نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـایع و مدیـــریت تولیـــد   زمستان ۱۳۸۸- صفحـه ۵۱-۳۹

شمـــاره ۴، جلـــد ۲۰، زمستان ۱۳۸۸

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنایـــع و مدیـــریت تولیـــد

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

Journal Website: http://IJIEPM.iust.ac.ir/

Production-Inventory System of Deteriorating Items with Inflation Induced Demand

S. Emami, M. Rahdar & A. Shahandeh*

S.Emami. *Department of Industrial & System Engineering Isfahan University of Technology.*
M. Rahdar. *Department of Industrial & System Engineering Isfahan University of Technology.*
A. Shahandeh*. Department of Industrial & System Engineering Isfahan University of Technology.*

Keywords

inflation, deteriorating items,
present value,
EPQ,
optimal production uptime

ABSTRACT

This paper considers the impact of inflation on the EPQ model for deteriorating items subject to random machine breakdowns and fixed maintenance period. The demand rate is assumed to be a function of inflation and the demand increase due to inflation. The objective is to determine the optimal production uptime that minimizes the present value of expected total costs per unit time consisting of setup, corrective maintenance, inventory carrying, deterioration, and lost sales costs with consider inflation rate over a finite-planning horizon. With consideration complexity of model and using The Taylor series approximations to all exponential terms, finally a relation earned for approximate calculation the optimal production uptime. Also, the effects of inflation, deterioration, machine breakdowns etc. on the optimal production uptime the optimal are studied with the help of numerical example.

سیستم تولید- موجودی اقلام فسادپذیر با تقاضای تأثیرپذیر از تورم

سعید امامی، محمد راهدار و علی شاهنده

کلمات کلیدی

تورم، اقلام فسادپذیر،
ارزش فعلی،
EPQ،
دوره بهینه تولید

چکیده:

این مقاله به بررسی اثر تورم بر مدل EPQ برای اقلام فسادپذیر و با فرض خرابی تصادفی ماشین و دوره تعمیر ثابت، می‌پردازد. نرخ تقاضا تابعی از تورم فرض شده و با افزایش تورم، تقاضا نیز افزایش می‌یابد. هدف مدل، تعیین دوره زمانی بهینه تولید در سیستم تولید- موجودی می‌باشد به طوریکه مجموع ارزش فعلی کلیه هزینه‌ها شامل هزینه نگهداری موجودی، هزینه اقلام فاسد شده، هزینه

تاریخ وصول: ۸۸/۶/۲۲
تاریخ تصویب: ۸۸/۱۱/۹

سعید امامی، کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی صنایع ، دانشگاه صنعتی اصفهان s_emami@in.iut.ac.ir
محمد راهدار، کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی اصفهان m_rahdar@in.iut.ac.ir
دکتر علی شاهنده، دانشیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی اصفهان ali-nook@cc.iut.ac.ir

راه‌اندازی، هزینه تشخیص و تعمیر خرابی ماشین و هزینه فروش از دست رفته، در واحد زمان با در نظر گرفتن نرخ تورم در یک افق برنامه‌ریزی محدود، حداقل شود. با توجه به پیچیدگی مدل و استفاده از روابط تقریبی سری تیلور برای عبارات نمائی، در نهایت رابطه‌ای برای محاسبه تقریبی دوره زمانی بهینه تولید بدست آمده است و اثرات تورم، فساد اقلام، خرابی ماشین و ... بر دوره بهینه تولید به کمک تجزیه و تحلیل عددی مطالعه شده است.

۱. مقدمه

مدل مقدار تولید اقتصادی[2] یک مدل ریاضی ساده برای مدیریت موجودی در سیستم توأم موجودی و تولید است. مدل EPQ برای مسأله‌ای که یک محصول برروی ماشینی منفرد تولید می‌شود و دارای تقاضای ثابت در یک افق برنامه‌ریزی بی‌نهایت است، کاربرد دارد. این مدل، به‌عنوان یکی از عمومی‌ترین مدل‌های کنترل موجودی مطرح شده است [۱].

مدل کلاسیک EPQ تحت فرضیات محدود کننده‌ای توسعه داده شده است. در بسیاری از مقالات سعی شده که مدل کلاسیک را از فرضیات محدودکننده رها کنند. از جمله فرضیات محدودکننده این مدل این است که خرابی یک ماشین در طول اجرای تولید، هیچ‌گاه رخ نداده و اقلام تولیدی عمر طولانی و نامحدود دارند و همچنین تقاضا و هزینه‌های درگیر در سیستم تولید- موجودی در طول زمان ثابت باقی می‌مانند.

در حالت کلی، معمولاً همه سیستم‌های تولیدی، مواجه با خرابی‌های تصادفی شده و اقلام تولیدی در طول زمان دچار فساد می‌شوند و برخی از کشورها دارای نرخ تورم بسیار بالائی هستند. مدل‌های متعددی برای رها نمودن مدل کلاسیک EPQ از محدودیت عمر طولانی و نامحدود اقلام، در طول چند دهه گذشته پیشنهاد شده است.

میسرا [۲] مدل EPQ را برای اقلام فسادپذیر با نرخ‌های ثابت و متغیر فسادپذیری مورد بررسی قرار داده است. شاه و جایسوال [۳] مدل میسرا را با در نظر گرفتن پس‌افت توسعه دادند. هانگ و هانگ [۴] اثرات دو سیاست موجودی LIFO و FIFO را برای اقلام فسادپذیر با توزیع وایبل مورد بررسی قرار دادند. جودهری و چادهری [۵] مدلی با تقاضای قطعی و احتمالی ارائه کردند.

السید و ترسی [۶] دو مدل EPQ، یکی برای تقاضای قطعی و پس‌افت و دیگری با فرض اینکه تقاضا متغیری تصادفی با توزیع نرمال و دارای میانگین و واریانس مشخص می‌باشد، ارائه کردند. کانگ و کیم [۷] مدل EPQ اصلاح شده‌ای را با تعیین دو سطح قیمت و تولید به منظور حداکثر نمودن سود، ارائه کردند. پارک [۸] یک مدل تولید- موجودی با مواد اولیه فسادپذیر ولی محصول نهائی فسادناپذیر مورد بررسی و مطالعه قرار داد.

هانگ و چوی [۹] مدل‌هائی را تحت سیاست‌های موجودی LIFO و FIFO با فسادپذیری وایبل و سفارشات عقب افتاده توسعه دادند.

رافت [۱۰] با در نظر گرفتن مدل ارائه شده توسط پارک [۸] مدلی را با محصولات نهائی فسادپذیر ارائه کرد. دی و چادری [۱۱] مدلی را با فرض سفارشات عقب‌افتاده برای کمبودها و نرخ فسادپذیری که تابع خطی از زمان است، پیشنهاد کردند.

آگاروال و بهاری [۱۲] مدلی با فرض نرخ فسادپذیری ثابت و نرخ تقاضای کاهشی نمائی منفی و عدم وجود کمبود و همچنین نرخ تولید مشخص که می‌تواند از دوره‌ای به دوره دیگر در طول افق برنامه‌ریزی تغییر کند را پیشنهاد کردند. هنگ و همکاران [۱۳] مدل تولید- موجودی تعمیم یافته‌ای از مدل میسرا در حالتی که پس‌افت مجاز است، ارائه کردند.

بلخی و بن‌خروف [۱۴] روشی را برای دستیابی به زمان سیکل تولید بهینه اقلام فسادپذیر در مدلی که نرخ‌های تقاضا و تولید توابعی از زمان هستند، پیشنهاد کردند. سو و همکاران [۱۵] حالتی با نرخ ثابت فسادپذیری در طول افق زمانی محدود را مورد ملاحظه قرار دادند که نرخ تولید وابسته به تقاضا و کمبود مجاز است. وی و لو [۱۶] روش جریان نقدی تنزیل شده را برای سیستم تولید- موجودی مورد استفاده قرار دادند که نرخ فسادپذیری بوسیله دو پارامتر توزیع وایبل مدل‌سازی شده است. یانگ و وی [۱۷] سیستم تولید- موجودی با چندین اندازه انباشته با نرخ‌های تولید و تقاضای ثابت را مورد بررسی قرار دادند. سینگا وانگ چیو و همکاران [۱۸] مدل EPQ با در نظر گرفتن ضایعات، دوباره‌کاریها و خرابیهای تصادفی ماشینها را مورد بررسی قرار دادند.

لین و گنگ [۱۹] برای اولین بار، مدل EPQ برای یک محصول منفرد با فسادپذیری نمائی و تحت خرابی تصادفی ماشین را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای مدل‌سازی، از سیاست کنترل موجودی تجدید نشدنی[3] استفاده کردند. تحت این سیاست، اگر یک خرابی در طول زمان اجرای تولید رخ دهد، تولید فوراً متوقف می‌شود و وقتی که همه موجودی‌های در دست تمام شوند، تولید جدید آغاز می‌شود.

عمل تشخیص و تصحیح خرابی‌های سیستم تولید بلافاصله بعد از وقوع یک خرابی آغاز می‌شود. سیستم تولید بعد از هر عمل نگهداری و تعمیرات به شرایط کاری ابتدائی بر می‌گردد. همچنین فرض می‌شود که فاصله زمانی بین شروع تولید جدید و زمانی که یک خرابی رخ می‌دهد (زمان خرابی) یک متغیر تصادفی با توزیع نمائی است. عمل تشخیص و تصحیح خرابی‌ها، یک مقدار ثابت از

[2]- *Economic Production Quantity (EPQ)*

[3]- *No-Resumption (NR) inventory control policy*

زمان را صرف می‌کند.

اگر یک خرابی قبل از اتمام زمان تولید رخ دهد و ذخایر موجودی تا وقوع یک خرابی، برای پوشش تقاضا در طول دوره تعمیر کافی نباشد، آنگاه کمبود رخ می‌دهد. در این حالت فرض شده است که تقاضاها فروش از دست رفته هستند. قبل از هر اجرای تولید، یک آماده‌سازی نیاز است و یک هزینه نگهداری و تعمیر پیشگیرانه، همیشه در هزینه آماده‌سازی آورده می‌شود. از آنجائی که زمان خرابی در طول اجرای تولید یک متغیر تصادفی است، هدف تعیین یک دوره زمانی بهینه تولید است که میانگین هزینه را در واحد زمان حداقل کند. این هزینه شامل، هزینه راه‌اندازی، هزینه تشخیص و تصحیح عیب‌ها، هزینه نگهداری موجودی، هزینه فساد اقلام و هزینه فروش از دست رفته می‌باشد.

همه مدل‌های فوق بر پایه این فرض توسعه داده شده‌اند که تقاضا و هزینه‌های درگیر در سیستم تولید- موجودی در طول زمان ثابت باقی می‌ماند.

این فرض در زندگی واقعی چندان صحیح نبوده چرا که تعدادی از کشورها دارای نرخ تورم سالیانه بالائی هستند. گذشته از این، تورم بر روی تقاضای محصولات معین اثر می‌گذارد. افزایش تورم در دوره‌های خاص، موجب عدم اطمینانی به آینده و کاهش ارزش پول شده و این امر باعث کاهش ارزش آینده پس‌اندازها و افزایش پرداختهای جاری می گردد. تورم انتظاری ایجاد شده موجب افزایش تقاضا برای برخی از کالاها در دوره محدودی از زمان می‌شود[۲۰]. در نتیجه، در هنگام تعیین دوره زمانی بهینه تولید، اثر تورم و ارزش زمانی پول را نمی‌توان نادیده گرفت.

این مقاله، بدنبال توسعه مدل EPQ پیشنهادی توسط لین و گنگ [۱۹] است، که در یک افق برنامه‌ریزی محدود، تقاضا بعلت تورم بصورت نمائی در حال افزایش است. در این مقاله، از روش جریان نقدی تنزیل شده (DCF)[۴] برای تجزیه و تحلیل و محاسبه دوره تولید بهینه استفاده گردیده است. همچنین تجزیه و تحلیل جامعی برای مشاهده اثرات فساد، تورم، نرخ خرابی ماشین و ... بر روی دوره تولید بهینه و هزینه کل انجام شده است.

در بخش بعدی، نمادها و فرضیات مورد استفاده برای تعریف و توسعه مدل معرفی می‌شوند. در بخش ۳ به بیان مسأله، تعریف و توسعه مدلی برای حل آن پرداخته می‌شود. در بخش ۴ نحوه محاسبه دوره تولید بهینه نشان داده می‌شود. در نهایت، در بخش‌های ۵ و ۶ به ترتیب، تجزیه و تحلیل عددی و نتیجه‌گیری نهائی ارائه می‌شود.

۲. نمادها و فرضیات

نمادهای بکاررفته در مدل‌سازی به شرح زیر است:

نماد	شرح
β	نرخ تنزیل
α	نرخ تورم و $\beta > \alpha$
r	$r = \beta - \alpha$
P	نرخ تولید محصول
t_i	زمان آغاز سیکل i
T_2	زمان از کارافتادگی تولید
H	طول افق برنامه ریزی
μ	پارامتر تابع چگالی نمائی
D_0	تقاضای محصول در زمان صفر
π_0	هزینه یک واحد فرسوده در زمان صفر
θ	نرخ ثابت فساد محصول j در واحد زمان
S_0	هزینه تنظیم یک اجرای تولید در زمان صفر
δ_0	هزینه واحد فروش از دست رفته در زمان صفر
X	زمان خرابی، یک متغیر تصادفی با توزیع نمائی
τ	دوره زمانی تولید که خرابی هیچ ماشینی رخ ندهد
$I_i(\tau)$	سطح ماکزیمم موجودی در زمان τ از سیکل i
R	دوره ثابت زمانی برای اجرای یک فعالیت نت روی ماشین
h_0	واحد هزینه نگهداری موجودی در واحد زمان و در زمان صفر
M_0	هزینه عمل تشخیص و تصحیح خرابی‌های یک ماشین در زمان صفر
$Z_i(\tau)$	هزینه کل محصولات تولیدی ماشین در واحد زمان و در سیکل i
$I_{i1}(t_1)$	سطوح مختلف موجودی وابسته به زمان در بخش t_1 از سیکل i، $t_i \le t_1 \le t_i + \tau$
$I_{i2}(t_2)$	سطوح مختلف موجودی وابسته به زمان در بخش t_2 از سیکل i، $t_i + \tau \le t_2 \le t_i + \tau + T_2$

همچنین، برای مدل‌سازی مسأله، فرضیاتی به شرح زیر در نظر گرفته شده است:

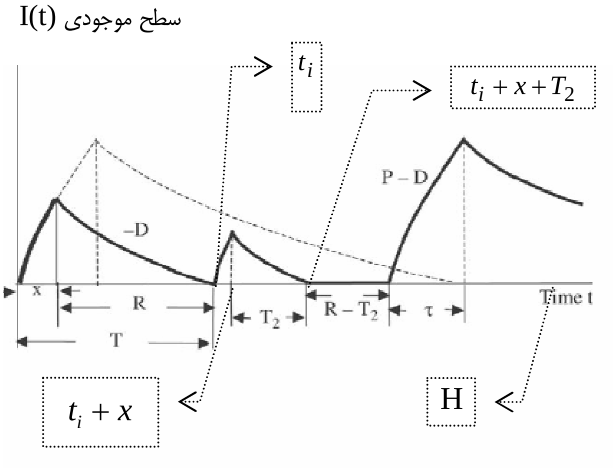
۱. نرخ تقاضا بطور نمائی در حال افزایش بوده و بوسیله $D(t) = D_0 e^{\alpha t}$ نشان داده می‌شود.
۲. برای تطابق بیشتر مدل با واقعیت، افق برنامه ریزی محدود فرض می‌شود.
۳. ماشین ظرفیت کافی برای پوشش تقاضاها را دارد.
۴. امکان تعمیر یا جایگزینی اقلام فرسوده در طول یک سیکل موجودی وجود ندارد.
۵. روش مبلغ تنزیل شده پرداخت‌ها و هزینه‌های آتی (DCF) برای ملاحظه هزینه‌های مختلف در اقلام متنوع استفاده شده است.
۶. نرخ فسادپذیری اقلام ثابت بوده و اقلام برحسب مقدار موجودی لحظه‌ای فاسد شده و از سیستم موجودی حذف می‌شوند.

[۴]- *Discounted Cash Flow*

۷. هزینه نگهداری موجودی، فقط برای مقادیر موجودی فاسد نشده در نظر گرفته می‌شود.
۸. زمان فاسدشدن هر محصول از توزیع نمائی پیروی می‌کند.
۹. شروع اولین سیکل از افق برنامه‌ریزی در زمان صفر اتفاق می‌افتد یعنی $t_{i=1} = 0$.

۳. بیان و مدل‌سازی مسأله

در این مقاله، اثر خرابی‌های تصادفی ماشین و فساد اقلام با در نظر گرفتن تورم و تأثیر آن بر تقاضا و هزینه‌ها، بر روی دوره زمانی بهینه تولید در مدل EPQ و در افق برنامه‌ریزی محدود مورد بررسی قرار گرفته است. مدل‌سازی برای اقلام فسادپذیر مانند مواد غذائی، فرآورده‌های خونی و ... تحت سیاست کنترل موجودی تجدید نشدنی انجام شده است. تحت این سیاست عملیاتی، فرآیند تولید برای یک دوره زمانی معین (یعنی پریود تولید) به‌شرط آنکه هیچ خرابی ماشین در این دوره رخ ندهد، اجرا می‌شود. در غیر اینصورت، در صورت وقوع خرابی، تولید متوقف می‌شود. از آنجائیکه موجودی‌ها بتدریج در طول دوره تولید انباشته می‌شوند، اجرای مجدد تولید فقط زمانیکه تمام موجودی‌های در دست تمام شوند، شروع می‌شود. عمل تشخیص و تصحیح خرابی، بلافاصله بعد از وقوع خرابی انجام می‌شود. این عمل دوره ثابتی از زمان را صرف می‌کند. اگر موجودی انباشته شده در دوره تولید برای برآورده کردن تقاضا در تمام دوره تشخیص و تصحیح عیب کافی نباشد، کمبود رخ خواهد داد و فرض شده است که همه کمبودها به‌صورت فروش از دست رفته هستند. همچنین، فرض می‌شود که بعد از هر عمل نگهداری و تعمیر، سیستم به شرایط کاری اولیه بر می‌گردد. قبل از هر اجرای تولید، یک هزینه آماده‌سازی نیاز است که بخشی از آن هزینه، نگهداری و تعمیر پیشگیرانه است. هزینه‌های تشخیص و تصحیح خرابی‌ها، فقط زمانی اعمال می‌شوند که یک خرابی در طول اجرای تولید رخ دهد. نمونه‌ای از نمایش رفتار سیستم موجودی در طول یک سیکل تولید، در شکل (۱) نمایش داده شده است. در شکل (۱)، وقتی که سطح موجودی به صفر کاهش می‌یابد، یک فرآیند تولید برای سیکل i و در زمان t_i برای یک دوره τ به شرطی که خرابی هیچ ماشینی رخ ندهد، راه‌اندازی می‌شود. در طول این دوره تولید، به‌دلیل اینکه نرخ تولید بیشتر از نرخ تقاضا است، لذا موجودی بتدریج با نرخ $P-D(t)$ انباشته می‌شود. این نرخ با نرخ ثابت فسادپذیری θ متعادل می‌شود. درصورتیکه در طول اجرای تولید خرابی ماشین اتفاق نیفتد، سطح موجودی در زمان $t_i+\tau$ به ماکزیمم مقدارش یعنی $I_i(\tau)$ می‌رسد. از این نقطه، موجودی در دست برای پاسخگوئی به تقاضا و اتلاف بعلت فاسدشدن، مصرف می‌شود. این دوره، دوره توقف تولید نامیده می‌شود. فرآیند تولید دیگر، زمانی آغاز می‌شود که همه موجودی در دست تمام شوند.



شکل ۱. نمونه‌ای از سیکل تولید

از سوی دیگر، اگر در زمان $t_i + x$ ($x<\tau$) خرابی ماشین رخ دهد، تولید فوراً متوقف می‌شود. در این حالت، سطح موجودی فقط تا $I_{i1}(x)$ افزایش خواهد یافت. عمل تشخیص و تعمیر خرابی به اندازه دوره ثابت R طول می‌کشد. تولید جدید وقتی که همه موجودی در دست تمام شود، آغاز می‌شود. فرض کنید که در سیکل i، $T_2=T-x$ زمان توقف تولید را مشخص کند. موجودی انباشته شده $I_{i1}(x)$ برای پاسخگوئی به تقاضا و هدررفتگی به علت فاسد شدن در طول T_2 مصرف می‌شود. اگر $T_2>R$ باشد، کمبودی رخ نخواهد داد. در غیر اینصورت، در بازه زمانی $R-T_2$ فروش از دست رفته، رخ خواهد داد. از آنجائیکه ماشین تحت خرابی‌های تصادفی است، دوره تولید واقعی و زمان سیکل کامل، به نقطه‌ای از زمان که خرابی رخ می‌دهد، وابسته است. فاصله بین دو نقطه متوالی شروع تولید، زمان سیکل تولید است و بوسیله T مشخص شده است. زمان سیکل، شامل پریود زمانی تولید، زمان از کارافتادگی و زمان تعمیر است.

با در نظر گرفتن سیکل i و اینکه این سیکل در زمان t_i آغاز می‌شود و همچنین با در نظر گرفتن فساد اقلام و تقاضای متأثر از تورم، سطح موجودی سیستم در سیکل i و در زمان t ، بوسیله معادلات مشتق زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{dI_{i1}(t_1)}{dt_1}+\theta I_{i1}(t_1)=P-D_0e^{\alpha t_1} \quad for \quad t_i\le t_1\le t_i+x \tag{۱}$$

$$\frac{dI_{i2}(t_2)}{dt_2}+\theta I_{i2}(t_2)=-D_0e^{\alpha t_2} \quad for \quad t_i+x\le t_2\le t_i+x+T_2 \tag{۲}$$

با توجه به شکل (۱)، مشخص است که به ترتیب در زمان‌های $t_1 = t_i$ و $t_2 = t_i + x + T_2$، $I_{i1}(t_i) = 0$ و $I_{i2}(t_i + x + T_2) = 0$ است. لذا با در نظر گرفتن این شرایط حدی و حل معادلات دیفرانسیل (۱) و (۲)، دو عبارت زیر برای سطح موجودی در یک نقطه ویژه از زمان حاصل می‌شود:

$$I_{i1}(t_1) = \frac{P}{\theta} e^{\theta t_i}\left(e^{-\theta t_i} - e^{-\theta t_1}\right) + \frac{D_0}{\alpha+\theta} e^{\theta t_i}\left(e^{-\theta t_1} e^{\alpha t_i} - e^{\alpha t_1} e^{-\theta t_i}\right) \tag{۳}$$

$$I_{i2}(t_2) = \frac{D_0}{\alpha+\theta} e^{-\theta t_2}\left(e^{(\alpha+\theta)(t_i+x+T_2)} - e^{(\alpha+\theta)t_2}\right) \tag{۴}$$

فرض کنید که u نقطه‌ای از زمان در سیکل i است که خرابی ماشین رخ دهد و موجودی به اندازه پاسخگوئی به تقاضا و هدر رفتگی بعلت فساد اقلام در طول دوره تعمیر انباشته شود. این نتیجه می‌دهد که u تابعی از زمان تعمیر R است. از آنجائیکه R معین است، لذا u برای هر سیکل i، یک مقدار ثابت خواهد بود. وقتی ماشین در u خراب شود، چنین بر می‌آید که $T_2 = R$ است. با استفاده از معادلات (۳) و (۴) و شرط $I_{i1}(t_i + u) = I_{i2}(t_i + u)$ و همچنین در نظر گرفتن $T_2 = R$، u به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{P}{\theta} e^{\theta t_i}\left(e^{-\theta t_i} - e^{-\theta(t_i+u)}\right) + \frac{D_0}{\alpha+\theta} e^{\theta t_i}\left(e^{-\theta(t_i+u)} e^{\alpha t_i} - e^{\alpha(t_i+u)} e^{-\theta t_i}\right) \\ = \frac{D_0}{\alpha+\theta} e^{-\theta(t_i+u)}\left(e^{(\alpha+\theta)(t_i+u+R)} - e^{(\alpha+\theta)(t_i+u)}\right)\end{aligned} \tag{۵}$$

با ساده سازی رابطه (۵) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{P}{\theta} - \frac{P}{\theta} e^{-\theta u} + \frac{D_0}{\alpha+\theta}\left(e^{-\theta u} e^{\alpha t_i} - e^{\alpha t_i} e^{\alpha u} e^{R(\alpha+\theta)}\right) = 0$$

به‌علت آنکه ارائه یک حل کامل برای معادله فوق جهت بدست‌آوردن u مشکل می‌باشد، لذا از تقریب سری تیلور برای عبارات نمائی شامل پارامتر u استفاده شده است که از توان ۲ به بعد این سری‌ها صرف‌نظر شده است.

$$e^{-\theta u} = 1 - \theta u + \frac{\theta^2 u^2}{2} - \dots \quad \text{و} \quad e^{\alpha u} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha^2 u^2}{2} + \dots$$

با بکارگیری سری تیلور برای معادله مورد نظر ، این رابطه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{P}{\theta} - \frac{P}{\theta}\left(1 - \theta u + \frac{\theta^2 u^2}{2}\right) + \frac{D_0}{\alpha+\theta}\left[\left(1 - \theta u + \frac{\theta^2 u^2}{2}\right) e^{\alpha t_i} - \left(1 + \alpha u + \frac{\alpha^2 u^2}{2}\right) e^{\alpha t_i} e^{R(\alpha+\theta)}\right] = 0$$

ریشه مثبت معادله فوق که مقدار تقریبی u را بدست می‌دهد بصورت زیر می‌باشد:

$$u \cong \frac{2P(\alpha+\theta) - 2D_0 e^{\alpha t_i}\left(\theta + \alpha e^{R(\alpha+\theta)}\right) - 2\sqrt{E}}{2\left(P\theta(\alpha+\theta) + D_0 e^{\alpha t_i}\left(\alpha^2 e^{R(\alpha+\theta)} - \theta^2\right)\right)} \tag{۶}$$

که مقدار E برابر است با:

$$\begin{aligned}E = {} & P^2\alpha\left(\alpha + 2\theta - 2\alpha e^{(\alpha R + \alpha t_i + \theta R)}\right) + P^2\theta^2 - 4P\theta\alpha D_0 e^{(\alpha R + \alpha t_i + \theta R)} - D_0^2 \theta e^{2\alpha t_i}\left(\theta + 2\alpha e^{(\alpha+\theta)}\right) \\ & + D_0^2 e^{2(\alpha R + \alpha t_i + \theta R)}\left(\alpha^2 + 2\theta^2\right) - 2PD_0\theta^2 e^{(\alpha R + \alpha t_i + \theta R)}\end{aligned}$$

در صورتی‌که در سیکل i، ماشین قبل از نقطه زمانی u خراب شود، فروش از دست رفته رخ خواهد داد و سیستم متحمل هزینه فروش از دست رفته می‌شود. هدف مدل، تعیین یک دوره تولید بهینه τ^* است که میانگین هزینه را در واحد زمان و در سیکل i مینیمم کند. در صورتی که فرض شود، هر دوره جدید با اجرای تولید جدید شروع می‌شود، آنگاه میانگین کل هزینه در هر واحد زمان، می‌تواند بوسیله تقسیم میانگین هزینه کل در هر سیکل جدید بر میانگین طول مدت هر سیکل جدید بصورت زیر بدست آید:

$$Z_i(\tau) = \frac{E[\text{cost of } i \text{ cycle}]}{E[\text{duration of } i \text{ cycle}]} = \frac{E[C_i(\tau)]}{E[T_i(\tau)]} = \frac{g_i(\tau)}{h_i(\tau)} \tag{۷}$$

۳-۱. محاسبه ارزش فعلی هزینه کل سیستم در سیکل i

در این بخش به محاسبه ارزش فعلی هر یک از اجزای هزینه کل، شامل هزینه نگهداری موجودی، هزینه اقلام فاسد شده، هزینه فروش از دست رفته، هزینه تشخیص و تعمیر خرابی ماشین و هزینه راه‌اندازی پرداخته می‌شود. در ابتدا، با توجه به بکارگیری دو معادله (۳) و (۴) برای محاسبه هزینه‌ها در این بخش، و از آنجائیکه این دو معادله به دو پارامتر مجهول x و T_2 وابسته هستند؛ لذا برای سادگی محاسبات لازم است که پارامتر T_2 نیز بر حسب پارامتر مجهول x بیان شود. بر این اساس با توجه به این دو معادله، و همچنین در نظر گرفتن $I_{i1}(t_i+x)=I_{i2}(t_i+x)$، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{P}{\theta}e^{\theta t_i}\left(e^{-\theta t_i}-e^{-\theta(t_i+x)}\right)+\frac{D_0}{\alpha+\theta}e^{\theta t_i}\left(e^{-\theta(t_i+x)}e^{\alpha t_i}-e^{\alpha(t_i+x)}e^{-\theta t_i}\right)=\frac{D_0}{\alpha+\theta}e^{-\theta(t_i+x)}\left(e^{(\alpha+\theta)(t_i+x+T_2)}-e^{(\alpha+\theta)(t_i+x)}\right) \tag{۸}$$

حل معادله (۸) رابطه بسته و مناسبی را برای مقدار T_2 نتیجه نمی‌دهد، لذا با بکارگیری تقریب سری تیلور برای عبارات نمائی و حل این معادله، مقدار تقریبی زیر برای T_2 بدست می‌آید:

$$T_2=\frac{-\left(D_0t_i(\theta-\alpha)+P-D_0\right)(1+\theta t_i)x}{D_0\left(-1+\theta(t_i+x)\right)}\cong\frac{\left(D_0t_i(\theta-\alpha)+P-D_0\right)(1+\theta t_i)x}{D_0} \tag{۹}$$

با فرض اینکه

$$A=\frac{\left(D_0t_i(\theta-\alpha)+P-D_0\right)(1+\theta t_i)}{D_0}$$

آنگاه

$$T_2\cong Ax \tag{۱۰}$$

در ادامه محاسبه ارزش فعلی هر یک از اجزای هزینه کل ارائه می‌شود.

۳-۱-۱. محاسبه ارزش فعلی هزینه نگهداری سیکل i

با در نظرگرفتن اینکه خرابی ماشین در نقطه $X=x$ رخ دهد و با استفاده از معادلات (۳) و (۴)، برای محاسبه ارزش فعلی هزینه نگهداری سیکل i داریم:

$$pwHC_i=h_0e^{-rt_i}\left[\int_{t_i}^{t_i+x}I_{i1}(t_1)e^{-rt_1}dt_1+\int_{t_i+x}^{t_i+x+T_2}I_{i2}(t_2)e^{-rt_2}dt_2\right]$$

با فرض

$$E_i\left[\bar{I}\mid X=x\right]=\int_{t_i}^{t_i+x}I_{i1}(t_1)e^{-rt_1}dt_1+\int_{t_i+x}^{t_i+x+T_2}I_{i2}(t_2)e^{-rt_2}dt_2$$

داریم:

$$\int_{t_i}^{t_i+x}I_{i1}(t_1)e^{-rt_1}dt_1=\int_{t_i}^{t_i+x}\left[\frac{P}{\theta}e^{\theta t_i}\left(e^{-\theta t_i}-e^{-\theta t_1}\right)+\frac{D_0}{\alpha+\theta}e^{\theta t_i}\left(e^{-\theta t_1}e^{\alpha t_i}-e^{\alpha t_1}e^{-\theta t_i}\right)\right]e^{-rt_1}dt_1$$

همچنین با فرض اینکه

$$B=\frac{\left(P(\alpha+\theta)-D_0\theta(1+\alpha t_i)\right)\theta}{(1+rt_i)(\alpha+\theta)(r+\theta)}$$

نتیجه می‌شود که:

$$\int_{t_i}^{t_i+x}I_{i1}(t_1)e^{-rt_1}dt_1\cong Bx^2$$

در ادامه محاسبات داریم:

$$\int_{t_i+x}^{t_i+x+T_2}I_{i2}(t_2)e^{-rt_2}dt_2=\int_{t_i+x}^{t_i+x+T_2}\left[\frac{D_0}{\alpha+\theta}e^{-\theta t_2}\left(e^{(\alpha+\theta)(t_i+x+T_2)}-e^{(\alpha+\theta)t_2}\right)\right]e^{-rt_2}dt_2$$

با بکارگیری تقریب سری تیلور برای عبارات نمائی در رابطه فوق و همچنین در نظر گرفتن $T_2=Ax$، نتیجه رابطه فوق برابر است با:

$$\int_{t_i+x}^{t_i+x+T_2}I_{i2}(t_2)e^{-rt_2}dt_2\cong\frac{1}{2}A^2D_0x^2$$

با فرض $C=\frac{1}{2}A^2D_0$:

$$\int_{t_i+x}^{t_i+x+T_2}I_{i2}(t_2)e^{-rt_2}dt_2\cong Cx^2$$

بنابراین، با توجه به محاسبات فوق بطور خلاصه نتیجه زیر حاصل خواهد شد:

$$E_i\left[\bar{I}\mid X=x\right]\cong\begin{cases}(B+C)x^2 & for \quad x\le\tau\\(B+C)\tau^2 & for \quad x>\tau\end{cases} \tag{۱۱}$$

همانطوری که فرض شده است، زمان خرابی ماشین یک متغیر تصادفی نمائی است که تابع چگالی آن برای $x > 0$، به‌صورت $f(x) = \mu e^{-\mu x}$ مشخص می‌باشد. بنابراین، میانگین ارزش موجودی در طول سیکل i بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_i\left[\bar{I}\right] = E_X\left[E_i\left[\bar{I} \mid X = x\right]\right] = \int_0^{\tau}\left((B+C)x^2\right)\mu e^{-\mu x}dx + \int_{\tau}^{H}\left((B+C)\tau^2\right)\mu e^{-\mu\tau}dx$$
$$= \frac{-\left(e^{-\mu\tau}\left(\mu^2\tau^2 + 2\mu\tau + 2\right) - 2\right)(B+C)}{\mu^2} + (B+C)\tau^2\left(e^{-\mu\tau} - e^{-\mu H}\right) \quad (۱۲)$$

بنابراین، ارزش فعلی هزینه نگهداری موجودی در سیکل i برابر است با:

$$pwHC_i = h_0 e^{-rt_i} E\left[\bar{I}\right] \quad (۱۳)$$

۳-۱-۲. محاسبه ارزش فعلی هزینه تعداد اقلام فاسدشده در سیکل i

برای محاسبه این هزینه، فرض شده است که این هزینه در ابتدای سیکل یعنی در زمان t_i پرداخت می شود. با این فرض کافیست که متوسط تعداد اقلام از بین رفته در سیکل i بدست آید. این تعداد، برابر با اختلاف بین تعداد واحدهای تولید شده در سیکل i و تعداد تقاضاهای برآورده شده در سیکل i است. با در نظر گرفتن $\overline{B}$ به‌عنوان تعداد واحدهای از بین رفته و با فرض اینکه $X = x$ است، میانگین تعداد واحدهای از بین رفته در سیکل i برابر است با:

$$E\left[\overline{B} \mid X = x\right] = Px - D(t_1) - D(t_2) = Px - \int_{t_i}^{t_i+x} D_0 e^{\alpha t_1}dt_1 + \int_{t_i+x}^{t_i+x+T_2} D_0 e^{\alpha t_2}dt_2$$
$$= Px - \left[\frac{1}{\alpha}D_0\left(e^{\alpha(t_i+x)} - e^{\alpha t_i}\right)\right] - \left[\frac{1}{\alpha}D_0\left(e^{\alpha(t_i+x+T_2)} - e^{\alpha(t_i+x)}\right)\right]$$

با بکارگیری تقریب سری تیلور برای عبارات نمائی در رابطه فوق و رابطه $T_2 = Ax$ ، عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$E\left[\overline{B} \mid X = x\right] \cong Px - D_0x - D_0T_2 = \left(P - D_0 - AD_0\right)x$$

با فرض $F = \left(P - D_0 - AD_0\right)$، آنگاه نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$E\left[\overline{B} \mid X = x\right] \cong \begin{cases} Fx & for \quad x \le \tau \\ F\tau & for \quad x > \tau \end{cases} \quad (۱۴)$$

با در نظرگرفتن تابع چگالی متغیر تصادفی نمائی x یعنی $f(x) = \mu e^{-\mu x}$ برای میانگین تعداد اقلام از بین رفته در سیکل i ، عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$E_i\left[\overline{B}\right] = E_X\left[E_i\left[\overline{B} \mid X = x\right]\right] = \int_0^{\tau}(Fx)\mu e^{-\mu x}dx + \int_{\tau}^{H}(F\tau)\mu e^{-\mu x}dx$$
$$= \frac{Fe^{-\mu\tau}}{\mu}\left(e^{\mu\tau} - (\mu\tau + 1)\right) + F\mu\left(e^{-\mu\tau} - e^{-\mu H}\right) \quad (۱۵)$$

پس با فرض پرداخت هزینه اقلام از بین رفته در ابتدای سیکل i یعنی در زمان t_i ، مقدار ارزش فعلی این هزینه در سیکل i برابر است با:

$$pwBC_i = \pi_0 e^{-rt_i} E_i\left[\overline{B}\right] \quad (۱۶)$$

۳-۱-۳. محاسبه ارزش فعلی هزینه فروش از دست رفته در سیکل i

فروش از دست رفته زمانی رخ می‌دهد که موجودی برای پاسخگوئی به تقاضا در سیستم وجود نداشته باشد. این مسأله زمانی حادث می‌شود که $T_2 < R$ باشد، یعنی خرابی ماشین در فاصله زمانی $[0,u]$ از سیکل i رخ دهد. محاسبه ارزش فعلی این هزینه بصورت زیر است:

$$pwLC_i = \delta_0 e^{-rt_i} L \quad (۱۷)$$

محاسبه L بصورت زیر است:

$$L = \int_0^u\left(\int_{t_i+x+T_2}^{t_i+x+R} D(t_3)e^{-rt_3}dt_3\right)\mu e^{-\mu x}dx \quad (۱۸)$$

$$\int_{t_i+x+T_2}^{t_i+x+R} D(t_3)e^{-rt_3}dt_3 = \int_{t_i+x+T_2}^{t_i+x+R} D_0 e^{\alpha t_3}e^{-rt_3}dt_3 = \frac{D_0}{\alpha - r}\left(e^{(\alpha-r)(t_i+x+R)} - e^{(\alpha-r)(t_i+x+T_2)}\right) \quad (۱۹)$$

با بکارگیری سری تیلور برای عبارت (۱۹) نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\int_{t_i+x+T_2}^{t_i+x+R} D(t_3)e^{-rt_3}dt_3 \cong D_0\left(R - T_2\right) = D_0\left(R - Ax\right)$$

بنابراین:

$$L=\int_0^u D_0\left(R-Ax\right)\mu e^{-\mu x}dx=\frac{D_0}{\mu}\left[\mu R\left(1-e^{-\mu u}\right)+Ae^{-\mu u}\left(\mu u+1\right)-A\right] \qquad (۲۰)$$

۳-۱-۴. محاسبه ارزش فعلی هزینه تشخیص و تعمیر عیب‌ها در سیکل i

در صورت وقوع خرابی ماشین در زمان تولید، هزینه‌ای برای تشخیص و تعمیر عیب به سیستم تحمیل می‌شود. در صورتیکه خرابی ماشین در بازه $[0,u]$ یا در بازه $[u,\tau]$ رخ دهد، این هزینه باید پرداخت شود. با توجه به اینکه در سیکل i، خرابی ماشین در زمان t_i+x از افق برنامه‌ریزی رخ داده، و این هزینه در این زمان پرداخت می‌شود. لذا ارزش فعلی این هزینه به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$pwMC_i=M_0e^{-rt_i}\left[\int_0^u\left(e^{-rx}\right)\mu e^{-\mu x}dx+\int_u^\tau\left(e^{-rx}\right)\mu e^{-\mu x}dx\right]=\frac{M_0\mu}{\mu+r}\left(1-e^{-(\mu+r)\tau}\right)e^{-rt_i} \qquad (۲۱)$$

۳-۱-۵. محاسبه ارزش فعلی هزینه راه‌اندازی در سیکل i

این هزینه در زمان شروع سیکل i یعنی در زمان t_i از افق برنامه‌ریزی پرداخت می‌شود. لذا مقدار ارزش فعلی این هزینه برای سیکل i بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$pwSC_i=S_0e^{-rt_i}\left[\int_0^u\mu e^{-\mu x}dx+\int_u^\tau\mu e^{-\mu x}dx+\int_\tau^H\mu e^{-\mu x}dx\right]=S_0e^{-rt_i}\left(1-e^{-\mu H}\right) \qquad (۲۲)$$

۳-۱-۶. ارزش فعلی میانگین هزینه کل سیستم در سیکل i

با جمع ارزش فعلی هزینه‌های نگهداری موجودی، اقلام از بین رفته، فروش از دست رفته، تشخیص و تعمیر عیب‌ها و هزینه راه‌اندازی، میانگین هزینه کل سیستم در سیکل i بدست می‌آید. بسته به اینکه خرابی ماشین در چه بازه‌ای از سیکل اتفاق می‌افتد، سیستم متحمل هر یک از هزینه‌های فوق می‌شود. اگر خرابی ماشین در بازه $[0,u]$ اتفاق بیفتد، تمامی هزینه‌های نامبرده شده به سیستم تحمیل می‌شوند. در صورتیکه خرابی ماشین در بازه $[u,\tau]$ اتفاق بیفتد، فروش از دست رفته نخواهیم داشت و اگر خرابی ماشین در بازه $[u,\tau]$ اتفاق بیفتد، هزینه تشخیص و تعمیر عیب نیز به سیستم تحمیل نمی‌گردد. با توجه به این توضیحات، تابع میانگین هزینه کل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

با جایگذاری $E[\bar{I}]$ ، $E[\bar{B}]$ و L بدست آمده در محاسبات ارزش فعلی هزینه‌ها در رابطه (۲۳)، رابطه کلی (۲۴) برای ارزش فعلی میانگین هزینه کل بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}g_i(\tau)=&\int_0^u\left[S_0+M_0e^{-rx}+h_0E\left[\bar{I}\mid X=x\right]+\pi_0E\left[\bar{B}\mid X=x\right]+\delta_0D_0\left(R-T_2\right)\right]e^{-rt_i}\mu e^{-\mu x}dx\\&+\int_u^\tau\left[S_0+M_0e^{-rx}+h_0E\left[\bar{I}\mid X=x\right]+\pi_0E\left[\bar{B}\mid X=x\right]\right]e^{-rt_i}\mu e^{-\mu x}dx\\&+\int_\tau^H\left[S_0+h_0E\left[\bar{I}\mid X=x\right]+\pi_0E\left[\bar{B}\mid X=x\right]\right]e^{-rt_i}\mu e^{-\mu x}dx\\=&\,e^{-rt_i}\left[S_0\left(1-e^{-\mu H}\right)+\frac{M_0\mu}{\mu+r}\left(1-e^{-(\mu+r)\tau}\right)+h_0E\left[\bar{I}\right]+\pi_0E\left[\bar{B}\right]+\delta_0L\right]\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$\begin{aligned}g_i(\tau)=e^{-rt_i}\Bigg[&S_0\left(1-e^{-\mu H}\right)+\frac{M_0\mu}{\mu+r}\left(1-e^{-(\mu+r)\tau}\right)\\&+h_0\left(\frac{-\left(e^{-\mu\tau}\left(\mu^2\tau^2+2\mu\tau+2\right)-2\right)(B+C)}{\mu^2}+(B+C)\tau^2\left(e^{-\mu\tau}-e^{-\mu H}\right)\right)\\&+\pi_0\left(\frac{Fe^{-\mu\tau}}{\mu}\left(e^{\mu\tau}-(\mu\tau+1)\right)+F\mu\left(e^{-\mu\tau}-e^{-\mu H}\right)\right)\\&+\delta_0\left(\frac{D_0}{\mu}\left[\mu R\left(1-e^{-\mu u}\right)+Ae^{-\mu u}\left(\mu u+1\right)-A\right]\right)\Bigg]\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

۳-۲. محاسبه میانگین طول زمانی سیکل i

با توجه به اینکه فرض شده است که خرابی ماشین به صورت تصادفی رخ می‌دهد، لذا زمان دقیقی را نمی‌توان برای یک سیکل مشخص کرد، بنابراین از مقدار میانگین زمان سیکل استفاده می‌شود. این مقدار با توجه به بازه زمانی که خرابی در آن رخ می‌دهد، محاسبه می‌گردد.

اگر خرابی در بازه $[0,u]$ رخ دهد، طول سیکل برابر $x+R$ خواهد بود. در صورتیکه خرابی در بازه $[u,\tau]$ رخ دهد این دوره زمانی برابر $x+Ax$ خواهد بود، که $T_2 = Ax$ است. در نهایت، در صورتیکه خرابی تا زمان τ از سیکل i رخ ندهد، طول سیکل برابر $\tau + A\tau$ خواهد بود.

$$
\begin{aligned}
h_i(\tau) &= \int_0^u (x+R)\mu e^{-\mu x}dx + \int_u^\tau (x+Ax)\mu e^{-\mu x}dx + \int_\tau^H (\tau + A\tau)\mu e^{-\mu x}dx \\
&= \frac{-1}{\mu}\left(\mu u e^{-\mu u} + e^{-\mu u} + R\mu e^{-\mu u} - R\mu - 1\right) \\
&\quad + \frac{(1+A)}{\mu}\left(e^{-\mu u}(\mu u + 1) - e^{-\mu\tau}(\mu\tau + 1)\right) + (1+A)\tau\left(e^{-\mu\tau} - e^{-\mu H}\right)
\end{aligned} \tag{۲۵}
$$

برای سادگی محاسبات، در ادامه فرض زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{-1}{\mu}\left(\mu u e^{-\mu u} + e^{-\mu u} + R\mu e^{-\mu u} - R\mu - 1\right) \\
&+ \frac{(1+A)}{\mu}\left(e^{-\mu u}(\mu u + 1)\right)
\end{aligned} \tag{۲۶}
$$

با توجه به مقدار W عبارت زیر را برای $h_i(\tau)$ بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&h_i(\tau) = W + (1+A) \\
&\left(\frac{-1}{\mu}e^{-\mu\tau}(\mu\tau + 1) + \tau\left(e^{-\mu\tau} - e^{-\mu H}\right)\right)
\end{aligned} \tag{۲۷}
$$

۴. محاسبه دوره تولید بهینه

همانطوری که قبلاً ذکر شد، هدف مدل، تعیین یک دوره تولید بهینه τ^* است که میانگین هزینه را در واحد زمان و در سیکل i مینیمم کند. بر این اساس در رابطه (۷) تابع $Z_i(\tau)$ تعریف شده است. چون دو تابع $g_i(\tau)$ و $h_i(\tau)$ توابع پیوسته و وابسته به τ هستند، لذا تابع $Z_i(\tau)$ نیز تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است. با مثال‌های عددی محرز گشته است که تابع $dZ_i(\tau)/d\tau$ برای مقادیر مختلف τ ابتدا دارای مقادیر منفی و سپس دارای مقادیر مثبت است. همچنین تابع $d^2Z_i(\tau)/d\tau$ به ازای مقادیری از τ که تابع $dZ_i(\tau)/d\tau$ به ازای این مقادیر تغییر علامت می‌دهد، بزرگتر از صفر است.

بنابراین می‌توان گفت که تابع $Z_i(\tau)$، تابعی محدب و دارای مینیمم جهانی است (البته این مطلب در بخش (۵) با ترسیم نمودار هزینه، نشان داده خواهد شد).

با توجه به پیوستگی، مشتق‌پذیری و تحدب تابع $Z_i(\tau)$ می‌توان با حل معادله $dZ_i(\tau)/d\tau = 0$ ، مقدار τ^* را بدست آورد. از آنجائیکه نتیجه $dZ_i(\tau)/d\tau$ یک عبارت کسری است لذا با مخرج مشترک گرفتن عبارت و مساوی صفر قرار دادن صورت کسر $(N=0)$، می‌توان مقدار τ^* را بدست آورد.

$$
\begin{aligned}
N = e^{-rt_i}\Big[&\mu M_0 e^{(-(\mu+r)\tau)} \\
&+ h_0\left(\frac{(B+C)e^{-\mu\tau}}{\mu}\left(\mu^2\tau^2 + 2\mu\tau + 2 - 2\mu^2\tau - 2\mu\right) + \tau(B+C)\left(e^{-\mu\tau}(2-\mu\tau) - 2e^{-\mu H}\right)\right) \\
&+ \pi_0\left(Fe^{-\mu\tau}\left(\mu\tau - \tau^2\right)\right)\Big] * \left[W + (1+A)\left(e^{-\mu\tau}\left(\tau - (\mu\tau+1)/\mu\right) - e^{-\mu H}\right)\right] \\
&- e^{-rt_i}\Big[S_0\left(1 - e^{-\mu H}\right) + \frac{\mu M_0}{\mu + r}\left(1 - e^{-(\mu+r)\tau}\right) \\
&+ h_0\left(\frac{B+C}{\mu^2}\left(2 - e^{-\mu\tau}\left(\mu^2\tau^2 + 2\mu\tau + 2\right)\right) + \mu^2(B+C)\left(e^{-\mu\tau} - e^{-\mu H}\right)\right) \\
&+ \pi_0\left(\frac{F}{\mu}e^{-\mu\tau}\left(e^{\mu\tau} - \mu\tau - 1\right) + \mu F\left(e^{-\mu\tau} - e^{-uH}\right)\right) \\
&+ \delta_0\left(D_0 R\left(1 - e^{-\mu u}\right) + Ae^{-\mu u}(\mu u + 1) - A\right)\Big] * \left[(1+A)\left(e^{-\mu\tau} - e^{-\mu H}\right)\right] = 0
\end{aligned} \tag{۲۸}
$$

ارائه یک حل کامل برای معادله فوق بسیار مشکل می‌باشد. با بکارگیری سری‌های تیلور، بجای عبارات نمائی شامل τ و حل معادله بدست آمده و در نظر گرفتن ریشه مثبت معادله، عبارت تقریبی زیر برای τ^* بدست آمده است.

$$\begin{aligned}\tau^* = & \frac{-\left(36abc-108a^2e-8b^3+12\sqrt{3}\left(4ac^3-b^2c^2-18abce+27a^2e^2+4b^3e\right)^{1/2}\right)^{1/3}}{12a}\\ & +\frac{3ac-b^2}{3a\left(36abc-108a^2e-8b^3+12\sqrt{3}a\left(4ac^3-b^2c^2-18abce+27a^2e^2+4b^3e\right)^{1/2}\right)^{1/3}}\\ & -\frac{b}{3a}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{36abc-108a^2e-8b^3+12\sqrt{3}a\left(4ac^3-b^2c^2-18abce+27a^2e^2+4b^3e\right)^{1/2}}{6a}\right)^{1/3}\\ & +\frac{i\sqrt{3}\left(3ac-b^2\right)}{3a\left(36abc-108a^2e-8b^3+12\sqrt{3}a\left(4ac^3-b^2c^2-18abce+27a^2e^2+4b^3e\right)^{1/2}\right)^{1/3}}\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

در رابطه (۲۹) پارامترهای a ، b ، c و e به شرح زیر می‌باشند:

$$a=-\mu e^{-(rt_i+\mu H)}(1+A)\left(-h_0C+\pi_0\mu F\left(e^{\mu H}-1\right)-h_0B\right)$$

$$\begin{aligned}b=e^{-rt_i}\Big[&e^{-\mu H}\left(\mu M_0(\mu+r+\mu A+rA)-h_0(C+AC+B+BA)-\mu\pi_0F\left(2\mu^2+A+1\right)\right)\\ &+3(1+A)(B+C)+\pi_0\mu F(2A+2-\mu W)-\mu rM_0(1+A)-2\mu h_0W(B+C)-M_0A\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c=e^{-rt_i}\Bigg[&e^{-\mu H}\left(2h_0B\left(W+\frac{1+A}{\mu}\right)+2h_0C\left(\frac{1+A}{\mu}-2W\right)-\mu S_0(1+A)+\mu^2\pi_0F(\pi_0+A)\right)\\ &+e^{-\mu u}\left(\delta_0\mu A(2+\mu uA+\mu u)-\frac{1}{20}\delta_0\mu D_0(1+A)\right)+\mu M_0(1-\mu W-rW+A)\\ &+\mu(1+A)(r-\delta_0A)-\pi_0F(1+A-\mu W)+(1+A)\left(\frac{1}{20}\delta_0\mu D_0+\mu S_0\right)\\ &+2(B+C)h_0\left(W-\frac{(1+A)}{\mu}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e=e^{-rt_i}\Bigg[&e^{-\mu H}(1+A)\left(\frac{1}{20}\delta_0D_0-\delta_0A+2S_0-2\pi_0\mu F-e^{-\mu H}(\pi_0\mu F+S_0)\right)\\ &+e^{-\mu(u+H)}(1+A)\left(\delta_0A(1+\mu u)-\frac{1}{20}\delta_0D_0\right)\\ &+e^{-\mu u}(1+A)\left(\frac{1}{20}\delta_0D_0-\delta_0A(1+\mu u)\right)\\ &+M+\mu W(\pi_0\mu F+M_0)+(1+A)\left(\delta_0A-\frac{1}{20}\delta_0D_0-S_0\right)\Bigg]\end{aligned}$$

شایان ذکر است که، از آنجائیکه در محاسبه مقدار τ^* از تقریب‌های سری تیلور استفاده شده است، لذا رابطه (۲۹) مقدار دقیق دوره بهینه تولید را بدست نمی‌دهد. اما این مقدار تقریبی، جواب نزدیک به دوره تولید بهینه را نتیجه می‌دهد.

۵. مثال و تحلیل عددی

در این بخش، به تجزیه و تحلیل عددی مدل توسعه داده شده در این مقاله و همچنین به بررسی اثرات پارامترهای مختلف مدل، بر دوره تولید بهینه پرداخته می‌شود. با فرض اینکه افق برنامه‌ریزی در زمان صفر آغاز می‌شود، لذا زمان آغاز اولین سیکل در زمان صفر است یعنی $t_{i=1}=0$ است. با در نظر گرفتن این زمان می‌توان دوره تولید بهینه تقریبی را با استفاده از رابطه (۲۹) در سیکل اول بدست آورد. با مشخص شدن دوره تولید بهینه در سیکل اول و با بکارگیری رابطه (۲۷) می‌توان میانگین طول سیکل اول را بدست آورد. با آگاهی از میانگین طول سیکل اول، به سادگی می‌توان زمان شروع سیکل دوم را بدست آورد $\left(t_{i+1}=t_i+h_i(\tau)\right)$. با استفاده از رویه مطرح شده می‌توان زمان شروع هر سیکل را بدست آورد. سایر مقادیر فرضی برای پارامترهای مدل در جدول (۱) آورده شده است. به استثناء مقادیر مربوط به فرضیات این مقاله، مقادیر سایر پارامترهای موجود در مدل، از مثال عددی ارائه شده توسط لین و گنگ [۱۹]، به منظور مقایسه نتایج دو مدل اخذ شده است.

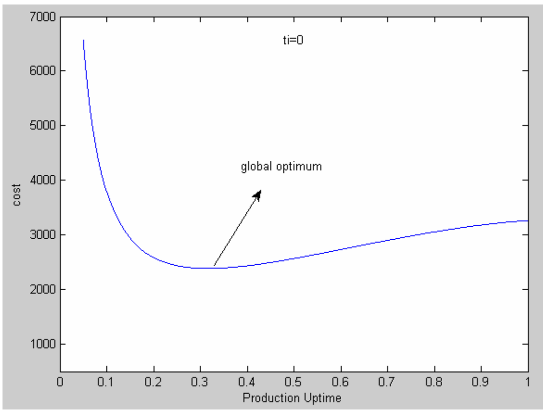
با در نظر گرفتن مقادیر جدول (۱)، دوره تولید بهینه برای سیکل اول با بکارگیری رابطه (۲۹) برابر است با $\tau^*=0.2761$ و متوسط زمان سیکل اول برابر است با $h_{i=1}\left(\tau^*\right)=0.35$ ، بنابراین شروع

سیکل دوم در زمان $t_{i=2}=0.35$ اتفاق می‌افتد. دوره تولید بهینه سیکل دوم برابر است با $\tau^*=0.2778$ و متوسط زمان سیکل دوم برابر است با $h_{i=1}\left(\tau^*\right)=0.3521$. همانطوری که مشاهده شد، با گذشت زمان و با یک نرخ ثابت تورم ، بدلیل افزایش تقاضا، دوره تولید بهینه و میانگین زمان سیکل افزایش یافته است.

جدول ۱. داده‌های ورودی

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
P	۱۰۰۰۰	δ_0	۵
D_0	۷۵۰۰	h_0	۱
H (سال)	۱	S_0	۵۰
R (سال)	۰،۰۵	M_0	۲۰۰
α	۰،۱	π_0	۱
β	۰،۱۵	θ	۰،۲
r	۰،۰۵	μ	۰،۲

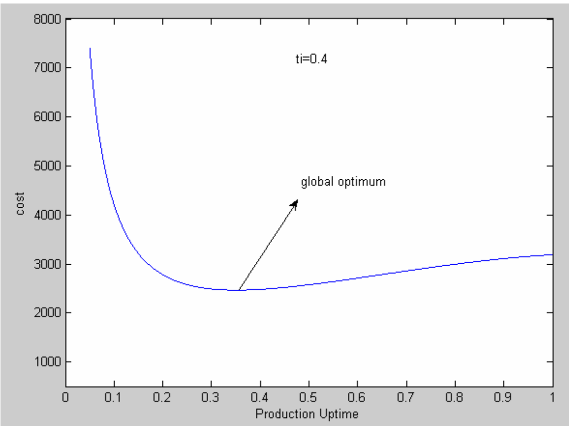
در ادامه برای تحلیل بهتر مدل، به ازای مقادیر مختلف دوره تولید، مقدار $Z_i(\tau)$ بدست آمده و نمودار آن رسم شده است. با توجه به محدب بودن تابع $Z_i(\tau)$، به ازای یکی از مقادیر دوره تولید، مینیمم هزینه اتفاق می‌افتد. با این توضیحات، برای داده‌های موجود در جدول (۱) و برای سیکل اول با زمان شروع $t_{i=1}=0$ ، این نمودار رسم شده است و مینیمم هزینه در نقطه زمانی $\tau^*=0.317$ اتفاق افتاده است. مقدار هزینه به ازای $\tau^*=0.317$ برابر $Z_{i=1}(\tau)=2387$ است (شکل ۲ را ببینید).



شکل ۲. نمودار تغییرات میانگین کل هزینه نسبت به دوره تولید در سیکل اول

با بکارگیری رابطه (۲۷) مقدار میانگین طول سیکل اول به ازای $\tau^*=0.317$ برابر $h_{i=1}\left(\tau^*\right)=0.4$ است. با مقایسه مقادیر بدست آمده از دو روش مطرح شده برای دستیابی به مقدار دوره بهینه تولید (یعنی، استفاده از رابطه تقریبی (۲۹) و یافتن نقطه مینیمم بر روی منحنی محدب $Z_i(\tau)$) ملاحظه می‌شود که این مقادیر تقریباً نزدیک به هم هستند، این موضوع دلیلی بر صحیح بودن رابطه تقریبی (۲۹) است

با توجه به اینکه $h_{i=1}\left(\tau^*\right)=0.4$ است لذا سیکل دوم در زمان $t_{i=2}=0.4$ آغاز می‌شود. با رسم منحنی هزینه در این سیکل (شکل ۳ را ببینید) مقدار بهینه دوره تولید برای سیکل دوم برابر $\tau^*=0.352$ است و مقدار هزینه به ازای $\tau^*=0.352$ برابر $Z_{i=2}(\tau)=2466$ است. همچنین متوسط زمان این سیکل به ازای مقدار بهینه دوره تولید بدست آمده برابر $h_{i=2}\left(\tau^*\right)=0.4427$ است.



شکل ۳. نمودار تغییرات میانگین کل هزینه نسبت به دوره تولید در سیکل دوم

براساس نتایج بدست آمده، ملاحظه می‌شود که با گذر زمان و با یک نرخ ثابت تورم، بدلیل افزایش تقاضا، دوره بهینه تولید، میانگین زمان هر سیکل و مقدار هزینه کل افزایش می‌یابد. این مطلب کاملاً منطبق با تصورات مورد نظر در مورد این مدل است.

از دیگر نتایج بدست آمده در این مقاله، مقایسه بین مدل ارائه شده توسط لین و گنگ [۱۹] و مدل بدست آمده در این مطالعه است. در مدل ارائه شده توسط لین و گنگ [۱۹] فرض شده است که افق برنامه‌ریزی بی‌نهایت ، تقاضا ثابت و تورم وجود ندارد و بطور کلی ارزش زمانی پول در نظر گرفته نشده است. با توجه به داده‌های موجود در جدول (۱) ، دوره تولید بهینه منتج شده از مدل ارائه شده در [۱۹] برابر $\tau^*=0.23$ است. اگر برای مدل بدست آمده در این مقاله، مقادیر $H=1000$ (یعنی، افق بی‌نهایت)، $\alpha=\beta=0$ (یعنی، بدون در نظر گرفتن تورم و ارزش زمانی پول)، در نظر گرفته شود و شروع سیکل در زمان $t_i=0$ اتفاق بیفتد، دوره تولید بهینه برابر $\tau^*=0.235$ خواهد بود. این موضوع نیز درستی مدل بدست

آمده را تصدیق می‌کند.

در صورتیکه داده‌های موجود در جدول (۱) در نظر گرفته شود، و همچنین زمان شروع سیکل، $t_{i=1}=0$ فرض شود، شکل (۲) نتیجه می‌شود، یعنی دوره بهینه تولید برابر $\tau^*=0.317$ است. در این حالت اگر بجای $\alpha=0.1$ ، مقدار $\alpha=0.12$ در نظر گرفته شود، در اینصورت دوره تولید بهینه کاهش می‌یابد و مقدار آن برابر $\tau^*=0.298$ خواهد شد. اما مقدار هزینه افزایش می‌یابد. چرا که با افزایش نرخ تورم در یک سیکل خاص، هزینه نگهداری موجودی نسبت به سایر هزینه‌ها افزایش بیشتری دارد، لذا منطقی است که دوره تولید کاهش یابد تا متوسط موجودی در دست کاهش پیدا کند.

سایر پارامترهائی که در این مدل بر روی دوره بهینه تولید تأثیر گذار هستند، عبارتند از:

- نرخ فاسدشدن (θ): با افزایش این نرخ، حجم بیشتری از محصولات بصورت مرجوع خواهند بود، لذا منطقی است که سیستم برای پاسخگوئی به تقاضا، باید دارای دوره تولید بزرگتری باشد. برای مثال مطرح شده، با در نظر گرفتن کلیه مقادیر موجود در جدول (۱) و همچنین سیکل اول، با تغییر مقدار $\theta=0.2$ به مقدار $\theta=0.3$، مقدار بهینه دوره تولید افزایش یافته و برابر $\tau^*=.328$ است.
- پارامتر تابع چگالی نمائی (μ) : بزرگی این مقدار معرف اینست که ماشین در تعداد دفعات بیشتری خراب می‌شود. یا متوسط زمان بین دو خرابی متوالی کم است. بنابراین، برای پاسخگوئی به تقاضا لازم است که دوره بهینه تولید طولانی‌تر از قبل باشد. همچنین بنظر می‌رسد که مقدار هزینه با بزرگی پارامتر μ افزایش می‌یابد. برای تصدیق این اظهارات، به در نظر گرفتن داده‌های موجود در جدول (۱) و سیکل اول، با تغییر مقدار $\mu=0.2$ به مقدار $\mu=1$، مقدار بهینه دوره تولید افزایش یافته است و برابر $\tau^*=0.445$ است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، سعی گردید تا مدل کلاسیک EPQ، تا حد ممکن از فرضیات محدودکننده نظیر عمر نامحدود اقلام، عدم خرابی ماشین، عدم تغییر در تقاضا و هزینه‌ها در طول افق برنامه‌ریزی محدود، رها شود. در اینجا، به بررسی اثر تورم و تغییر در تقاضا و هزینه‌های مدل EPQ برای یک محصول فسادپذیر نظیر مواد غذائی، مواد داروئی، فرآورده‌های خونی و... که بر روی یک ماشین با خرابی-های تصادفی تولید می‌شود، پرداخته شد. دوره تعمیر ثابت و تقاضا تحت تأثیر تورم در نظر گرفته شدند. رابطه‌ای به منظور محاسبه دوره بهینه تولید در هر سیکل، برای حداقل نمودن متوسط هزینه کل (شامل هزینه‌های نگهداری موجودی، تشخیص و تصحیح عیب ماشین، راه‌اندازی، فساد اقلام و فروش از دست رفته)در واحد زمان، ارائه گردید. برای تحلیل بهتر و کاملتر مدل، با در نظر گرفتن یک مثال عددی، به بررسی اثرات پارامترهای مختلف از جمله تورم، زمان، نرخ فسادپذیری و ... پرداخته شد و نتایجی منطبق با منطق مدل بدست آمد. بر اساس نتایج بدست آمده، ملاحظه شده است که با گذر زمان و با نرخ ثابت تورم، بدلیل افزایش تقاضا؛ دوره بهینه تولید، میانگین زمان هر سیکل و مقدار هزینه کل افزایش می‌یابند. همچنین افزایش در نرخ فاسد شدن اقلام و نرخ خرابی ماشین، باعث افزایش در دوره بهینه تولید به منظور برآورده نمودن تقاضای مشتریان می‌شود. نتایج عددی نشان داده‌اند که مدل مورد بررسی در این مطالعه، مدل مناسبی برای مواجهه با سیستمی است که دارای فرضیاتی مشابه با فرضیات در نظر گرفته شده است.

شایان ذکر است که، در نظر گرفتن تقاضای وابسته به قیمت فروش محصول، در نظر گرفتن دوره تعمیر تصادفی و امکان وجود توابع چگالی دیگری برای خرابی ماشین می‌تواند زمینه‌های مناسبی برای مطالعات آتی و توسعه مدل مورد بررسی در این مقاله باشد.

مراجع

[1] Osteryoung, J.S., McCarty, D.E., Reinhart, W.J.," *Use of EOQ Model for Inventory Analysis*", Production Inventory Management Journal, Vol.3,1986, pp.39–45.

[2] Misra, R.B.," *Optimum Production Lot Size Model for a System with Deteriorating Inventory*", International Journal of Production Research, Vol.13, No.5, 1975, pp. 495–505.

[3] Shah, Y.K., Jaiswal, M.C., "*A Lot-Size Model for Exponentially Deteriorating Inventory with Finite Production Rate*", Gujarat Statistical Review, Vol.3 No.2,1976, pp.1–15.

[4] Hwang, H., Hwang, H.S., "*Optimal Issuing Policy in Production Lot Size System for Items with Weibull Deterioration*", International Journal of Production Research, Vol.20, No.1,1982, pp. 87–94.

[5] Chowdhury, M.R., Chaudhuri, K.S., "*An Order-Level Inventory Model for Deteriorating Items with Finite Rate of Replenishment*", Operation research, Vol.20, No.2, 1983, pp. 99–106.

[6] Elsayed, E.A., Teresi, C., "*Analysis of Inventory Systems with Deteriorating Items*", International Journal of Production Research, Vol.21, No.4, 1983 ,pp. 449–460.

[7] Kang, S., Kim, I., "*A Study on the Price and Production Level of the Deteriorating Inventory System*", International Journal of Production Research, Vol.21, No.6,1983, pp. 899–908.

[8] Park, K.S., "*An Integrated Production-Inventory Model for Decaying Raw Materials*", International Journal of Systems Science, Vol.14, No.7, 1983, pp. 801–806.

[9] Hwang, H., Choi, S.B., "*Production Lot Size Model for Deteriorating Items with Shortage*", International

Journal of Systems Science, Vol.15, No.11, 1984, pp. 1247–1255.

[10] Raafat, F. ,"*A Production-Inventory Model for Decaying Raw Materials and a Decaying Single Finished Product System*", International Journal of Systems Science, Vol.16, No.8, 1985, pp. 1039–1044.

[11] Deb, M., Chaudhuri, K.S. ,"*An EOQ Model for Items with Finite Rate of Production and Variable Rate of Deterioration*", Operation research, Vol.23, No.3, 1986, pp. 175–181.

[12] Aggarwal, V., Bahari-Hashani, H., "*Synchronized Production Policies for Deteriorating Items in a Declining Market*", IIE Transactions, Vol.23, No.2, 1991, pp. 185–197.

[13] Heng, K.J., Labban, J., Linn, R.J., "*An Order-Level Lot-Size Inventory Model for Deteriorating Items with Finite Replenishment Rate*", Computers &Industrial Engineering, Vol.20, No.2, 1991, pp. 187–197.

[14] Balkhi, Z.T., Benkherouf, L. ,"*A Production Lot Size Inventory Model for Deteriorating Items and Arbitrary Production and Demand Rates*", European Journal of Operational Research, Vol. 92, No.2, 1996, pp. 302–309.

[15] Su, C.T., Lin, C.W., Tsai, C.H., "*A Deterministic Production Inventory Model for Deteriorating Items with an Exponential Declining Demand*", Operation research, Vol. 36, No.2, 1999, pp. 96–106.

[16] Wee, H., Law, S. , "*Economic Production Lot Size for Deteriorating Items Taking Account of the Time-Value of Money*", Computers & Operations Research, Vol. 26, No.6, 1999, pp. 545–558.

[17] Yang, P., Wee, H., "*An Integrated Multi-Lot-Size Production Inventory Model for Deteriorating Item*", Computers & Operations Research, Vol.30, No.5, 2003, pp. 671-682.

[18] Singa, W.C., Shan, L.W., Yuan, S.P.C., "*Determining the Optimal Run Time for EPQ Model with Scrap, Rework, and Stochastic Breakdowns*" European Journal of Operational Research, Vol.180, No. 2, 2007, pp. 664-676.

[19] Lin, G.C., Gong, D.C., "*On a Production-Inventory System of Deteriorating Items Subject to Random Machine Breakdowns with a Fixed Repair Time*", Mathematical and computer Modeling, Vol.43, 2006, pp. 920-932.

[20] Jaggi, C.K, Aggarwel, K.K., Goel, S.K ,"*Optimal Order Policy for Deteriorating Items with Inflation Induced Demand*", Int. J. Production Economics, Vol.143, 2006, pp.707-714.