه شناخته می‌شود [۹]. برای این که دو قطعه مفروض با هم همپوشانی نداشته باشند، از چهارسری محدودیت استفاده شده است. وی در جهت تسهیل مدل، محدودیتها را به کمک تسهیل لاگرانژی، به تابع هدف افزود. در کار وی به دلیل نوع خاص مدلسازی، تمام ابعاد باید صحیح باشند. چن و همکاران مدل بیزلی را مد نظر قرار دادند و عیوب آن را اصلاح کردند [۹ و ۱۰]. برای قرار گیری دو قطعه مفروض نسبت به هم، از چهار متغیر باینری استفاده شده است. این که قطعه اول، در بالا، پایین، چپ یا راست قطعه دوم قرار گیرد، موجب می‌شود یکی از متغیرهای باینری چهار گانه مقدار یک بگیرد و بقیه صفر شوند.

در کار تسای و همکاران نیز موقعیت قطعات در فضای دکارتی از طریق مختصات گوشه چپ پایینی قطعه، معین می‌شود، لیکن برای جلوگیری از همپوشانی قطعات، بجای استفاده از چهار متغیر تعیین جهت، از دو متغیر باینری استفاده می‌شود به طوری که مقدار گیری دو متغیر فوق، باعث حصول چهار حالت می‌شود که هر حالت، یکی از جهات چهار گانه را دربردارد [۱۱]. همچنین بر اساس معادلات

<sup>7</sup> Overlap

$$MAX \quad U = \sum_{i=1}^m V_i \times t_i \quad (1)$$

**St.** (I)

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \times D_j = L_i \times t_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{ij} \times W_i \leq W \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n D_j \leq L \quad (4)$$

$$t_{i1} + t_{in} + \sum_{j=1}^{n-1} |t_{ij} - t_{i,j+1}| \leq 2 \quad (5)$$

$$D_j \geq 0 \quad t_i, t_{ij} \quad \text{Binary} \quad (6)$$

در این مدل، محدودیت‌های (۲) باعث مقدار گیری  $t_{ij}$  ها و  $D_j$  ها بر اساس طول قطعات می‌شوند.

محدودیت‌های (۳)، حد بالای چیدمان در هر باند را اعمال می‌کنند و محدودیت (۴) نیز حد بالای مجموع عرض باندها را اعمال می‌کند. محدودیت (۵) تضمین می‌کند که باندهایی که یک قطعه در آنها قرار می‌گیرد همسایه هم باشند تا بین اجزای یک قطعه، انقطاعی صورت نگیرد.

#### ۴. تسهیل مدل (I)

خط مشی تسهیل مدل (I)، خطی سازی آن می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌شود، محدودیت‌های ردیف (۵) از مدل بسیار پیچیده و غیر خطی می‌باشد. تلاش برای خطی سازی این سری محدودیتها، باعث حجیم شدن غیر منطقی مدل می‌شود. در جهت تسهیل مدل، اولین قدم، حذف محدودیت‌های ردیف (۵) است. البته این امر مشکلاتی را به وجود خواهد آورد که در جای خود به آن پرداخته خواهد شد. در قدم دوم تسهیل، بر اساس رویکرد تولید ستون گیلومور و گوموری، مدلی طرح می‌گردد که طی آن در یک سیستم حلقوی، در هر دور از حلقه تکرار، یک الگوی یک بعدی تولید می‌شود [۴ و ۵]. در این رویکرد حلقوی، الگوهای یک بعدی (باند‌ها)، در مدل اصلی، مشخص هستند. این الگوهای یک بعدی توسط یک مدل ثانویه تولید خواهند شد.

با اعمال این تسهیل، محدودیت‌های ردیف (۳) از مدل، به مدل ثانویه منتقل می‌شوند و مدل اصلی به صورت مدل (۷) تا (۱۰) نوشته خواهد شد. اکنون فرض کنید مدل (II) حاوی 1-  $j$  باند است و قرار است طی رویکرد حلقوی، باند  $j$  ام را تولید کنیم. برای این که باند جدید متضمن بهبود تابع هدف باشد، باید در آخرین تابلوی سیمپلکس مربوط به مدل (II) ضریب  $x_j$  در سطر تابع هدف، منفی باشد. حال تابلوی سیمپلکس مدل (II) را در نظر بگیرید.

#### ۳. مدلسازی

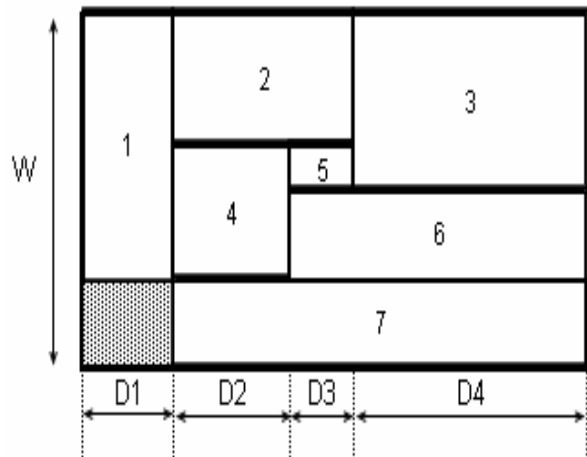
برای مدلسازی به روش جدید، ابتدا تعریف جدید موقعیت قطعات در ورق مطرح می‌گردد.

شکل ۱ که یک الگوی دو بعدی نمونه می‌باشد را در نظر بگیرید. با امتداد خطوط برش عمودی، الگوی دو بعدی به مجموعه ای از باندها تقسیم می‌شود به طوری که هر باند، در حکم یک الگوی یک بعدی می‌باشد.

همانطور که ملاحظه می‌کنید، باندها دارای عرض‌های متفاوت هستند، به طوری که جمع عرض آنها برابر طول ورق است. طول باندها نیز مساوی بوده و برابر عرض ورق می‌باشد. به این ترتیب مجموعه‌های زیر قابل تعریف است:

$STR_j$ : مجموعه قطعاتی که در باند  $j$  ام قرار دارند.  $j = 1, 2, \dots, n$   
 $B_i$ : مجموعه باندهایی که قطعه  $i$  ام در آنها قرار دارد.  $i = 1, 2, \dots, m$   
 برای مثال در شکل ۱ می‌توان گفت:

$$STR_{D3} = \{2, 5, 6, 7\} \quad \text{و} \quad B_7 = \{D_2, D_3, D_4\}$$



شکل ۱. تعریف باندهای موقعیت قطعات در الگوی دو بعدی

توجه شود که برای الگویی که قرار است تولید گردد تعداد باندها، عرض باندها و مجموعه‌های STR و B نامشخص هستند.

بر اساس تعریف باندهای الگو، مدل (I) نوشته می‌شود. طبق این مدل اگر قطعه  $i$  در ورق قرار گیرد  $t_i$  مساوی یک خواهد شد و در غیر این صورت صفر می‌شود.

همچنین اگر قطعه  $i$  در باند  $k$  باشد،  $t_{ij}$  برابر یک خواهد شد و در غیر این صورت صفر می‌گردد. در ضمن عرض باند  $j$ ،  $D_j$  است. مدل (I) غیر خطی می‌باشد.

دقت کنید که محدودیتهای ردیف (۳) از مدل (I) به صورت محدودیت ردیف (۱۷) در مدل (III)، منتقل می‌شوند.

$$MAX \quad Z = \theta + \sum_{i=1}^m \pi_i \times P_i \quad (16)$$

**St. (III)**

$$\sum_{i=1}^m P_i \times W_i \leq W \quad (17)$$

$$\forall t_i \in (0,1) \quad (18)$$

در این مدل، اگر قطعه  $i$  در باند قرار گیرد  $P_i$  برابر یک خواهد شد و در غیر این صورت صفر می‌شود. اگر تابع هدف مدل (III) مثبت نشود،  $x_j$  در مدل (II) وارد پایه نخواهد شد و لذا حلقه حل مساله پایان می‌یابد.

از آنجایی که ورودی مدل (III) از مدل (II) قیمت‌های سایه ای می‌باشد، برای این که این ضرایب تولید شوند، باید مدل (II) فاقد قیود صحیح بودن باشد. لذا مدل جدید (II) به صورت (IV) نوشته می‌شود. البته با حذف قیود صحیح بودن مشکلاتی بروز خواهد کرد که در مورد آنها توضیح داده خواهد شد فرآیند حل مساله را در شکل ۲ ملاحظه می‌کنید.

$$MAX \quad U = \sum_{i=1}^m V_i \times t_i \quad (19)$$

**St. (IV)**

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \times D_j = L_i \times t_i \quad \forall i=1,2,\dots,m \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^n D_j \leq L \quad (21)$$

$$\forall D_j \geq 0 \quad 0 \leq \forall t_i \leq 1 \quad (22)$$

$$MAX \quad U = \sum_{i=1}^m V_i \times t_i \quad (7)$$

$$St. \quad \sum_{j=1}^n t_{ij} \times D_j = L_i \times t_i \quad \forall i=1,2,\dots,m \quad (8)(II)$$

$$\sum_{j=1}^n D_j \leq L \quad (9)$$

$$D_j \geq 0, t_i \quad \text{Binary} \quad (10)$$

این تابلوی دارای  $m+1$  محدودیت است. لذا بردار قیمت‌های سایه‌ای دارای  $m+1$  عضو می‌باشد. این بردار با  $\pi$  مشخص می‌گردد:

$$DP^t = (\pi^t, \theta) ; \quad \pi^t = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) \quad (11)$$

در اینجا،  $\pi$  نمایشگر بردار ارزشهای دوگان متناظر با محدودیت‌های ردیف (۸) می‌باشد و  $\theta$  نیز ارزش دوگان متناظر با محدودیت ردیف (۹) است. همچنین ضرایب فنی  $D_j$  با بردار (۱۲) نمایش داده می‌شود.

$$P_j = (t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{mj}, 1) \quad (12)$$

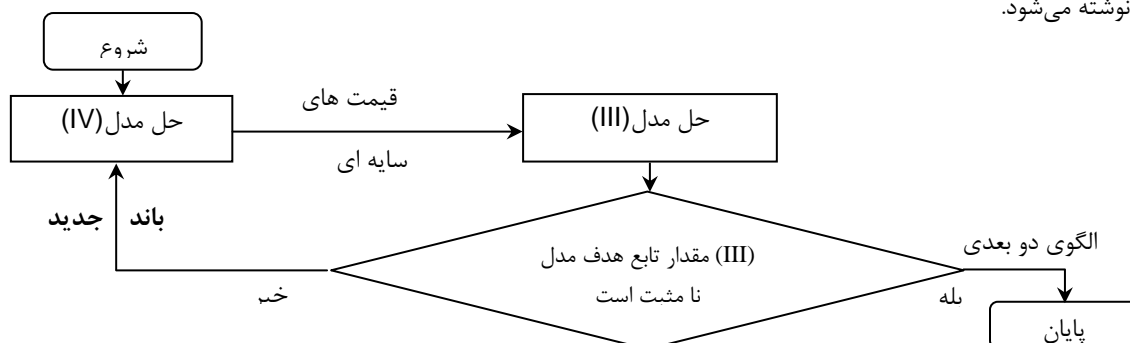
به این ترتیب:

$$(Z_j - C_j)_{D_j} = C^t_B \times B^{-1} \times P_j - C_j \quad (13)$$

$$Z_j = (\pi_1, \dots, \pi_m, \theta) \times (t_{1j}, \dots, t_{mj}, 1) \quad (14)$$

$$Z_j = \sum_{i=1}^m \pi_i \times t_{ij} + \theta \quad (15)$$

دقت نمایید که ضریب  $D_j$  در تابع هدف، یعنی  $C_j$  صفر است. در هر صورت برای این که باند جدید متضمن بهبود باشد، با توجه به بیشینه سازی بودن تابع هدف مدل (II)، عبارت بالا باید منفی گردد. حال از آنجایی که مدل‌های کوله پشتی دارای تابع هدف بیشینه سازی هستند، مدلی که باند جدید را تولید نماید، به صورت (III) نوشته می‌شود.



شکل ۲. رویه حل مساله، با رویکرد حلقوی گیلومور و گوموری [۵و۴]

### ۵. مشکلات و رفع آنها

#### ۵-۱. نقص قطعات

دیدیم که برای تولید شدن قیمت های سایه‌ای، قید صحیح بودن متغیرهای باینری  $t_i$  حذف گردید. به ازای این عمل، بعد از رسیدن به شرط توقف حلقه و حل مدل (IV)، ممکن است بعضی از متغیرهای  $t_i$  مقداری بین صفر و یک را اتخاذ کنند. مثلاً  $t_i = 0.7$ ، که این معادل ناقص بودن قطعه چیده شده در الگو می‌باشد. برای برخورد با این مشکل، الگوریتمی تحت عنوان IE<sup>۸</sup> طرح می‌گردد. برای تشریح الگوریتم فوق، فرض کنید مورد نظر است مدل (IV) بدون در نظر گیری محدودیت‌های ابعادی مساله نوشته شود. چنین مدلی به راحتی به صورت یک مدل کوله پشتی (V) نوشته می‌شود.

$$MAX \quad Z = \sum_{i=1}^m V_i \times t_i \quad (23)$$

$$St. \quad (V)$$

$$\sum_{i=1}^m A_i \times t_i \leq A \quad \forall i=1,2,\dots,m \quad (24)$$

$$\forall t_i \in (0,1) \quad (25)$$

در مدل (V)،  $t_i$  همان تعریف مدل (IV) را دارد.  $a_i$  مساحت قطعه  $i$  است و  $A$  مساحت ورق یا همان فضای چیدمان می‌باشد. ترتیب اولیاتی قطعات در مدل (V)، برای قرار گرفتن در چیدمان را مدنظر قرار دهید. طبق روش جستجوی لکسیکوگراف گیلومور و گوموری و هرز در حل مسائل کوله پشتی، ارزشمندترین قطعه برای چیده شدن در الگو، قطعه‌ای است که نسبت ضریب متغیر وابسته به آن در تابع هدف، به فضایی که از کوله پشتی اشغال می‌کند، بیشتر از سایر قطعات باشد [۱۵،۶]. اکنون از همین اصل در طرح الگوریتم IE بهره گرفته می‌شود.

با توجه به این معیار، اگر بعد از حل مدل (IV)، قطعات ناقصی حادث شد، برای این که فرصت‌های جدیدی برای چیدمان کامل قطعات ناقص پدید آید، قطعه ناقص با بیشترین نسبت ارزش لکسیکوگرافیک از مساله، حذف می‌گردد، چرا که مطمئناً قطعه فوق به هیچ نحوی در فضای باقی مانده در الگو جای نمی‌گیرد. با این کار، فضایی که قسمت ناقص قطعه فوق اشغال کرده بود آزاد شده و امکان قرار گرفتن کامل قطعات ناقص یا قطعات جدید پدید می‌آید. البته مسلم است که کلیه قطعات مشابه با قطعه حذف شده، که ناقص هستند یا این که قبلاً در الگو قرار نگرفته‌اند نیز حذف خواهند شد.

مراحل الگوریتم IE:

قدم (۱): مجموعه NI<sup>۹</sup> را تشکیل دهید:

$$NI = \{i \mid 0 < t_i < 1, \forall i = 1, 2, \dots, m\} \quad (26)$$

قدم (۲): قطعه  $Z$  را بیابید، طوری که:

$$v_z / a_z = \max_{i \in NI} \{v_i / a_i\} \quad (27)$$

که در این رابطه، عبارت  $v_i / a_i$ ، نسبت ارزش قطعه  $i$  ام به مساحت آن است. در صورت تعدد  $Z$ ، قطعه ای برگزیده می‌شود که در باندهای با عرض غیر صفر، با قطعاتی با نسبت  $v/a$  کمتر، هم باند باشد. این معیار انتخاب، تضمین می‌کند که قطعه با ارزش تر در الگو بماند. در صورت تعدد  $Z$  بعد از این معیار نیز، قطعه ای با کمترین مقدار کسری برگزیده می‌شود.

قدم (۳): مجموعه  $S$  را تشکیل دهید:

(۲۸)

$$S = \{l_{i=} = l_z, W_i = W_z, V_i = V_z, t_i < 1\}$$

قدم (۴): اکنون به تعداد  $n(s) - \left[ \sum_{i=1}^m t_i \right]$  از قطعات عضو مجموعه  $S$  حذف می‌شود. در این عبارت،  $n(s)$  تعداد اعضای مجموعه  $S$  می‌باشد. قطعه  $Z$  نیز باید جزو قطعات حذفی باشد. در ضمن تمام باندهایی که قطعات حذف شده در آنها قرار داشتند نیز حذف می‌گردند. توضیح این که طی این قدم، قطعه  $Z$  و تمام قطعاتی که امید بهبود ندارند، با هم حذف می‌گردند.

#### ۵-۲. انقطاع قطعات

در قدم اول از تسهیل مدل (I)، دیدیم که به دلیل پیچیدگی محدودیت‌های ردیف (۵)، این سری محدودیتها از مدل حذف گردید. از طرفی گفته شد که این سری محدودیتها برای جلوگیری از تکه تکه شدن اجزای قطعاتی است که در چند باند قرار می‌گیرند. با حذف محدودیت‌های فوق، ممکن است مشکل انقطاع قطعات رخ دهد.

انقطاع را می‌توان به سه دسته ذیل تقسیم کرد:

الف) انقطاع ناشی از ترتیب نادرست باندها

ب) انقطاع ناشی از ترتیب نادرست اجزای داخلی باندها

ج) انقطاع ناشی از ترکیب نسبی اجزای باندها

<sup>۹</sup> Non-Integer

<sup>۸</sup> Item Eliminator

۳-۵. مقابله با انقطاع نوع سوم

اگر پس از عملیات های مرتب سازی، قطعات منقطعی هنوز باقی مانده باشند، این بیانگر این است که انقطاع نوع سوم رخ داده است. برای مبارزه با این نوع انقطاع، به مدل (III) قید جدیدی افزوده می گردد به طوری که این قید از تولید آخرین باند تولید شده، جلوگیری می کند و لذا مدل (III) بهترین باند بعدی را تولید خواهد کرد. باند فوق، در مدل (IV) با آخرین باند افزوده شده که باعث انقطاع نوع سوم شده است، جایگزین می گردد. در صورتی که باند فوق نیز باعث انقطاع نوع سوم شود، رویه افزودن قید، تکرار می گردد.

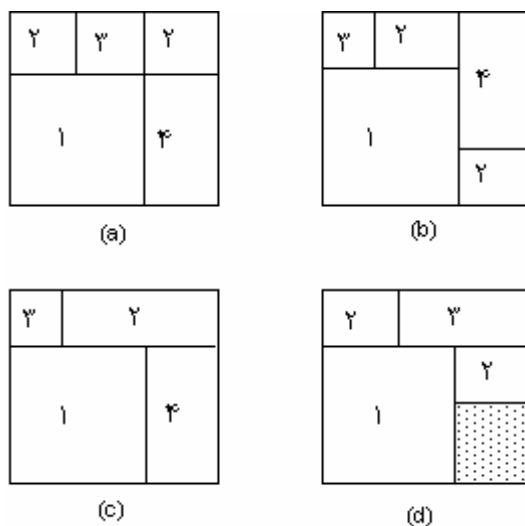
فرض کنید باند  $k$ ، باندی است که با افزودن آن به مدل (IV) باعث بروز انقطاع نوع سوم شده است، قیدی که باید به مدل (III) افزوده گردد به صورت (۲۹) نوشته می شود.

$$\sum_{i \in STR(D_j)} P_i \leq n(STR(D_j)) - 1 \quad (29)$$

که در این رابطه  $n(STR_{D_j})$  تعداد اعضای مجموعه  $STR_{D_j}$  می باشد. فرآیند نهایی حل مساله، بعد از اعمال حلقه جلوگیری از انقطاع، مطابق شکل ۶ می باشد.

۶. تجزیه و تحلیل

در این قسمت، روش جدید با سایر مدل سازی های صورت گرفته با رویکرد برنامه ریزی ریاضی مقایسه می گردد. مدل های مورد مقایسه به ترتیب تسای و همکاران، چن و همکاران و براون می باشند [۱۱، ۱۲ و ۱۳]. به اختصار مدل های فوق به ترتیب با  $P1$ ،  $P2$  و  $P3$  نمایش داده می شود. همچنین مدل جدید (شکل ۴) با  $R$  نمایش داده می شود. مقایسه از دو دیدگاه مدل سازی و محاسباتی مورد نظر است.

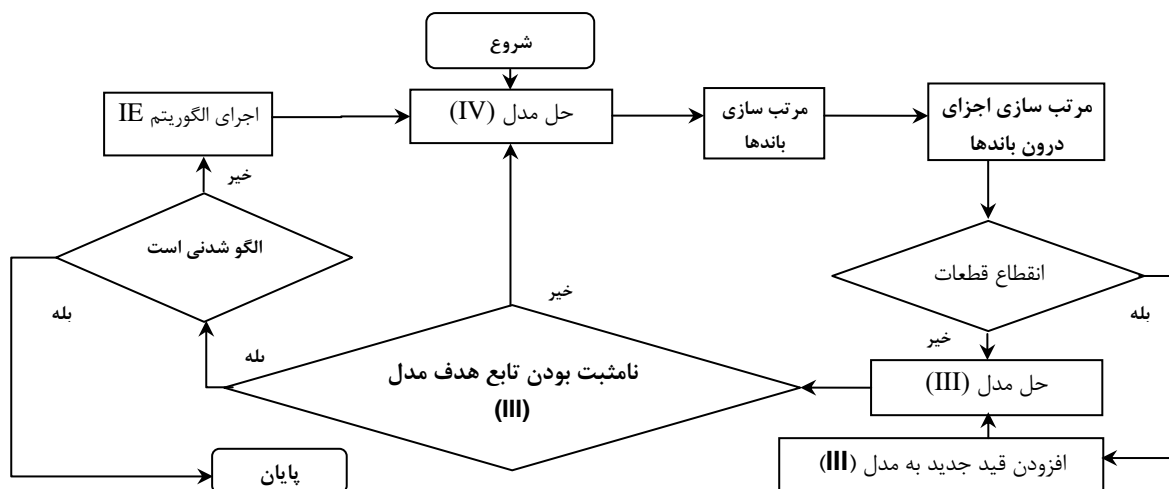


شکل ۳. حالات انقطاع در چیدمان باندی

انقطاع نوع اول، با مرتب سازی باند ها در کنار هم، رفع می شود. برای مثال در شکل ۳. a، چنین انقطاعی را در قطعه ۲ می بینید. بعد از مرتب سازی باندها، شکل ۳. c که الگوی بدون انقطاع می باشد حاصل می گردد. در مورد انقطاع نوع دوم نیز با مرتب سازی داخلی باندها، مشکل انقطاع رفع می گردد.

در شکل ۳. b به دلیل ترتیب نادرست اجزای داخلی باند سوم، قطعه ۲ منقطع شده است که بعد از مرتب سازی، الگوی ۳. c به دست می آید. انقطاع نوع سوم، غیر قابل رفع است. به عبارت بهتر، این نوع انقطاع، اجباری می باشد، زیرا ناشی از ترکیب قرارگیری نسبی قطعات داخل باندها می باشد.

نمونه چنین انقطاعی را در قطعه ۲ از الگوی شکل ۳. d می بینید. در این الگو، با تغییر ترتیب باندها، در هر حالت، قطعه یا قطعاتی منقطع می مانند.



شکل ۴. فرآیند نهایی حل مساله به روش جدید

۶-۱. مقایسه از نظر مدلسازی

از نظر تعداد متغیرها، مدل‌های P1 و P2 به وضوح دارای فرمول رشد نمایی هستند. مدل P3 نیز هر چند دارای فرمول رشد خطی است، لیکن از آنجایی که با افزایش تعداد قطعات و در نتیجه افزایش تعداد ابعاد، تعداد الگوهای یک بعدی تولید شده عملاً دارای رشد نمایی خواهد بود. در مدل R رشد متغیرها خطی می‌باشد. از نظر نوع متغیرها، مدل‌های P1 و P2 به صورت مخلوط پیوسته و دودویی هستند و P3 نیز به صورت تمام عدد صحیح می‌باشد بهترین وضعیت برای مدل R است که کاملاً پیوسته می‌باشد که این مزیتی بزرگ برای مدل به حساب می‌آید. از نظر تعداد محدودیت‌ها، مدل‌های P1 و P2 دارای فرمول رشد نمایی هستند لیکن مدل‌های P3 و R به صورت خطی رشد می‌کنند. از لحاظ پیوستگی، در مدل‌های P1، P2 و R، می‌توان ابعاد پیوسته را وارد مدل لیکن در مدل P3 این نقیصه وجود دارد که تمام ابعاد باید عدد صحیح باشند. از لحاظ انقطاع، در مدل‌های P1 و P2 این موضوع اصلاً مطرح نمی‌شود در مدل R دیدیم که با اعمال تمهیداتی، از تولید مدل‌های حاوی انقطاع، جلوگیری می‌شود و لذا مشکلی به وجود نخواهد آمد. در مدل P3 از آنجایی که این مدل در یک مرحله حل می‌شود، بعد از حل، ممکن است قطعاتی منقطع شوند که در اینگونه موارد راهی جز حذف آنها نیست. به هر حال این نقیصه ای برای مدل P3 است که باعث از دست رفتن بهینگی می‌شود.

۶-۲. مقایسه از دیدگاه محاسباتی

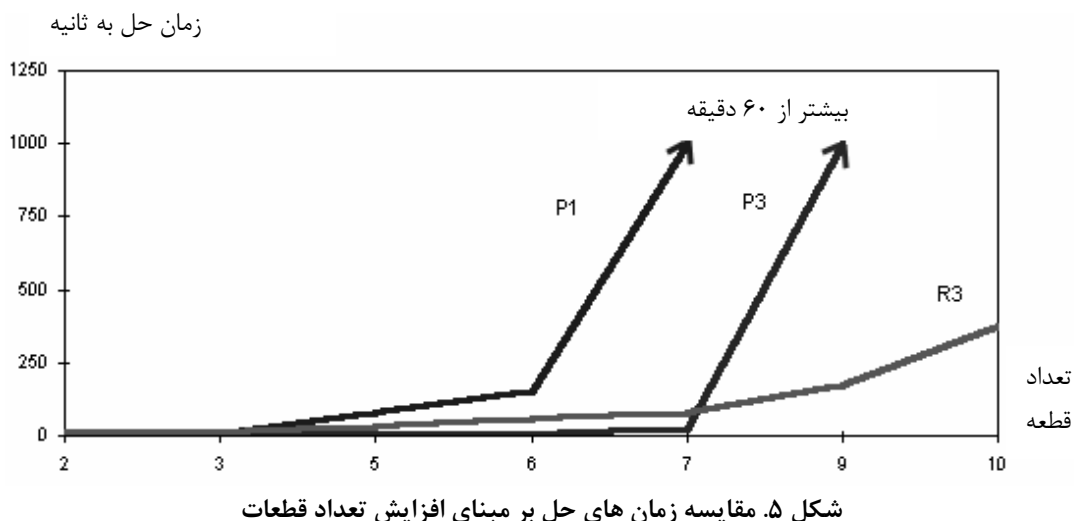
برای این منظور تعداد ۱۴ مثال را توسط مدل‌های P1، P3 و R حل کرده ایم. از آنجایی که در مقایسات مدلسازی در تمام موارد، مدل P1 بر مدل P2 برتری دارد، لزومی به مقایسه محاسباتی مدل P2

نیست. مثال‌ها با نرم افزار LINGO و تحت کامپیوتری با مشخصات 100 MHZ, DX 80486 حل شده‌اند. از آنجایی که مدل‌ها همه در حوزه برنامه ریزی ریاضی می‌باشند، لزومی به دقت زمانی بیش از ثانیه احساس نمی‌شود و لذا با قصد قبلی، کامپیوتری با سرعت پایین را انتخاب نموده‌ایم تا به ازای طولانی شدن زمانهای حل، اختلاف آنها نمایان‌تر گردد. در جدول ۱ نتایج حاصله از حل ۱۴ مثال را می‌بینید. در این جدول در مواردی که زمان حل، بیش از یک ساعت شده است، با OV (Over) گزارش شده‌اند. همچنین ستون بازده، بیانگر بازده استفاده از فضای چیدمان می‌باشد. در نمودار شکل ۵، تغییرات زمان حل مدل برحسب افزایش مقیاس مساله، را می‌بینید. همانطور که از نتایج بر می‌آید، زمان محاسباتی تمام مدل‌ها دارای رشد نمایی است. لیکن مدل R دارای پارامتر نمایی کوچکی نسبت به سایرین می‌باشد. در مقیاس‌های کوچک، مدل P3 دارای زمان حل کمتری نسبت به مدل R است، لیکن با افزایش مقیاس مساله و در نتیجه تنوع ابعادی قطعات، زمان حل مدل P3 روند صعودی‌تری نسبت به مدل R دارد. تمام الگوهای تولید شده توسط مدل P1 و R، بهینه کلی هستند. در مدل P3 به دلیل حذف قطعات منقطع، افت کیفیت جواب‌ها را در برخی موارد ملاحظه می‌کنید.

در مثال‌های E9 و E12، در الگوهای نهایی تولید شده توسط مدل P3، انقطاع قطعات رخ داده است. جزئیات کامل نتایج محاسباتی روش جدید و مقایسات با سایر روش‌ها، در مرجع آمده است [۱۶]. همچنین، نمونه الگوی تولید شده به روش جدید، در شکل ۶ آورده شده است.

جدول ۱. نتایج حل (زمان بر حسب ثانیه - بازده بر حسب درصد)

مدل مثال	P1		P3		R	
	زمان حل	بازده	زمان حل	بازده	زمان حل	بازده
E1	3	100	4	100	12	100
E2	10	100	4	100	16	100
E3	83	100	6	100	32	100
E4	157	100	10	100	60	100
E5	OV.		29	100	81	100
E6	OV.		OV.		174	100
E7	OV.		OV.		376	100
E8	728	100	5	100	32	100
E9	662	98	10	81	50	98
E10	521	100	64	100	64	100
E11	OV.		716	100	28	100
E12	62	96	8	74	44	96
E13	480	95	13	95	64	95
E14	2666	100	10	100	56	100



شکل ۵. مقایسه زمان های حل بر مبنای افزایش تعداد قطعات

[2] Lodi, A., Martello, S., & Monaci, M., "Two-Dimensional Packing Problems: A Survey", European Journal of Operational Research, Vol. 141, 2002, PP. 241-252.

[3] Lins, L., Lins, S., & Morabito, R., "An L-Approach For Packing (l, w) Rectangles Into Rectangular And L-Shaped Pieces", Operational Research Society, Vol. 54, No. 7, 2003, PP. 777-789.

[4] Gilmore, P.C., & Gomory, R.E., "A Linear Programming Approach to The Cutting Stock Problem", Operations Research, Vol. 9, 1961, PP. 849-859.

[5] Gilmore, P.C., & Gomory, R.E., "A Linear Programming Approach to The Cutting Stock Problem /Part 2", Operations Research, Vol. 11, 1963, PP. 863-888.

[6] Hodgson, T., "A Combined Approach to The Pallet Loading Problem", IIE Transactions, Vol. 14, No. 3, 1982, PP. 176-182.

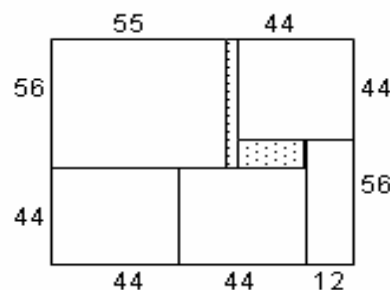
[7] Vanderbeck, F., "Computational Study of a Column Generation Algorithm For Bin Packing And Cutting Stock Problems", Mathematical Programming, Vol. 86, 1999, PP. 565-594.

[8] Valerio, J.M., "LP Models For Bin Packing And Cutting Stock Problems", European Journal of operational Research, Vol. 141, No. 2, 2002, PP. 253-273.

[9] Beasley, J.E., "An exact Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Tree Search Procedure", Operations Research, Vol. 33, No. 1, 1985, PP. 49-64.

[10] Chen, C.S., Sarin, S., & Ram, B., "The Pallet Packing For Un-Uniform Box Sizes", International Journal of Production Research, Vol. 29, No. 19, 1991, PP. 1963-1968.

[11] Tsai, R.D., Maelstrom, E.M., & Kuo, W., "Three-Dimensional Palletization of Mixed Box Sizes", IIE Transactions, Vol. 25, No. 4, 1993, PP. 64-75.



شکل ۶. الگوی تولید شده برای مثال E13 به روش جدید

### ۷. نتیجه گیری

در این مقاله، روشی برای چیدمان مستطیل شکل در یک فضای مستطیل شکل پیشنهاد گشت. با توجه به این که رویکرد روش، برنامه ریزی ریاضی می باشد، در انتهای حل مساله جواب های بهینه عمومی حاصل می شوند. عطف به این موضوع، روش پیشنهادی با سه روش موجود در ادبیات موضوع، از دو دیدگاه ساختار مدلسازی و وجوه محاسباتی مقایسه گشت. این مقایسه ها نشان داد که مدل پیشنهادی چه از لحاظ ساختار مدلسازی و چه از دیدگاه زمان محاسبه، برتر از روش های موجود می باشد. در هر صورت با توجه به این که رویکرد مدلسازی پیشنهادی از نوع برنامه ریزی ریاضی می باشد، زمان حل مساله دارای روند رشد نمایی می باشد؛ در واقع مهمترین نوآوری روش پیشنهادی نسبت به تکنیک های موجود، کاهش پارامتر رشد نمایی زمان حل مساله است.

### مراجع

[1] Li, H.L., Tsai, F.L., & Hu, N.Z., "A Distributed Global Optimization Method For Packing Problems", Operational Research Society, Vol. 54, No. 4, 2003, PP. 419-425.



- [15] Herz, J., "A Recursive Computing Procedure For Two-Dimensional Stock Cutting", IBM Journal of Research, Vol. 16, 1972, PP. 462-469.
- [12] Browne D.J., "An Improved BL Lower Bound", Information Process Letters, Vol. 11, No. 1, 1980, PP. 37-39.
- [13] Tsai, R.D., Maelstrom, E.M., & Meeks, H.D., "A Two-Dimensional Palletizing Procedure For Warehouse Loading Operations", IIE Transactions, Vol. 20, No. 4, 1988, PP. 418-425.
- [14] Dychhoff, H., "A Typology of Cutting And Packing Problems", European Journal of Operational Research, Vol. 44, 1990, PP. 145-159.
- [۱۶] هاتفی، محمدعلی، «مسئله برش دو بعدی به صورت MODM با تعیین Stock size توأم با ارائه روش جدیدی برای تولید الگوهای دو بعدی»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۷۹.