

## A CONTINUES COVERING LOCATION MODEL WITH FUZZY COVERING RADIUS

Mohammad Saeed Jabalameli\*, Seyed Javad Hosseini-zhad & Seyed Gholamreza Jalali Naeini

*Mohammad Saeed Jabalameli, Professor of Industrial engineering, Iran University of Science and Technology.*

*Seyed Javad Hosseini-zhad, Associate Professor of Industrial engineering, K. N. Toosi University of Technology.*

*Seyed Gholamreza Jalali Naeini, Assistantce Professor of Industrial engineering, Iran University of Science and Technology.*

### Keywords

Continuous covering model,  
Fuzzy covering radius,  
Risk management,  
 $\alpha$ -cut method

### ABSTRACT

*This paper proposes a continuous covering location problem (CCLP) in fuzzy environment. Because of uncertain covering radius, possibility degree of covering is introduced by fuzzy concept. Since, the uncertainty may cause risk of uncovering customers; the problem is formulated as a risk management model. The proposed model is extension of discrete covering location models in continuous space. Objective function consists of risk cost. A facility belongs to a zone when is located in a predetermined radius from center of the zone. The model is solved by a fuzzy method named  $\alpha$ -cut. After solving the model based on different  $\alpha$ -values, the zones with the largest possibilities are determined for locating new facilities and the best locations are calculated based on the obtained possibilities. Then, the model is solved to determine the covering matrix and possibility degree of the covering values. Finally, a numerical example with sensitivity analysis is expressed to illustrate the proposed model.*

© 2016 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 27, No. 1, All Rights Reserved



## یک مدل جایابی پوشش پیوسته با شعاع پوشش فازی

محمد سعید جبل عاملی\*، سید جواد حسینی نژاد و سید غلامرضا جلالی نائینی

### چکیده:

این مقاله یک مدل جایابی پوشش پیوسته را در محیط فازی ارائه می‌دهد. به خاطر عدم قطعیت شعاع پوشش، درجه امکان پوشش به وسیله مفهوم فازی معرفی می‌شود. از آنجا که عدم قطعیت می‌تواند موجب ریسک عدم پوشش مشتریان گردد، مساله به صورت یک مدل مدیریت ریسک فرموله می‌شود. مدل پیشنهادی توسعه مدل‌های جایابی پوشش گسسته در فضای پیوسته است. تابع هدف شامل هزینه ریسک می‌باشد. در مدل ارائه شده، یک وسیله در صورتی به یک منطقه تعلق دارد که در فاصله از قبل تعیین شده از مرکز آن منطقه قرار گیرد. مدل پیشنهادی توسط روش آلفا-برش حل می‌شود. پس از حل مدل با آلفاهای مختلف، مناطقی که بیشترین امکان انتخاب شدن را دارند، برای تعیین تسهیلات جدید برگزیده شده و بهترین مکان تسهیلات بر اساس درجه‌های امکان به دست آمده، محاسبه می‌شوند. آنگاه مدل برای به دست آوردن مقادیر ماتریس پوشش و درجه امکان مقادیر پوشش، حل می‌شود. در پایان، یک مثال عددی به همراه تحلیل حساسیت برای تشریح مدل پیشنهادی ارائه می‌شود.

### کلمات کلیدی

مدل پوشش پیوسته،  
شعاع پوشش فازی،  
مدیریت ریسک،  
روش آلفا - برش

ابتدا مدل پوشش جزئی گسسته را معرفی می‌کنیم. با فرض وجود  $n$  نقطه تقاضا (مشتری) و  $k$  نقطه نامزد برای جایابی تسهیلات که به ترتیب با  $i$  و  $j$  نشان داده می‌شوند، اگر  $P_i$  جریمه عدم پوشش مشتری  $i$  باشد، آنگاه مدل  $F_1$  به صورت زیر است [۴].

$$F_1: \min \sum_{i=1}^n P_i W_i \quad (1)$$

S.t.

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} V_j + W_i \geq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$V_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

$$W_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$a_{ij}$  برابر ۱ می‌باشد اگر نقطه  $j$  بتواند مشتری  $i$  را پوشش دهد و در غیر اینصورت برابر صفر است.

$V_j$  برابر ۱ می‌باشد اگر یک وسیله در نقطه  $j$  تاسیس شود.

$W_i$  برابر ۱ می‌باشد اگر مشتری  $i$  مورد پوشش قرار نگیرد.

تابع هدف (۱) شامل هزینه جریمه است. رابطه (۲) تضمین می‌کند

که اگر  $a_{ij} V_j$  برابر صفر باشد به این معناست که مشتری  $i$  مورد

### ۱. مقدمه

به طور کلی مساله پوشش به دنبال جایابی تعدادی وسیله جدید به منظور سرویس دهی به مشتریان می‌باشد. برای اینکه یک مشتری توسط یک وسیله سرویس دهی شود باید در یک فاصله مشخص شده یا شعاع پوشش آن وسیله قرار بگیرد [۱-۲]. مساله پوشش با توجه به اینکه همه و یا برخی از مشتریان مورد پوشش واقع شوند به دو دسته پوشش کامل<sup>۱</sup> و پوشش جزئی<sup>۲</sup> تقسیم بندی می‌شود. [۳] در مدل پوشش کامل، با هدف کاهش هزینه کل، همه مشتریان مورد پوشش قرار می‌گیرند ولی از آنجا که در دنیای واقعی پوشش همه مشتریان امکان پذیر نمی‌باشد و امکان از دست دادن مشتری وجود دارد، در اینجا مدل پوشش جزئی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تاریخ وصول: ۹۱/۱۱/۱۴

تاریخ تصویب: ۹۳/۰۲/۰۳

سید جواد حسینی نژاد: دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

سید غلامرضا جلالی نائینی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

\*نویسنده مسئول مقاله: محمد سعید جبل عاملی: دانشکده مهندسی صنایع،

دانشگاه علم و صنعت ایران، [Jabal@iust.ac.ir](mailto:Jabal@iust.ac.ir)

پوشش قرار نمی‌گیرد. رابطه‌های (۳) و (۴) متغیرهای استاندارد هستند. مقادیر  $aij$  تشکیل دهنده ماتریس پوشش می‌باشد که دارای مقادیر ۰ و ۱ است.

با مروری بر مدل‌های جایابی پوشش، این نکته قابل تامل است که این مسائل تنها در فضای گسسته مورد بررسی قرار گرفته است در حالی که در دنیای واقعی ممکن است در فضای پیوسته اتفاق بیافتد. بدین منظور در این مقاله یک مدل جایابی پوشش پیوسته را معرفی می‌کنیم و علاقه‌مندیم  $k$  وسیله را در یک فضای پیوسته شامل  $n$  نقطه تقاضا یا مشتری جایابی کنیم به گونه‌ای که هزینه ریسک عدم پوشش مشتریان حداقل شود. از آنجا که مساله را در شرایط عدم قطعیت بررسی می‌کنیم مساله نهایی را به صورت یک مدل مدیریت ریسک ارائه می‌دهیم.

از آنجا که مدل معرفی شده در این مقاله با بیان مفهوم درجه امکان پوشش و در شرایط فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد، در این بخش مروری بر پژوهش‌های انجام شده در زمینه کاربرد مفاهیم فازی در مسائل جایابی پوشش که در فضای گسسته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، ارائه می‌شود.

برخی پژوهشگران این مساله را با ارائه مقادیر زبانی برای توصیف هر گره مورد بررسی قرار داده‌اند [۵]. در مرجع [۶] دو نسخه فازی مساله کوچکترین دایره<sup>۳</sup> که تعداد مشخصی از نقاط را مورد پوشش قرار می‌دهد، مورد بررسی قرار گرفته است به گونه‌ای که مکان این نقاط به صورت فازی می‌باشند. مدل اولیه به صورت مساله با محدودیت امکان و دومی با محدودیت الزام ارائه شده است. یک نمونه دیگر به صورت مفهوم پوشش تدریجی<sup>۴</sup> در شبکه ارائه شده است [۷]. استفاده از متغیرهای کمکی صفر و یک و تعریف پوشش‌های فازی نیز ارائه شده‌اند. در این مسائل با لگاریتم گرفتن از محدودیت‌های نامساوی و طبیعت متغیرهای صفر و یک به یک مساله ساده تبدیل شده‌اند [۸]. همچنین از برنامه ریزی غیر خطی نیز برای ارائه مدل پوشش فازی استفاده شده است [۹]. در مرجع [۱۰] یک مساله پوشش خطی با محدودیت فاصله به صورت یک مدل چند هدفه فازی و با استفاده از مفهوم سیستم اطلاعات جغرافیایی ارائه شده است. مفهوم فازی همچنین در مدل جایابی و تخصیص پوشش صف مورد استفاده قرار گرفته شده است [۱۱]. در مرجع [۱۲] یک مدل جایابی حداکثر پوشش ارائه شده است. مدل مذکور به تعیین بهترین مکان برای تعداد محدودی وسیله می‌پردازد به گونه‌ای که توابع سطح سرویس دهی بهینه شوند. توابع هدف شامل بیشینه کردن جمعیت مورد پوشش واقع شده توسط وسایل، بیشینه کردن جمعیت با پوشش پشتیبان<sup>۵</sup> و کمینه کردن کل مسافت طی شده می‌باشد. مساله پوشش کناره<sup>۶</sup> نیز تحت محیط فازی مورد بررسی قرار گرفته شده است. این مساله به صورت سه مدل فرموله شده که شامل مدل‌های حداقل انتظاری، حداقل آلفای انتظاری و حداکثر حداقل پوشش می‌باشند [۱۳].

مساله جایابی حداکثر پوشش در شبکه در شرایط عدم قطعیت نیز یکی دیگر از پژوهش‌های انجام شده است که در آن وزن هر یک از نقاط تقاضا ممکن است دقیق نباشد [۱۴]. هم‌چنین در مرجع [۱۵] یک معیار جدید برای مسائل پوشش فازی ارائه شده که حداقل مقدار متوسط عدم باور<sup>۷</sup> در گزینه‌های ممکن می‌باشد. با ارائه معیار حداقل هزینه پوشش، مساله در نهایت به صورت یک مدل دومعیاره ارائه شده است.

استفاده از مفهوم ریسک در مسائل جایابی توسط برخی پژوهشگران مورد بررسی قرار گرفته است. مساله به اشتراک گذاری ریسک<sup>۸</sup> در مدل جایابی انبار با محدودیت ظرفیت با تقاضای غیر دقیق مورد بررسی قرار گرفته است [۱۶]. استفاده از مفهوم فازی در حل مساله مدیریت ریسک در یک مدل جایابی با پارامترهای فازی از دیگر مسائل می‌باشد [۱۷].

در مرجع [۱۸] یک مساله طراحی زنجیره تامین با تقاضا و نرخ بهره غیر دقیق به صورت یک مدل تصادفی چند مرحله‌ای فرموله شده است. بیشتر این مسائل به صورت مدل‌هایی بر مبنای سناریوهای مختلف ارائه شده است که روش‌های حلی مانند بهینه‌سازی استوار مورد استفاده قرار گرفته است [۱۹]. مساله به اشتراک گذاری ریسک در مدل جایابی با تخصیص تقاضاهای آنلاین به انبارهای منطقه‌ای با محدودیت ظرفیت در یک زنجیره تامین چند کاناله<sup>۹</sup> به صورت یک مدل غیرخطی عدد صحیح در مرجع [۲۰] اشاره شده است. لازم به ذکر است که اینگونه مسائل ریسک در مدل‌های جایابی تنها در فضای گسسته مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با مقایسه پژوهش‌های انجام شده با مقاله حاضر دو تفاوت عمده وجود دارد.

۱- ارائه یک مدل پوشش در فضای پیوسته

۲- معرفی شعاع پوشش فازی

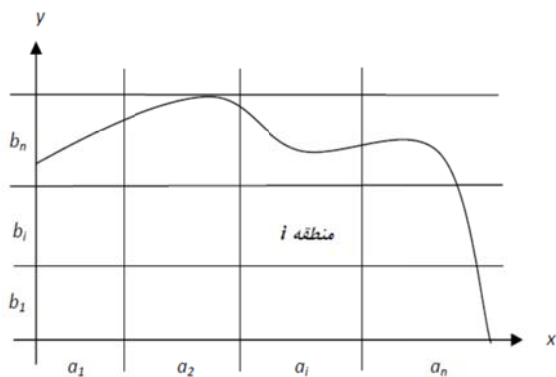
ارائه مدل پوشش در فضای پیوسته این امکان را فراهم می‌سازد که بر خلاف مدل گسسته، تسهیلات در هر فضای شدنی جایابی شوند و صرفاً یک تعداد مکان بالقوه برای قراردادن تسهیلات مورد بررسی قرار نگیرند. همچنین، با معرفی شعاع پوشش فازی، میزان امکان پوشش نیز تعیین می‌گردد که رابطه مستقیمی با فاصله مشتریان از تسهیلات دارد و صرفاً به صورت اعداد ۰ و ۱ نیست بلکه برای هر نوع پوشش یک درجه امکان معرفی می‌شود. همچنین در این مقاله، به علت قابلیت استفاده در محیط گسسته و پیوسته و گستردگی کاربرد از روش آلفا - برش استفاده می‌شود.

باقیمانده مقاله بدین شرح است؛ در بخش ۲ مدل ریاضی ارائه می‌شود. الگوریتم حل بر مبنای روش آلفا- برش در بخش ۳ بیان می‌شود. در بخش ۴ و بخش ۵ یک مثال عددی به همراه تحلیل حساسیت برای تشریح مدل پیشنهادی ارائه می‌شود. یک مطالعه

$$\sum_{j=1}^k z_{ji} \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

$$z_{ji}, u_{ji}, q_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j$$

در این بخش، مدل پیوسته ای ارائه می شود که توسعه مدل  $F_1$  در فضای پیوسته می باشد. تفاوت اصلی مدل پیوسته و گسسته در این است که در مدل گسسته ابتدا ماتریس پوشش با توجه شعاع پوشش تعیین شده به دست می آید و مدل بر مبنای مقادیر ماتریس پوشش فرموله می شود در حالی که در مدل پیوسته ای که ارائه می شود، از آنجا که مکان های بالقوه تسهیلات در ابتدا مشخص نیست ماتریس پوشش وجود ندارد بلکه پس از حل مدل نهایی مقادیر نهایی پوشش در ماتریس پوشش به دست می آیند. همچنین برای هر مقدار پوشش یک درجه امکان پوشش که عددی بین ۰ و ۱ است، محاسبه می شود. بدین منظور در ابتدا فضا را به  $n$  منطقه تقسیم می کنیم همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است. در هر یک از  $n$  منطقه یک مشتری وجود دارد و به همین دلیل پارامتر  $i$  هم برای منطقه و هم برای مشتری در نظر گرفته شده است. مساله به دنبال یافتن مکان  $k$  وسیله جدید در این مناطق می باشد. در ضمن، هر کدام از وسایل با اندیس  $j$  نشان داده می شوند. این مدل مفهوم جدیدی را معرفی می کند و آن اینکه هر وسیله در صورتی در یک منطقه خاص قرار می گیرد که فاصله وسیله مورد نظر با مرکز آن منطقه از یک مقدار از پیش تعیین شده بیشتر نباشد. بدین منظور دو متغیر جدید  $z_{ji}$  و  $u_{ji}$  برای این مدل معرفی می شود. اولی نشان می دهد که آیا وسیله  $j$  در منطقه  $i$  قرار می گیرد یا نه؟ و دومی اینکه آیا مشتری  $i$  توسط وسیله  $j$  مورد پوشش قرار می گیرد یا نه؟ در این مساله، مسافت به صورت فاصله اقلیدسی فرض می شود. در نتیجه مدل صفر و یک غیرخطی  $F_2$  به صورت زیر می باشد:



شکل ۱. تقسیم بندی فضای مساله به چندین منطقه

تابع هدف (۵) هزینه ریسک مشتری های مورد پوشش قرار نگرفته بر اساس ارزش هر مشتری است. رابطه های (۶) و (۷) محدودیت های پوشش هستند که تضمین می کنند که هر مشتری می تواند توسط یک وسیله مورد پوشش قرار گیرد، اگر فاصله بین آنها کمتر از  $R$  باشد.  $u_{ji}$  ها  $\forall j = 1, 2, \dots, n$  و  $\forall i = 1, 2, \dots, k$  ماتریس پوشش را تشکیل می دهند. اگر فاصله بین وسیله  $j$  مشتری  $i$  بزرگتر از  $R$  باشد،  $u_{ji} = 0$  و در غیر این صورت  $u_{ji} = 1$  می شود. از آنجا که  $L$  یک عدد بزرگ است دو رابطه (۶) و (۷) همزمان ارضا می شوند. رابطه (۸) محدودیت تقاضا است که تضمین می کند که  $q_i$  برابر ۱ می شود اگر  $u_{ji}$  برای همه  $j$ ها برابر صفر باشد و بدین معنا است که مشتری  $i$  مورد پوشش قرار نمی گیرد. رابطه (۹) تضمین می کند که اگر فاصله بین وسیله  $j$  و مرکز منطقه  $i$  بزرگتر از  $D$  باشد، آنگاه  $z_{ji} = 0$  بنا بر این وسیله  $j$  به منطقه  $i$  تعلق ندارد و وسیله  $j$  در منطقه  $i$  قرار می گیرد، اگر فاصله بین وسیله  $j$  و مرکز منطقه  $i$  کوچکتر از  $D$  باشد. رابطه (۱۰) تضمین می کند که وسیله  $j$  فقط می تواند در یک منطقه قرار گیرد و رابطه (۱۱) تضمین می کند که حداکثر یک وسیله می تواند در منطقه  $i$  قرار بگیرد.

از آنجا که ما مساله را در شرایط عدم قطعیت مورد بررسی قرار می دهیم، فرض می کنیم که شعاع پوشش یک عدد فازی مثلثی  $\tilde{R} = (R_1, R_1, R_2)$  است که در شکل (۲) نشان داده شده است.

موردی در بخش ۶ مورد بررسی قرار گرفته است و در نهایت بخش ۶ نتایج و تحقیقات آتی پیشنهادی را نشان می دهد.

## ۲. مدل پوشش پیوسته

تابع هدف (۵)  $F_2: \min \sum_{i=1}^n C_i q_i$  (۵)

S.t.

(۶)  $\sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2} \leq R + L(1 - u_{ji}), \quad \forall i, j$

(۷)  $\sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2} \geq R - Lu_{ji}, \quad \forall i, j$

(۸)  $\sum_{j=1}^k u_{ji} + q_i \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$

(۹)  $\sum_{i=1}^n z_{ji} \left( \sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2} \right) \leq D, \quad \forall j$

(۱۰)  $\sum_{i=1}^n z_{ji} = 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$

آنگاه به ازای آلفاهای مختلف، مدل حل می‌شود بدین گونه که در جدول (۱) نشان داده شده است. منظور از منطقه در جدول (۱)، منطقه ای است که هر وسیله به ازای آلفای مورد نظر در آن منطقه قرار گرفته است.

جدول ۱. نتایج حل مساله به روش آلفا-برش

آلفا	وسيله $j$ (وسيله $k$ تا $k$ )			
	$x_j$	$y_j$	منطقه	
LHS	۱	$x_j^1$	$y_j^1$	$Z_{j,i}^1$
	۰.۹	$x_j^{0.9}$	$y_j^{0.9}$	$Z_{j,i}^{0.9}$
RHS	...	...	...	...
	۰.۱	$x_j^{0.1}$	$y_j^{0.1}$	$Z_{j,i}^{0.1}$

هر سطر بیان کننده یک حل می‌باشد که با آلفای متناظر حل شده است.  $x_j^\alpha$  و  $y_j^\alpha$  به ترتیب مختصه  $x$  و  $y$  وسیله  $j$  است که با مقدار  $\alpha$  به دست آمده است.  $Z_{j,i}^\alpha$  مشخص کننده منطقه است که برای جایابی وسیله  $j$  با مقدار  $\alpha$  به دست آمده است. در هر حل مکان تسهیلات و مناطق انتخاب شده برای هر وسیله به دست می‌آیند که درجه امکان این حل برابر آلفای متناظر با آن است. درجه امکان هر منطقه توسط رابطه (۱۶) به دست می‌آید.

$$Poss.(Zone_i) = \frac{\sum_{\alpha \in LHS} \alpha}{\sum_{\alpha \in RHS, LHS} \alpha}, \quad \forall i \quad (16)$$

منظور از  $\alpha^i$  مقادیر آلفایی است که با آنها منطقه  $i$  انتخاب شده است. حال با داشتن مقادیر درجه امکان هر منطقه، بهترین مکان برای جایابی تسهیلات به دست می‌آید. بدین منظور  $k$  تا از مناطقی که بیشترین درجه امکان را دارند انتخاب شده و تسهیلات را در این مناطق جایابی می‌کنیم.

با فرض اینکه  $i^+$ ، مجموعه  $k$  تا از مناطق است که بیشترین درجه امکان را دارند، برای به دست آوردن بهترین مکان تسهیلات که به ازای هر  $j$  با  $X^* = (x_j^*, y_j^*)$  نشان داده می‌شود، از رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) استفاده می‌شود.

$$x_j^* = \frac{\sum_{\alpha \in i^+} \alpha \times x_j^\alpha}{\sum_{\alpha \in i^+} \alpha}, \quad \forall i^+ = 1, 2, \dots, k, \quad (17)$$

$$y_j^* = \frac{\sum_{\alpha \in i^+} \alpha \times y_j^\alpha}{\sum_{\alpha \in i^+} \alpha}, \quad \forall i^+ = 1, 2, \dots, k, \quad (18)$$

منظور از  $\alpha^{i^+}$  مقادیر آلفایی است که با آنها منطقه  $i^+$  انتخاب شده است. در رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) برای تعیین مکان بهینه هر وسیله، از میانگین وزنی مختصات به دست آمده یک وسیله در  $k$  منطقه انتخاب شده استفاده می‌کند به گونه ای که وزن‌های آن

اگر فاصله بین یک مشتری و یک وسیله کوچکتر از  $R_1$  باشد، آنگاه درجه امکان پوشش برابر یک است و اگر بزرگتر از  $R_2$  باشد، درجه امکان پوشش برابر صفر می‌شود و اگر بین  $R_1$  و  $R_2$  باشد، درجه امکان پوشش بین صفر و یک است. از آنجا که عدم قطعیت ممکن است موجب از دست دادن تعدادی مشتری شود، ما آن را به عنوان یک مدل مدیریت ریسک در نظر می‌گیریم. در نتیجه مدل  $F_3$  به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$F_3: (5) \text{ and } (8) - (11)$$

$$\left( \sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2} \right) \leq \bar{R} + L(1 - u_{ji}), \quad \forall i, j \quad (12)$$

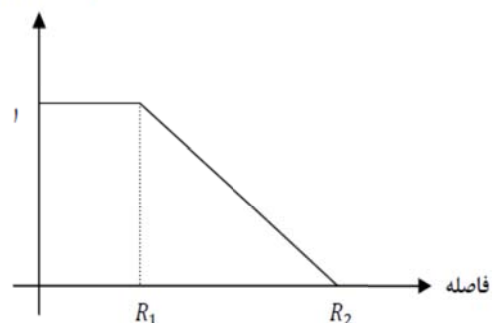
$$\left( \sqrt{(x_j - a_i)^2 + (y_j - b_i)^2} \right) \geq \bar{R} - Lu_{ji}, \quad \forall i, j \quad (13)$$

نکته مهمی که در این مدل وجود دارد این است که پس از حل مدل، مقادیر پوشش با نام ماتریس پوشش به دست می‌آیند که بر خلاف مدل قطعی که این مقادیر فقط ۰ یا ۱ می‌باشند در مدل  $F_3$  مقادیر پوشش یا ۰ می‌باشند و یا ۱ با درجه‌های امکان مختلف به گونه ای که مثلاً اگر مقدار پوشش یک مشتری توسط یک وسیله خاص ۱ و با درجه امکان ۰.۷۵ باشد به این معنا است که مشتری مورد نظر با درجه امکان ۰.۷۵ مورد پوشش قرار گرفته است.

### ۳. روش حل

در این بخش یک روش حل برای مساله پوشش پیوسته با شعاع فازی با استفاده از روش آلفا-برش ارائه می‌شود. بدین منظور که به ازای هر آلفا، یک مدل قطعی به دست می‌آید و با آن مقدار آلفا، مدل حل می‌شود. میزان آلفا بیان کننده درجه امکان هر حل می‌باشد. بدین منظور  $LHS$  و  $RHS$  را با استفاده از رابطه (۱۴) و (۱۵) به دست می‌آید.

درجه امکان پوشش



شکل ۲. شعاع پوشش فازی  $\bar{R}$

$$LHS = R_1, \quad (14)$$

$$RHS_\alpha = -\alpha(R_2 - R_1) + R_2, \quad \forall \alpha \quad (15)$$

جدول ۲. مشخصات مناطق و مشتریان

مشتری/منطقه	مکان منطقه	ارزش مشتری
۱	(۲و۱)	۱
۱.۵	(۳و۱)	۲
۱.۱	(۱و۲)	۳
۱.۲	(۲و۲)	۴
۱	(۳و۲)	۵
۱.۳	(۱و۳)	۶
۱.۴	(۲و۳)	۷
۱.۶	(۳و۳)	۸
۱	(۴و۳)	۹
۱	(۱و۴)	۱۰
۱.۱	(۲و۴)	۱۱
۲	(۳و۴)	۱۲
۱	(۴و۴)	۱۳
۱	(۲و۵)	۱۴
۱.۵	(۳و۵)	۱۵
۱.۳	(۴و۵)	۱۶

برای استفاده از روش آلفا-برش، برای مقادیر آلفا از ۰.۱ تا ۱ مساله را حل می‌کنیم. برای این منظور از رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) استفاده می‌کنیم. نتایج روش آلفا-برش در جدول (۳) نشان داده شده است. برای حل این مساله از نرم افزار GAMS 21.7 استفاده شده است.

جدول ۳. نتایج روش آلفا-برش

آلفا	وسيله ۱		وسيله ۲		وسيله ۳	
	مختصات	منطقه	مختصات	منطقه	مختصات	منطقه
۱	(۱.۶۰ و ۳.۲۹)	۷	(۲.۹۶ و ۳.۷۰)	۱۲	(۳.۴۹ و ۴.۹۱)	۱۵
۰.۹	(۲.۳۴ و ۱.۳۶)	۱	(۲.۳۴ و ۳.۳۶)	۷	(۳.۳۶ و ۴.۶۶)	۱۵
۰.۸	(۲.۷۰ و ۱.۴۰)	۲	(۲.۳۰ و ۲.۷۴)	۷	(۳.۴۰ و ۴.۷۰)	۱۵
۰.۷	(۲.۳۶ و ۱.۳۵)	۱	(۲.۲۶ و ۳.۴۳)	۷	(۳.۳۶ و ۴.۶۵)	۱۵
۰.۶	(۲.۶۸ و ۱.۶۲)	۵	(۲.۱۱ و ۳.۱۱)	۷	(۳.۳۶ و ۴.۶۶)	۱۵
۰.۵	(۲.۴۴ و ۱.۷۷)	۴	(۱.۳۶ و ۳.۶۵)	۱۰	(۳.۷۳ و ۳.۵۸)	۱۳
۰.۴	(۲.۵۶ و ۱.۲۴)	۲	(۱.۴۵ و ۳.۲۳)	۶	(۳.۰۰ و ۴.۰۰)	۱۲
۰.۳	(۲.۹۲ و ۱.۴۹)	۲	(۱.۰۰ و ۳.۰۴)	۶	(۳.۰۲ و ۴.۰۵)	۱۲
۰.۲	(۲.۵۰ و ۱.۹۸)	۵	(۱.۴۵ و ۳.۰۰)	۶	(۳.۰۷ و ۴.۰۶)	۱۲
۰.۱	(۲.۰۰ و ۱.۵۰)	۴	(۱.۵۰ و ۳.۹۷)	۱۰	(۳.۴۳ و ۴.۰۰)	۱۲

می‌آید که به ترتیب درجه امکان در جدول (۴) نشان داده شده است. در اینجا برخی مناطق به خاطر همسایگی به عنوان یک

آلفاهایی است که با آن مقادیر، وسیله موردنظر در آن منطقه جایابی شده است. در نهایت، برای به دست آوردن مقدار تابع هدف نهایی و مقادیر پوشش،  $X^*$  در مدل اصلی جایگذاری می‌شوند. اگر  $d(j, i)$  فاصله بین وسیله  $i$  و مشتری  $j$  باشد، برای به دست آوردن میزان درجه امکان پوشش از رابطه (۱۹) استفاده می‌شود.

$$S_{ji} = \begin{cases} 1, & d(j, i) \leq R_1 \\ \frac{R_2 - d(j, i)}{R_2 - R_1}, & R_1 \leq d(j, i) \leq R_2 \\ 0, & R_2 \leq d(j, i) \end{cases} \quad (19)$$

که در آن  $S_{ji}$  میزان درجه امکان پوشش مشتری  $i$  توسط وسیله  $j$  می‌باشد. اگر فاصله بین یک مشتری از یک وسیله خاص کوچکتر از  $R_1$  باشد درجه امکان پوشش برابر با ۱، اگر بزرگتر از  $R_2$  باشد درجه امکان پوشش برابر با ۰ و اگر بین  $R_1$  و  $R_2$  باشد بین ۰ و ۱ است.

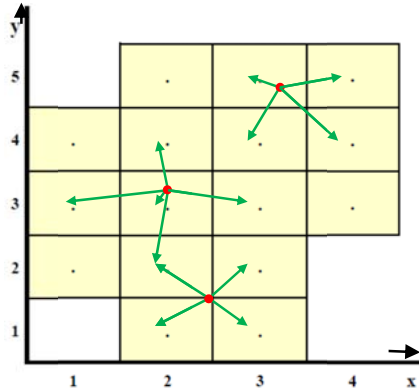
#### ۴. مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی برای تشریح مدل و روش حل پیشنهادی، ارائه می‌شود.

می‌خواهیم ۳ وسیله جدید را در فضایی شامل ۱۶ منطقه به گونه ای جایابی کنیم که ریسک ناشی از عدم پوشش مشتریان حداقل باشد. مکان هر منطقه به همراه ارزش مشتریان در جدول (۲) نشان داده شده است. با فرض اینکه شعاع پوشش فازی برابر  $\bar{R} = (0.7, 0.7, 1.2)$ ،  $D = 0.50$  و  $L = 1000$  باشد، مساله را برای به دست آوردن مکان تسهیلات و مقادیر پوشش حل می‌کنیم.

با توجه به نتایج به دست آمده از روش آلفا-برش، درجه امکان هر منطقه برای جایابی تسهیلات با استفاده از رابطه (۱۶) به دست

پوشش مشتریان توسط وسایل را نشان می‌دهد. تابع هدف نهایی برابر  $0.205$  می‌باشد که نشان دهنده میزان ریسک ناشی از عدم پوشش مشتریان است.

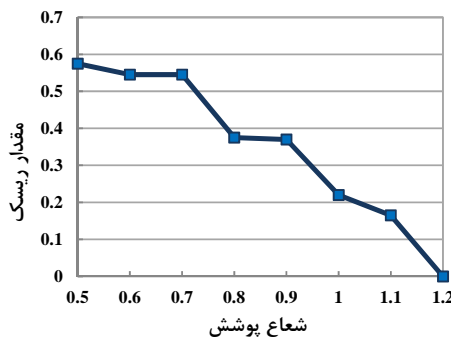


شکل ۳. حل نهایی مثال عددی

### ۵. تحلیل حساسیت

در این بخش به منظور بررسی کارایی مدل نسبت به تغییر پارمترها، یک تحلیل حساسیت انجام می‌شود. به منظور بررسی کارایی مدل  $F_2$ ، تحلیل حساسیت را بر روی پارامتر  $R$  انجام می‌دهیم. نتایج محاسبات در شکل (۴) نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود با افزایش شعاع پوشش میزان تابع هدف که همان ریسک از دست دادن مشتریان می‌باشد، کاهش می‌یابد. همچنین با شعاع پوشش  $1.2$  تمامی مشتریان تحت پوشش قرار می‌گیرند در حالی که با شعاع پوشش  $0.5$  نزدیک به  $60$  درصد مشتریان تحت پوشش قرار نمی‌گیرند.

نکته قابل ذکر دیگر اینکه برای حل مدل با تعداد مشتریان و تسهیلات بیشتر، نیاز به ارائه روش‌های ابتکاری و فرا ابتکاری می‌باشد که به عنوان یکی از تحقیقات آتی مورد نظر می‌باشد.



شکل ۴. تحلیل حساسیت مدل بر روی مثال عددی

### ۶. مطالعه موردی

به منظور بررسی کارایی مدل‌های ارائه شده یک مطالعه موردی در شهرداری تهران ارائه می‌گردد. یکی از وظایف شهرداری کلان شهر

مجموعه منطقه در نظر گرفته شده اند. به عنوان مثال منطقه ۱ و ۲ به خاطر همسایگی به عنوان یک مجموعه منطقه  $\{1,2\}$  در نظر گرفته شده است. همانطور که در جدول (۴) نشان داده شده است منطقه ۱۵ با درجه امکان  $0.73$ ، منطقه ۷ با درجه امکان  $0.73$  و مجموعه منطقه  $\{1,2\}$  با درجه امکان  $0.56$  برای جایابی سه وسیله مورد نظر انتخاب می‌شوند.

جدول ۴. درجه امکان مناطق برای جایابی تسهیلات

منطقه	درجه امکان
۱۵	$0.73$
۷	$0.73$
$\{1,2\}$	$0.56$
$\{1,2,3\}$	$0.45$
$\{4,5\}$	$0.26$
۶	$0.16$
۱۰	$0.11$
۳	$0$
۸	$0$
۹	$0$
۱۱	$0$
۱۴	$0$
۱۶	$0$

برای به دست آوردن مکان تسهیلات با توجه به مقادیر امکان هر منطقه از رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) استفاده می‌شود که نتیجه آن به شرح زیر است:

$$(x_1^*, y_1^*) = (2.10, 3.19)$$

$$(x_2^*, y_2^*) = (2.52, 1.37)$$

$$(x_3^*, y_3^*) = (3.40, 4.73)$$

بنابراین وسایل مورد نظر به ترتیب در مناطق ۱۵ و ۷ و ۲ جایابی می‌شوند. همچنین برای به دست آوردن مقادیر پوشش مساله را یک بار دیگر حل می‌کنیم. برای به دست آوردن میزان درجه امکان پوشش از رابطه (۱۹) استفاده می‌شود. نتایج نهایی حل مساله در جدول (۵) نشان داده شده است.

جدول ۵. مقادیر پوشش

وسيله (j)	مقدار پوشش (درجه امکان پوشش و مشتری) $(i, S_{ji})$
۱	$(11, 0.77)$ و $(8, 0.56)$ و $(7, 0.00)$ و $(6, 0.17)$ و $(4, 0.01)$
۲	$(5, 0.81)$ و $(4, 0.76)$ و $(1, 0.00)$ و $(2, 0.00)$
۳	$(16, 0.00)$ و $(13, 0.51)$ و $(12, 0.74)$ و $(15, 0.00)$

به عنوان مثال عبارت  $(6, 0.17)$  در سطر مربوط به وسیله ۱ بیان می‌کند که مشتری ۶ با درجه امکان  $0.17$  توسط وسیله ۱ مورد پوشش قرار می‌گیرد. شکل (۳) مکان نهایی تسهیلات و نحوه

گیری هر منطقه و اهمیت هر منطقه در جدول (۶) نشان داده شده و شعاع پوشش فازی  $D=I$  و  $\bar{R} = (2.5, 2.5, 5)$  در نظر گرفته شده است. مساله با آلفاهای ۰.۲، ۰.۴، ۰.۶، ۰.۸ و ۱ حل شده است. در نهایت، مکان قرارگیری هر دفتر در جدول (۷) و حل نهایی در شکل (۶) ارائه شده است.

#### جدول ۶. مقادیر مکان و اهمیت هر منطقه شهرداری برای

##### تاسیس دفاتر الکترونیک در مطالعه موردی

منطقه	اهمیت	مختصه	
		x	y
۱	۹	۳۵.۵	۳۶.۵
۲	۱۱	۲۸	۳۲.۵
۳	۷	۳۷	۲۸.۵
۴	۱۱	۴۲	۲۷
۵	۱۱	۲۲.۵	۲۵
۶	۷	۳۲.۵	۲۶.۵
۷	۶	۳۶	۲۶
۸	۳	۴۲	۲۵
۹	۲	۲۵.۵	۲۰
۱۰	۳	۲۷.۵	۲۰
۱۱	۵	۳۰.۵	۱۶
۱۲	۷	۳۳	۱۷.۵
۱۳	۴	۳۹	۲۰.۵
۱۴	۶	۳۷.۵	۱۸
۱۵	۶	۴۱	۱۰.۵
۱۶	۶	۳۲.۵	۱۰.۵
۱۷	۳	۲۷.۵	۱۳.۵
۱۸	۴	۲۵.۵	۱۲
۱۹	۴	۲۹.۵	۹.۵
۲۰	۵	۳۵	۲
۲۱	۳	۱۵.۵	۲۱

تهران با مجموعه ای شامل ۲۲ منطقه، صدور انواع پروانه‌های ساختمانی، ارائه خدمات نظارت فنی و ... می باشد. شورای شهر تهران با توجه به گستردگی این وظایف و به منظور ارائه خدمات سریع با کیفیت به شهروندان مصوبه ای را تصویب کرده که به موجب آن، شهرداری تهران ملزم به راه اندازی دفاتر خدمات الکترونیک از طریق بخش خصوصی گردیده است. تاکنون نزدیک به ۱۳۰ دفتر در شهر تهران با توجه به نیاز شهروندان راه اندازی شده است. یکی از مواردی که اخیراً در شهرداری مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته، این است که این دفاتر بتوانند خدمات خود را به صورت فرامنطقه ای پوشش دهند و یا به عبارتی یک دفتر خدمات الکترونیک همزمان بتواند خدمات خود را به چند منطقه ارائه دهد. با توجه به اینکه هدف از تاسیس این دفاتر تسریع در خدمت رسانی می باشد، در این بخش به منظور جایابی ۱۰ دفتر جدید خدمات الکترونیک شهر از مدل پوشش پیوسته بدون هزینه ثابت استفاده می کنیم. شکل (۵) وضعیت مراکز ۲۲ گانه شهرداری تهران را نشان می دهد که به عنوان مشتری در نظر گرفته شده اند و ما به دنبال جایابی ۱۰ وسیله جدید به منظور خدمت رسانی به این مناطق هستیم. برای حل مساله فضا، در دو محور x و y تقسیم شده که x از ۰ تا ۵۵ و y از ۰ تا ۴۱ می باشد. بدین ترتیب مکان هر منطقه مشخص می شود.



شکل ۵. نقشه شهر تهران با ۲۲ منطقه شهرداری

در این مساله اهمیت هر منطقه برای تاسیس دفاتر با توجه به شرایط و دفاتر موجود در هر منطقه تعیین شده است. محل قرار

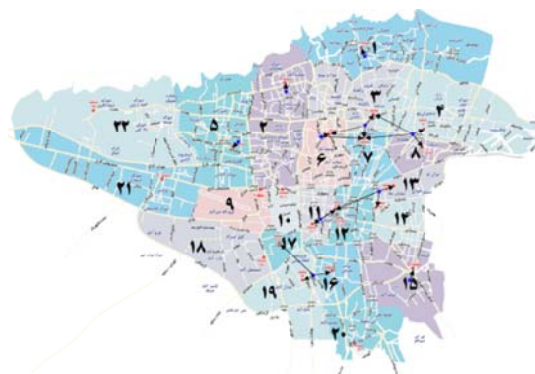
#### جدول ۷. امکان انتخاب هر منطقه و مکان دفاتر الکترونیک برای مطالعه موردی

منطقه انتخاب شده	مختصه y	مختصه x	درجه امکان	مناطق	دفتر خدمات
۱	۳۵.۳	۳۶	۱.۰۰	۱	۱
۲	۳۱.۸	۲۷.۹	۱.۰۰	۲	۲
۷	۲۷.۴	۳۶	۱.۰۰	۷ و ۳	۳
۱۳	۱۹.۹	۳۷.۴	۱.۰۰	۱۳ و ۱۴	۴
۱۱	۱۶.۸	۳۱.۵	۰.۹۳	۱۱ و ۱۲	۵



۶	۱۹ و ۱۶	۰.۹۳	۳۰.۸	۱۰.۱	۱۹
۷	۴	۰.۸۰	۴۰.۸	۲۶.۴	۴
۸	۵	۰.۸۰	۲۲.۷	۲۵.۲	۵
۹	۱۵	۰.۶۷	۴۰.۷	۹.۴	۱۵
۱۰	۶	۰.۵۳	۳۲	۲۶.۴	۶

- مناطق ۳، ۴، ۷ و ۸ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۵ می تواند خدمات مربوط به منطقه ۵ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۱۵ می تواند خدمات مربوط به منطقه ۱۵ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۶ می تواند خدمات مربوط به مناطق ۶ و ۷ را پوشش دهد.



شکل ۶. حل نهایی مطالعه موردی در شهرداری تهران

### ۷. نتیجه گیری

این مقاله، یک مدل جایابی پوشش را در محیط فازی ارائه داد. به خاطر عدم قطعیت شعاع پوشش، درجه امکان پوشش با استفاده از مفهوم فازی معرفی شد. مدل نهایی ارائه شده با بیان مفهوم ریسک مشتریانی که مورد پوشش قرار نگرفته اند به صورت یک مدل مدیریت ریسک ارائه شد. در نهایت، مساله با روش آلفا-برش حل شد. یکی از مزایای مدل پیشنهادی، ارائه مدل پیوسته پوشش بود که توسعه مدل های گسسته آن می باشد. این توسعه با اضافه کردن دو متغیر صفر و یک و افزودن محدودیت حداکثر فاصله یک وسیله از مرکز یک منطقه برای قرارگیری آن در منطقه مورد نظر، انجام شد. در نهایت، تحلیل حساسیت برای بررسی کارایی مدل و یک مطالعه موردی در شهرداری تهران به منظور نشان دادن کاربرد مدل ارائه گردید. نتایج به دست آمده از تحلیل حساسیت نشان می دهد که با افزایش شعاع پوشش، میزان تابع هدف که همان ریسک از دست دادن مشتریان می باشد، کاهش می یابد و بالعکس. توسعه مدل پیشنهادی به مدل جایابی و تخصیص پوشش و ارائه روش های ابتکالی و فرا ابتکاری برای حل مدل، از مواردی است که می تواند به عنوان تحقیقات آتی مورد مطالعه قرار گیرد.

- با توجه به نتایج به دست آمده از بین مناطق شهرداری، مناطق ۹، ۱۰، ۱۸، ۲۰، ۲۱ و ۲۲ مورد پوشش قرار نمی گیرند.
- بر مبنای حل نهایی مساله، دفاتر خدمات الکترونیک شهر می توانند نیازهای مناطق را به صورت زیر پوشش می دهند:
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۱ می تواند خدمات مربوط به منطقه ۱ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۲ می تواند خدمات مربوط به منطقه ۲ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۷ می تواند خدمات مربوط به مناطق ۳، ۶ و ۷ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۱۳ می تواند خدمات مربوط به مناطق ۱۲، ۱۳ و ۱۴ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۱۱ می تواند خدمات مربوط به مناطق ۱۱ و ۱۲ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۱۹ می تواند خدمات مربوط به مناطق ۱۶، ۱۷ و ۱۹ را پوشش دهد.
- ✓ دفتر جایابی شده در منطقه ۴ می تواند خدمات مربوط به

- 9. Multi-channel supply chain
- 10. Left Hand Side
- 11. Right Hand Side

### مراجع

[1] Church R, ReVelle C. The maximal covering location problem, Papers Region Sci Assoc, 1974, Vol. 32, pp. 101-118.

### پی نوشت

1. Totally covering
2. Partially covering
3. Smallest circle
4. Gradual coverage
5. Backup coverage
6. Edge covering
7. Misbelieve
8. Risk pooling

- [12] Araz C, Selim H, Ozkarahan I. A fuzzy multi-objective covering-based vehicle location model for emergency services, *Computers & Operations Research*, 2007, Vol. 34, pp. 705-726.
- [13] Ni Y. Fuzzy minimum weight edge covering problem, *Applied Mathematical Modelling*, 2008, Vol. 32, pp. 1327-1337.
- [14] Batanovic V, Petrovic D, Petrovic R. Fuzzy logic based algorithms for maximum covering location problems, *Information Sciences*, 2009, Vol. 179, pp. 120-129.
- [15] Sirbiladze G, Ghvaberidze B, Latsabidze T, Matsaberidze B. Using a minimal fuzzy covering in decision-making problems, *Information Sciences*, 2009, Vol. 179, pp. 2022-2027.
- [16] Ozsen L, Coullard CR, Daskin MS. Capacitated warehouse location model with risk pooling, *Naval Research Logistics*, 2008, Vol. 55, pp. 295-312.
- [17] Wang S, Watada J. A hybrid modified PSO approach to VaR-based facility location problems with variable capacity in fuzzy random uncertainty, *Information Sciences*, 2012, Vol. 192, pp. 3-18.
- [18] Nickel S, Saldanha-da-Gama F, Ziegler HP. A multi-stage stochastic supply network design problem with financial decisions and risk management, *Omega*, 2012, Vol. 40, pp. 511-524.
- [19] Hahn GJ, Kuhn H. Value-based performance and risk management in supply chains: A robust optimization approach, *International Journal of Production Economics*, 2012, Vol. 139, pp. 135-144.
- [20] Liu K, Zhou Y, Zhang Z. Capacitated location model with online demand pooling in a multi-channel, supply chain, *European Journal of Operational Research*, 2010, Vol. 207, pp. 218-231.
- [2] Toregas C, Swain R, ReVelle C, Bergman L. The location of emergency service facilities, 1971, *Oper Res*, Vol. 19, pp. 1363-1373.
- [3] Francis RL, Leon F, McGinnis LF, White JA. *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*, NY, Prentice Hall, 1992.
- [4] Mirchandani PB, Francis RL. *Discrete Location Theory*, Wiley, New York, 1992.
- [5] Perez JAM, Vega JMM, Verdegay JL. Fuzzy location problems on networks, *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, Vol. 142, pp. 393-405.
- [6] Lushu L, Kabadi SN, Nair KPK. Fuzzy versions of the covering circle problem, *European Journal of Operational Research*, 2002, Vol. 137, pp. 93-109.
- [7] Berman O, Krass D, Drezner Z. The gradual covering decay location problem on a network, *European Journal of Operational Research*, 2003, Vol. 151, pp. 474-480.
- [8] Chiang CI, Hwang MJ, Liu YH. Solving a fuzzy set-covering problem, *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, Vol. 40, pp. 861-865.
- [9] Chiang CI, Hwang MJ, Liu YH. An alternative formulation for certain fuzzy set-covering problems, *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, Vol. 42, pp. 363-365.
- [10] Huang B, Liu N, Chandramouli M. A GIS supported ant algorithm for the linear feature covering problem with distance constraints, *Decision Support Systems*, 2006, Vol. 42, pp. 1063-1075.
- [11] Shavandi H, Mahlooji H. A fuzzy queuing location model with a genetic algorithm for congested systems, *Applied Mathematics and Computation*, 2006, Vol. 181, pp. 440-456.