

مطالعه دینامیک جریان ضربانی خون در مجاری تنگ‌شده

سید محمد رضا مدرس رضوی، سید حسین سیدین و پیمان باشی شهابی

چکیده: در این مقاله جریان ضربانی خون در مجاری تنگ‌شده با استفاده از مدل سیال غیرنیوتنی تابع نمایی (Power law) برای جریان با تقارن محوری شبیه‌سازی شده است. اثرات تنگ‌شدگی مجرای خون، گرفتگی شدید ۷۵٪ بر دینامیک جریان سیال مورد مطالعه قرار گرفته و تغییرات در میدان جریان برای سه عدد ومرسلی^۱ (پارامتر نوسان) مختلف بررسی شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که برای عدد ومرسلی ۱۲/۵ تفاوت اساسی در میدان جریان که ناشی از ایجاد شدن دو گردابه نزدیک به هم در پشت گرفتگی است، قابل مشاهده است. با استفاده از منحنی صفحه‌ای تنش برشی دیواره (WSS) اغتشاشاتی که منجر به تشکیل گردابه اولیه و گردابه دوم (برای $W_0 = 12/5$) می‌شوند به خوبی نمایش داده می‌شود. همچنین زمان تشکیل گردابه اولیه با بررسی خطوط هم تنش برشی صفر از روی این منحنی‌های صفحه‌ای قابل رویت است. این زمان با افزایش عدد ومرسلی به تاخیر می‌افتد. تاثیر این تاخیر در تشکیل گردابه اولیه، به صورت کوچک‌تر شدن آن با افزایش عدد ومرسلی برای زمانهای مشابه، در نتایج مربوط به خطوط جریان نمایان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: جریان ضربانی، سیال غیرنیوتنی، عدد ومرسلی، تقارن محوری، تنش برشی دیواره

۱. مقدمه

آرزوی دست‌یافتن به چگونگی رفتار جریان خون در سیستم قلبی و عروقی انسان، تحقیقات گسترده و فراوانی را در این زمینه برانگیخته است. امروزه ثابت شده است که بروز و توسعه بسیاری از بیماریهای قلبی-عروقی به مشخصه‌های جریان خون از جمله تغییرات یا بالا بودن تنش برشی دیواره رگ وابسته هستند [۱]. تحقیقات گوناگونی در این زمینه انجام شده یا در حال انجام است که در این میان بررسی جریان خون در عروق تنگ‌شده یکی از موضوعات جالبی می‌باشد که توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف داشته است. این موضوع از این جنبه حائز اهمیت است که جریان خون در عروق و مجاری تنگ‌شده نقش مهمی در توسعه و پیشرفت انسداد

این مقاله در تاریخ ۸۲/۶/۳ دریافت و در تاریخ ۸۳/۸/۶ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر سید محمد رضا مدرس رضوی، استاد گروه مکانیک دانشکده مهندسی،

دانشگاه فردوسی مشهد، m-razavi@ferdowsi.um.ac.ir

دکتر سید حسین سیدین، دانشیار دانشکده مهندسی مواد، دانشگاه علم و

صنعت ایران، seyedein@iust.ac.ir

پیمان باشی شهابی، دانشجوی دکتری و عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی

واحد مشهد، pbshahabi@yahoo.com

عروق دارد [۵-۲].

در اثر گرفتگی و تنگ‌شدگی (انسداد) که در رگ به وجود می‌آید، جریان طبیعی خون دچار اختلال می‌شود. این اختلال در جریان طبیعی خون، نقش مهمی را در بیماریهای قلبی-عروقی بازی می‌کند.

اگرچه نظریه‌های متعددی در مورد علت رخ دادن بیماریهای عروقی در محل گرفتگی رگها و اینکه اصولاً چرا گرفتگیها به وجود می‌آیند ارائه شده، ولی هنوز یک فرضیه قابل قبول و پذیرفته شده در این زمینه به دست نیامده است. از این رو شبیه‌سازی و مطالعه جریان در عروق تنگ‌شده همچنان جزو موضوعات مورد علاقه بشر است [۳].

از لحاظ ماهیت، خون را باید سیالی در نظر گرفت که از تعلیق سلولهای مختلف (مانند گلبولهای سفید و قرمز و ...) در مایعی به نام پلاسما تشکیل شده است. گلبولهای قرمز از لحاظ تعداد نسبت به سایر سلولهای معلق در خون در اکثریت هستند و به طور کلی فرض می‌شود که اثر آنها در خواص جریانی خون بر اثر سایر سلولهای موجود غالب باشد. اگرچه مایعی که سلولها در آن معلق هستند پلاسما می‌باشد که خود از ۹۰٪ آب تشکیل شده است ولی عموماً خون به عنوان یک سیال غیرنیوتنی در نظر گرفته می‌شود

¹: Womersly number

این کار با فرض جریان متقارن محوری و در نظر گرفتن رفتار سیال غیرنیوتنی انجام می‌شود.

۲. تعریف مساله و مشخصات مدل فیزیکی

اطلاعات مربوط به هندسه گرفتگی و جریان ضربانی ورودی به لوله در شکل ۱ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۱- الف مشاهده می‌شود، پروفیل گرفتگی حالت منظمی ندارد. هندسه گرفتگی معمولاً با یک پروفیل نمایی یا سینوسی تقریب زده می‌شود [۴-۶]. مدل فیزیکی در نظر گرفته شده در این تحقیق یک پروفیل سینوسی است. بر اساس پارامترهای هندسی بیان شده در شکل ۱- الف، رابطه ذیل برای پروفیل گرفتگی در نظر گرفته شده است.

$$R(z) = \frac{r(z)}{r_0} = \begin{cases} 1 - \frac{\delta}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) \right] & \text{if } |z| \leq z_0 \\ 1 & \text{if } |z| > z_0 \end{cases} \quad (1)$$

در رابطه فوق r_0 شعاع لوله در مقطع ورودی (به عبارت دیگر بیشترین شعاع لوله در طول گرفتگی) و z_0 بیان‌کننده نصف طول گرفتگی و δ مشخص‌کننده شدت گرفتگی بر اساس نسبت سطح مقطعها است. مقادیر هندسی مربوط به گرفتگی ۷۵٪ در جدول ۱ آورده شده است. لازم به توضیح است که مقدار z_0 بیان شده در جدول ۱ مقدار نرمال شده بر اساس قطر لوله می‌باشد. برای مشخص کردن مقدار گرفتگی، شدت آن بر حسب درصد بیان می‌شود. گرفتگی ۷۵٪ بیانگر این است که ۷۵٪ از کل سطح مقطع لوله در مقطعی که کمترین شعاع را دارد، گرفته شده است. بدین ترتیب δ به گونه‌ای محاسبه می‌شود که در $z=0$ (در مرکز لوله مقطعی که کمترین شعاع را داریم) مقدار مورد نظر برای نسبت سطح مقطعه‌ها که بیان‌کننده شدت گرفتگی مورد نظر است، حاصل شود. به این ترتیب δ کمیته بی‌بعد است. شکل ۱- ب یک شبکه‌بندی ساده برای میدان جریان را نشان می‌دهد. برای اینکه گرادین سرعت در نزدیکی دیواره دقیق حساب شود، شبکه‌بندی در جهت شعاعی از مرکز لوله به سمت دیواره ریز شده است. همچنین شبکه‌بندی در جهت طولی نیز از دو طرف لوله به سمت گرفتگی ریز می‌شود. همانطور که در شکل ۱- ج مشخص شده، برای تولید جریان ضربانی نیز از یک رابطه سینوسی استفاده شده است. انتخاب رابطه سینوسی با توجه به قابلیت انعطاف آن برای حالت‌های مختلف و همچنین استفاده گسترده در کارهای آزمایشگاهی و عددی، انجام شده است [۷ و ۲]. رابطه سینوسی در نظر گرفته شده که جریان ورودی را بر اساس عدد رینولدز جریان کنترل می‌کند عبارت است از:

$$Re = Re_{mean} + Re_{amp} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (2)$$

زیرا ساختمان الاستیک و فرم‌پذیر گلبولهای قرمز لزجت خون را به آهنگ کرنش برشی^۱ وابسته کرده‌اند [۱].

اغلب کارهای عددی که در این زمینه انجام شده است به علت محدودیت امکانات کامپیوتری یا فقدان مدلهای ریاضی مناسب برای جریانهای دائمی صورت گرفته که در اکثر موارد نیز سیال مورد نظر، نیوتنی فرض شده است. این دو فرض که برای ساده‌سازی صورت می‌گیرد، عملاً دست یافتن به یک مدل واقعی را غیرممکن می‌سازد. بر اساس یک کار آزمایشگاهی که توسط Young and Forrester در سال ۱۹۷۰ انجام شد مشخص گردید که تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین جریان خون و جریان سیالی مانند آب در یک مجرای تنگ شده وجود دارد. بنابراین نمی‌توان از اثر رفتار غیرنیوتنی خون در چنین مسایلی صرف‌نظر کرد [۴].

از طرف دیگر، پنداشت دائمی بودن جریان خون در حلهای عددی از دیگر فرضیهایی است که باعث عدم دستیابی به یک مدل حقیقی می‌شود. اگرچه تلاشهای بسیار زیادی برای مدل‌سازی جریان خون به صورت جریان دائمی صورت گرفته ولی نتیجه این تحقیقات دور از واقعیت بوده است [۱].

نوسانات جریان ضربانی خون که توسط قلب تولید می‌شود به واسطه خاصیت الاستیک شریانهای اصلی میرا می‌شود. با این وجود طبیعت ضربانی جریان خون در رگها و شریانهای کوچکتر که خاصیت تورم‌پذیری دیواره آنها به مراتب کمتر است، قابل صرف‌نظر نیست و بنابراین اثرات نوسان جریان و فرکانس تپش بسیار با اهمیت خواهد بود.

با توجه به توضیحاتی که داده شد، کاملاً واضح است که فرض سیال نیوتنی و جریان دائمی نمی‌تواند درک صحیحی از جریان خون در رگهای کوچک و مجاری تنگ‌شده بدهد. نکته دیگر اینکه، خاصیت غیرنیوتنی خون در میدانهای جریانی که کرنش برشی کم است، قابل صرف نظر نیست. از طرف دیگر، به علت طبیعت ضربانی جریان خون، وجود یک نقطه سکون در طول یک تکرار ضربان اجتناب ناپذیر است. وجود یک نقطه سکون برای یک تکرار در جریان ضربانی، بیان‌کننده این مطلب است که در طول یک تکرار، زمانی را داریم که در آن مقدار کرنش برشی به محدوده‌ای می‌رسد که باید در آن محدوده (به علت کم بودن مقدار کرنش برشی و غیر قابل صرف‌نظر بودن رفتار غیرنیوتنی)، خاصیت غیرنیوتنی خون را منظور کنیم. بنابراین نتیجه حاصل این است که وجود خاصیت غیرنیوتنی و جریان ضربانی برای مدل‌سازی جریان خون، دو شرط لازم است که حذف هرکدام از این دو شرط می‌تواند از رسیدن به نتایج واقعی جلوگیری کند [۴].

هدف از انجام این پژوهش بررسی میدان جریان و تغییرات پارامتر تنش برشی دیواره (WSS)^۲ برای جریان ضربانی خون در عروق تنگ‌شده و تاثیر اعداد ومرسلی مختلف بر دینامیک سیال می‌باشد.

¹ Shear strain rate

² Wall shear stress

$$Wo = r_0 \left(\frac{2\pi}{\nu T} \right)^{1/2} \quad (۴)$$

در رابطه فوق ν لزجت سینماتیکی است که بر اساس لزجت نیوتنی مربوط به حد بالایی آهنگ کرنش برشی محاسبه می شود. مقادیر مورد استفاده در روابط فوق برای حل های ارائه شده، در جدول ۱ آورده شده اند.

جدول ۱. مشخصه های فیزیکی مدل در نظر گرفته شده

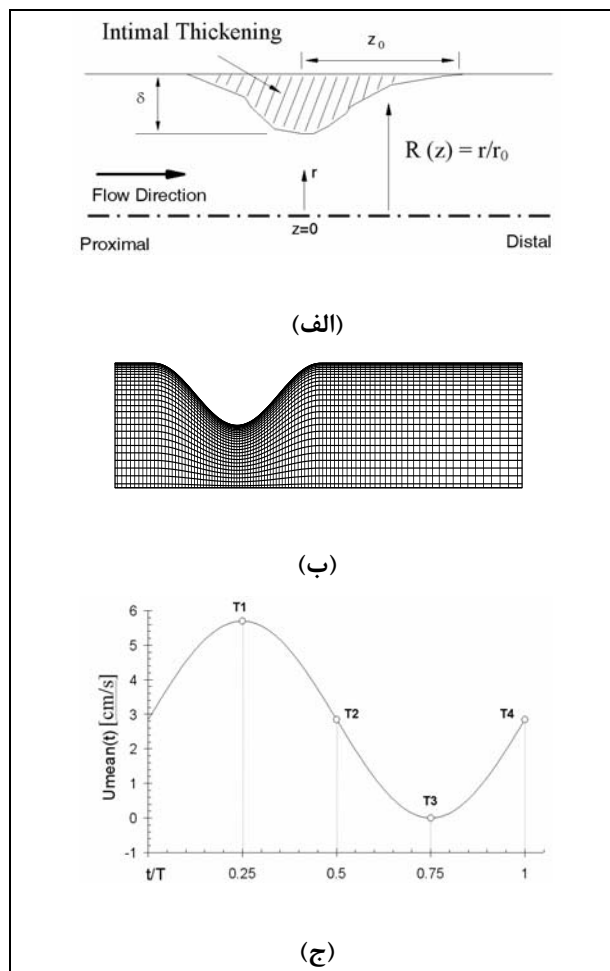
مشخصه های هندسی	
گرفتگی δ	۰/۵
نصف طول گرفتگی z_0	۲
مشخصه های جریان ضربانی	
رینولدز اصلی Re_{mean}	۲۰۰
رینولدز نوسانی Re_{amp}	۲۰۰
عدد و مرسلی Wo	تعداد گامهای زمانی هر تکرار
۴	۴۹۰
۷/۵	۱۸۰
۱۲/۵	۷۰
تعداد تکرار حل شده برای رسیدن به حل نهایی	۴
مشخصه های رفتاری سیال برای مدل تابع نمایی (در سیستم cgs)	
لزجت نیوتنی مربوط به حد بالایی آهنگ کرنش	$\mu_\infty = 0.0309$
مدل تابع نمایی	$m = 0.126; n = 0.804$

برای مدل سازی رفتار غیرنیوتنی سیال، مدل تابع نمایی^۵ مورد استفاده قرار گرفته است. لزجت سیالی که از مدل تابع نمایی پیروی می کند، بر اساس رابطه ذیل به دست می آید [۹ و ۸].

$$\eta = m \dot{\gamma}^{n-1} \quad (۵)$$

در رابطه فوق m و n ضرایب ساختاری معادله، η لزجت و $\dot{\gamma}$ آهنگ کرنش برشی می باشند.

ضرایب ساختاری بسته به رفتار جریانی هر سیال متفاوت است (این



شکل ۱. اطلاعات فیزیکی:

(الف): شکل شمایی هندسه رگ تنگ شده، (ب): شبکه بندی حجم محدود برای لوله تنگ شده و (ج): جریان ضربانی ورودی به لوله

در رابطه فوق Re_{mean} عدد رینولدز اصلی و Re_{amp} عدد رینولدزی است که دامنه نوسان را مشخص می کند. عدد رینولدز بر اساس قطر لوله در مقطع ورودی، سرعت متوسط گیری شده بر اساس سطح مقطع^۱ (در مقطع ورودی) و لزجت نیوتنی مربوط به حد بالایی آهنگ کرنش برشی^۲ خون به صورت ذیل تعریف می شود.

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu_\infty} \quad (۳)$$

پارامتر نوسان یا عدد و مرسلی که بیان کننده نسبت تاثیرات اینرسی گذرای^۳ جریان ضربانی تکرار شونده و تاثیرات لزجی^۴ است، به صورت ذیل تعریف می شود [۷ و ۶، ۲].

¹ Area-averaged velocity

² Limiting high shear rate Newtonian viscosity

³ Transient inertial effect

⁴ Viscous effect

⁵ Power law

$$WSS(z,t) = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (8)$$

در رابطه فوق WSS بیان کننده نیروی برشی وارد شده به دیواره رگ (در هر زمان و مکان مشخص در امتداد لوله) در واحد سطح مقطع است. همچنین در این رابطه ρ چگالی سیال و U سرعت متوسطگیری شده بر اساس سطح مقطع برای رینولدز اصلی (Re_{mean}) می باشد. تغییرات این پارامتر بر اساس دو متغیر مستقل مکانی z (موقعیت در امتداد لوله) و زمانی t به شکل یک منحنی صفحه‌ای بیان می شود.

۳-۳. الگوریتم عددی

برای حل معادلات حاکم و انجام محاسبات از کد اصلاح شده teach- t که بر اساس روش حجم محدود کار می کند، استفاده شده است. کد مورد نظر به گونه‌ای اصلاح گردید که قابلیت حل میدانهای جریان متقارن محوری و جریانات سیال غیرنیوتنی را دارا می باشد. به علاوه کد حاضر با استفاده از روش Boundary fitted coordinate می تواند جریان در هندسه‌های نامنظم را نیز حل کند.

معمولا برای جلوگیری از تاثیر اغتشاشات موجود در شروع جریان ضربانی بر نتایج، محاسبات برای ۳ تا ۵ ضربان متوالی انجام می شود. با توجه به مشخصات مدل رفتار جریانی سیال (تابع نمایی) و مقادیر فیزیکی در نظر گرفته شده در این تحقیق مشاهده شد که نتایج مربوط به ضربان چهارم و پنجم در بدترین حالت ۰/۵٪ با یکدیگر اختلاف دارند. بدین ترتیب نتایج ضربان چهارم به عنوان نتایج نهایی پذیرفته شد که نتایج ارائه شده در این مقاله را نیز شامل می شود. تعداد گام زمانی در نظر گرفته شده برای هر عدد ومرسلی نیز متفاوت می باشد. تعداد گام زمانی برای اعداد ومرسلی ۱۲/۵، ۷/۵ و ۴ به ترتیب عبارتند از: ۷۰، ۱۸۰ و ۴۹۰. لازم به ذکر است که گام زمانی را نمی توان از حد مشخصی کوچکتر در نظر گرفت زیرا باعث عدم همگرایی حل می شود. به علاوه کوچک بودن بیش از حد گام زمانی، زمان دستیابی به حل نهایی را طولانی تر می کند. از طرف دیگر بزرگ بودن گام زمانی نیز باعث عدم دقت مناسب در شبیه سازی جریان می شود. بدین ترتیب گام زمانی باید به گونه‌ای انتخاب گردد که شرایط ذکر شده در بالا را ارضاء کند. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۱۱] مراجعه شود. در این تحقیق محاسبات با استفاده از PC دارای ریز پردازنده Intel (1800 MHz) full cash و حافظه مجازی (DDR Ram) ۲۵۶ MB انجام گرفته است. با استفاده از ماشین فوق زمان مورد نیاز برای به دست آمدن یک حل نهایی بسته به عدد ومرسلی از ۳۸ ساعت تا ۶ روز متفاوت می باشد.

۳-۴. اثر شبکه بندی

نتایج ارائه شده در این مقاله برای مش بندی 30×30 به دست

مقادیر برای خون در جدول ۱ ارائه شده است). ضریب توانی n بسته به اینکه لزجت سیال با افزایش آهنگ کرنش برشی افزایش^۱ یا کاهش^۲ پیدا کند به ترتیب بزرگتر یا کوچکتر از ۱ است. این مقدار برای خون که به عنوان سیالی از نوع دوم شناخته می شود، کوچکتر از ۱ است. برای محاسبه لزجت در رابطه (۵) مقدار اسکالرنژ بر اساس نامتغیر اسکالر دوم^۳ تانسور آهنگ کرنش برشی برآورد می شود [۱۰ و ۶، ۲]. توضیحات بیشتر در این زمینه در مراجع [۱۱ و ۱۰] آمده است.

۳. مدل عددی

۳-۱. تئوری

میدان جریان، برای حرکت سیال در یک لوله با گرفتگی محلی که تغییرات هموار و یکنواختی دارد (پروفیل سینوسی)، به صورت متقارن محوری در نظر گرفته می شود. دیواره لوله صلب فرض می گردد. همچنین فرض می شود که جریان آرام و غیرقابل تراکم در کل زمان یک ضربان برقرار باشد. بدین ترتیب معادلات حاکم عبارتند از [۱۲]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (6)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (7)$$

تانسور تنش در رابطه (۷) از رابطه کلی $\vec{\tau} = \eta \dot{\gamma} = \eta [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T]$ تبعیت می کند.

شرایط مرزی مورد استفاده عبارتند از: شرط عدم لغزش روی دیواره لوله، شرط صفر بودن گرادیان سرعت در جهت عمود بر سطح در خروجی لوله و شرط تقارن روی خط مرکزی لوله. همچنین سرعت ورودی نیز با استفاده از پروفیل سرعت توسعه یافته و به صورت سینوسی، در هر گام زمانی (رابطه (۲))، در ورودی لوله اعمال می شود.

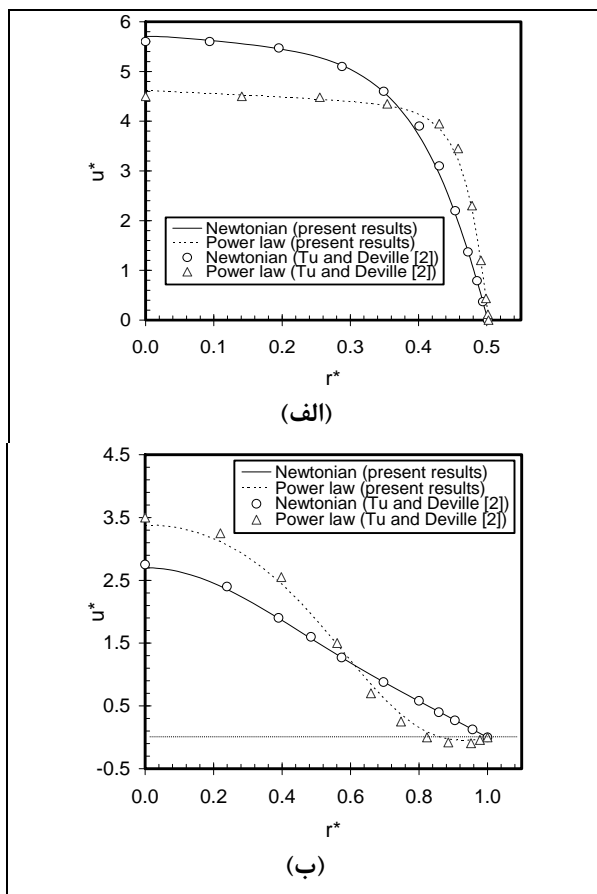
۳-۲. تنش برشی دیواره (WSS)

یکی از پارامترهای اساسی که در بررسی نتایج مربوط به شبیه سازی جریان خون نقش اساسی دارد، تنش برشی وارد بر دیواره رگ است. این پارامتر می تواند به عنوان معیاری برای تشخیص بیماریهای قلبی-عروقی و همچنین تعیین میزان گرفتگی عروق مورد استفاده قرار گیرد. تنش برشی در یک جریان ضربانی می تواند به زمان و مکان وابسته باشد. در این تحقیق تنش برشی وارد به دیواره به شکل بی بعد شده به صورت ذیل تعریف می شود.

¹ Shear thickening

² Shear thinning

³ Second scalar invariant



شکل ۲. پروفیل‌های سرعت در دو فاصله طولی مختلف برای گرفتگی ۷۵٪ و مقایسه آنها با نتایج عددی [۲] Tu and Deville: (الف): در مرکز گرفتگی $z^* = 0$ و (ب): در فاصله $z^* = 2$ (فاصله دو برابر قطر از گرفتگی)

تغییرات سرعت مرکز لوله (سرعت ماکزیمم) در طول لوله با گرفتگی ۷۵٪، برای مدل‌های نیوتنی و غیرنیوتنی تابع نمایی، در شکل ۳-الف رسم شده است. گرچه در این شکل بیشترین مقدار سرعت مربوط به مدل نیوتنی است ولی مقدار سرعت در ادامه روند بازگشت به حالت توسعه یافته، برای مدل نیوتنی کمتر از مدل غیرنیوتنی تابع نمایی خواهد شد به طوری که بازگشت به حالت توسعه یافته برای مدل نیوتنی در فاصله کمتری از مرکز گرفتگی در مقایسه با مدل غیرنیوتنی تابع نمایی صورت می‌گیرد.

بدین ترتیب انتظار داریم طول محدوده چرخش (گردابه) تشکیل شده در پشت گرفتگی برای مدل غیرنیوتنی تابع نمایی طولانی‌تر از مدل نیوتنی باشد. این پیش‌بینی با استفاده از شکل‌های ۳-ب و ۳-ج، به ترتیب برای خطوط جریان مدل نیوتنی و غیرنیوتنی تابع نمایی تایید می‌شود.

همانطور که در این دو شکل مشاهده می‌شود گردابه تشکیل شده برای مدل نیوتنی کوچکتر از مدل غیرنیوتنی تابع نمایی می‌باشد.

آمده است و تکرار محاسبات با مش‌بندی ظریف‌تر تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر محاسبات و نتایج نهایی نداشت و عدم وابستگی نتایج به مش‌بندی (mesh-independency) مشخص گردید. مش‌بندی در عرض میدان جریان از مرکز لوله به سمت دیواره ریز می‌شود تا بتوان شیب نمایه سرعت را در نزدیکی دیواره به خوبی محاسبه کرد. لازم به توضیح است که شیب نمایه سرعت روی دیواره اثر مستقیمی بر محاسبه تنش برشی دارد. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

۴. بررسی صحت نتایج

برای اطمینان از صحت کارکرد کد توسعه داده شده نتایج اولیه در دو حالت جریان دائمی و ضربانی به ترتیب با نتایج عددی Tu and Deville [۲] و آزمایشگاهی Ojha et al. [۷] مقایسه شده است که در ادامه (در بخش‌های ۴-۱ و ۴-۲) ارائه می‌شود.

با توجه به اینکه نتایج آزمایشگاهی موردنظر برای جریان ضربانی تنها برای سیال نیوتنی در دسترس بود، نتایج این قسمت تنها برای مدل سیال نیوتنی به دست آمده است.

در کلیه نتایج ارائه شده در این مقاله u^* ، r^* و z^* به ترتیب سرعت بی‌بعد شده بر اساس سرعت میانگین سطحی، شعاع بی‌بعد شده بر اساس شعاع اصلی لوله و طول بی‌بعد شده بر اساس قطر لوله در نظر گرفته شده‌اند:

$$u^* = u/U \quad (9-الف)$$

$$r^* = r/r_0 \quad (9-ب)$$

$$z^* = z/D \quad (9-ج)$$

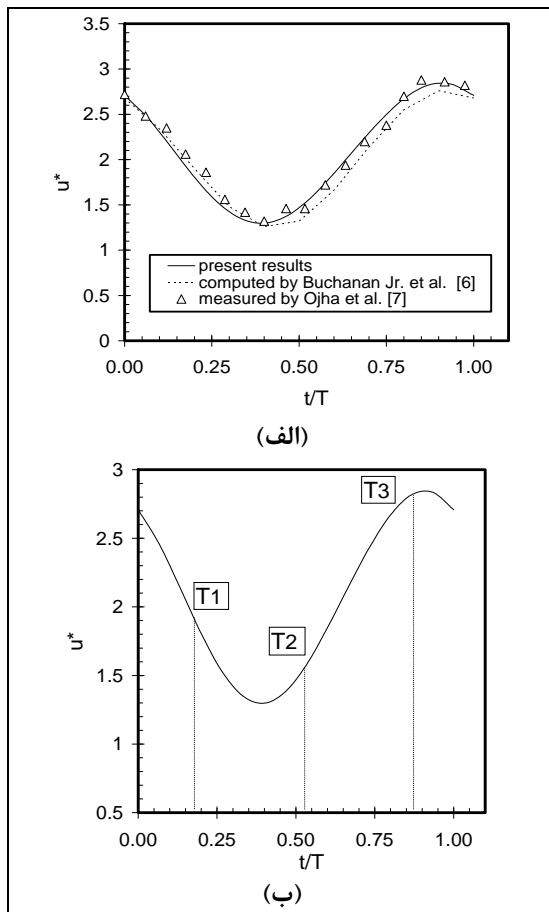
۴-۱. نتایج جریان دائمی

برای نتایج جریان دائمی لزجت خون در حالت نیوتنی معادل $6 \times 10^{-2} \text{ gr/cm.s}$ در نظر گرفته می‌شود و مقدار چگالی آن gr/cm^3 ۱/۰۶ و ثابت منظور شده است [۱۳ و ۱۰، ۲]. همچنین ضریب توانی برای خون در مدل تابع نمایی، $n \approx 0.8$ در نظر گرفته می‌شود [۶ و ۲]. عدد رینولدز، با در نظر گرفتن لزجت نیوتنی برای هر دو حالت نیوتنی و غیرنیوتنی، معادل ۶۷ در نظر گرفته شده است. پروفیل گرفتگی در نظر گرفته شده مشابه رابطه (۱)، با فرض $z_0 = 1$ (مقدار واحد برای نصف طول گرفتگی)، می‌باشد.

در شکل ۲ پروفیل‌های سرعت برای مدل نیوتنی و غیرنیوتنی تابع نمایی در حالت گرفتگی ۷۵٪ در مقایسه با مقادیر محاسبه شده توسط Tu and Deville [۲] رسم شده‌اند. پروفیل‌های سرعت به دست آمده برای هر دو مدل نیوتنی و غیرنیوتنی تابع نمایی تطابق خوبی با نتایج این تحقیق دارند.

زمان نیز با T (زمان یک تکرار ضربان) بی‌بعد شده‌اند. در شکل ۵- الف سرعت مرکز لوله (سرعت ماکزیمم) در محدوده ورودی، پیش از گرفتگی، برای یک تکرار ضربان در مقابل زمان رسم شده است و نتایج به دست آمده با نتایج کار آزمایشگاهی [7] Ojha et al. و تحقیق عددی Buchanan Jr. et al. [6] مقایسه شده‌اند. مقادیر به دست آمده، به غیر از مقادیر نزدیک ماکزیمم جریان در یک ضربان، تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد.

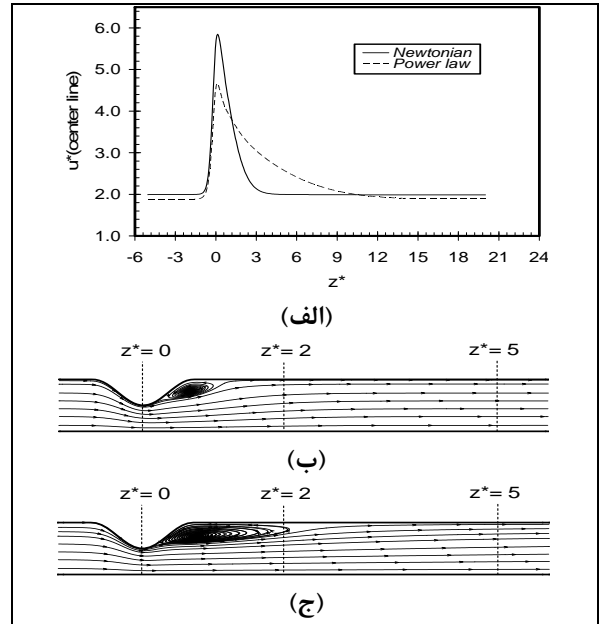
شکل ۵- ب موقعیتهای زمانی در نظر گرفته شده در طول یک ضربان برای رسم پروفیل‌های سرعت را نشان می‌دهد. لازم به توضیح است که سه موقعیت زمانی مورد استفاده در شکل ۵- ب با موقعیتهای زمانی در نظر گرفته شده در شکل ۱- ج متفاوت می‌باشند. سه موقعیت زمانی شکل ۵- ب در نتایج مربوط به بررسی صحت نتایج (شکل‌های ۶، ۷ و ۸) مورد استفاده قرار گرفته‌اند و چهار موقعیت زمانی شکل ۱- ج در نتایج بخش ۵ (شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱) استفاده شده‌اند. در شکل‌های ۶، ۷ و ۸ پروفیل‌های سرعت در دو فاصله متفاوت از گرفتگی برای سه زمان مختلف رسم شده‌اند.



شکل ۵. (الف): سرعت ورودی ضربانی در مرکز لوله، مقایسه

شده با نتایج عددی [۶] و آزمایشگاهی [۷] و (ب): سه موقعیت زمانی در نظر گرفته شده برای رسم پروفیل‌های

سرعت، $T_1 = 0/174$ ، $T_2 = 0/522$ و $T_3 = 0/870$



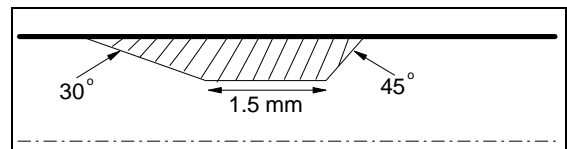
شکل ۳. تغییرات سرعت و خطوط میدان جریان برای گرفتگی

۷۵٪: (الف): مقایسه تغییرات سرعت ماکزیمم (سرعت در مرکز لوله) در طول لوله برای مدل نیوتنی و مدل غیر نیوتنی تابع نمایی، (ب): خطوط جریان برای مدل نیوتنی و (ج): خطوط جریان برای مدل غیر نیوتنی تابع نمایی

توضیحات و نتایج کاملتر در این مورد (شامل نتایج مربوط به گرفتگی ۲۵٪ و پروفیل‌های سرعت برای فواصل مختلف از مرکز گرفتگی) در مراجع [۱۴ و ۱۱] ارائه شده است.

۲-۴. نتایج جریان ضربانی

نتایج مورد بحث در این قسمت برای گرفتگی ۴۵٪، سیال نیوتنی و لوله‌ای به قطر ۰/۵ cm می‌باشد. شکل گرفتگی (مشابه هندسه در نظر گرفته شده در مرجع [۷] دارای پروفیل دوزنقه‌ای می‌باشد (شکل ۴). جریان ضربانی به واسطه یک رابطه سینوسی (مشابه رابطه (۲) تولید می‌شود. عدد رینولدز اصلی ۵۷۵ و عدد رینولدز دامنه نوسان ۳۶۰ منظور شده است. عدد ومرسلی یا پارامتر نوسان ۷/۵ در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب عدد رینولدز جریان در هر زمان با رابطه (۲) تغییر می‌کند. در رابطه (۲) T از عدد ومرسلی به دست خواهد آمد، $Wo = r_0(\omega/\nu)^{1/2} = 7/5$.



شکل ۴. هندسه شمایی گرفتگی با پروفیل دوزنقه‌ای

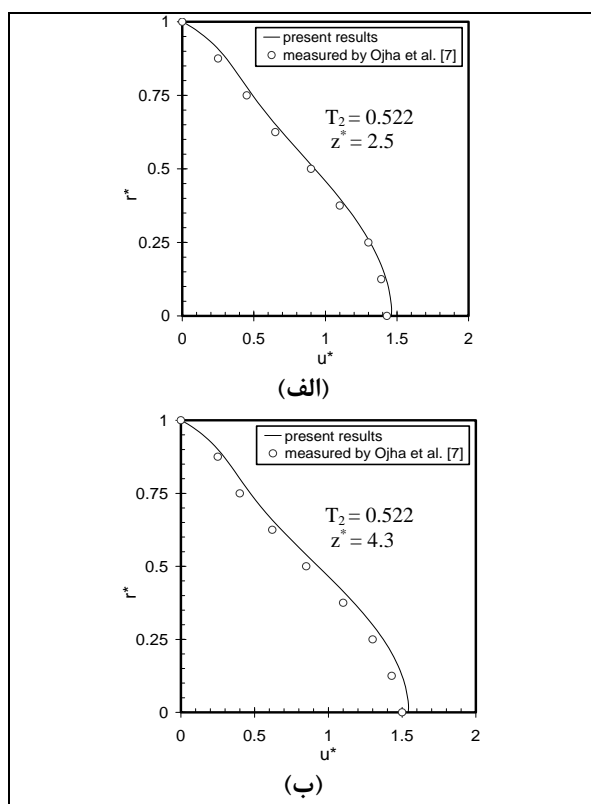
لازم به توضیح است که در شکل‌های مربوط به جریان ضربانی (شکل‌های ۵ الی ۸)، سرعت با سرعت متوسط‌گیری شده ورودی بر اساس سطح مقطع برای عدد رینولدز اصلی ($Re_{mean} = 575$) و

۵. بحث و تحلیل نتایج

نتایج مربوط به مطالعه دینامیک جریان ضربانی برای گرفتگی شدید ۷۵٪ با استفاده از مدل رفتار جریانی تابع نمایی شامل خطوط جریان میدان حل و تغییرات تنش برشی دیواره در این قسمت ارائه می‌شود. مشخصات هندسی و فیزیکی برای نتایج ذیل به تفصیل در جدول ۱ ذکر شده است.

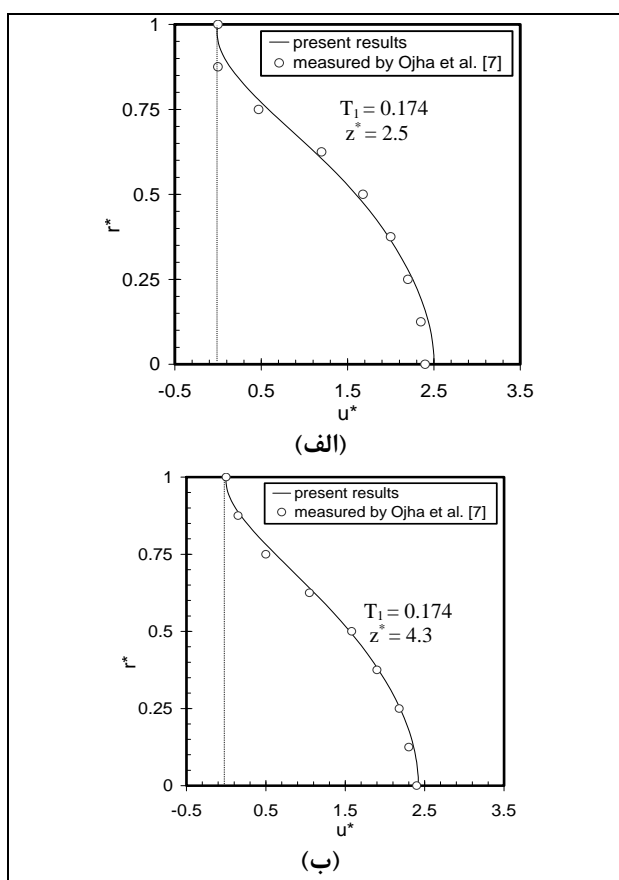
۵-۱. خطوط جریان میدان حل

برای $Wo = 4$ که اثرات اینرسی گذرای کمتری نسبت به دو عدد ومرسلی دیگر (یعنی $12/5$ و $7/5$) دارد، خطوط جریان در چهار زمان متفاوت در شکل ۹ رسم شده‌اند (محل قرارگیری این چهار زمان در طول مدت زمان یک تکرار ضربان سینوسی در شکل ۱-ج نشان داده شده است). گردابه‌ای که بعد از گرفتگی ایجاد می‌شود در طول مدت زمانی که شتاب منفی است (یعنی از T_1 تا T_3) رشد می‌کند (شکل‌های ۹-الف و ۹-ب). علت رشد این گردابه را می‌توان کاهش شدت جت جریان تولید شده به واسطه گرفتگی بیان کرد. در طول مدت زمانی که شتاب منفی است به علت کاهش شدت جت جریان، انرژی جنبشی سیال کاهش پیدا می‌کند که این پدیده باعث افزایش طول گردابه و محدوده چرخش به وجود آمده می‌شود.



شکل ۷. پروفیل‌های سرعت محوری برای دو نقطه در طول لوله، برای گرفتگی ۴۵٪ در زمان $T_2 = 0.522$ و مقایسه با نتایج [۷] Ojha et al.: (الف): پروفیل سرعت در $z^* = 2/5$ و (ب): پروفیل سرعت در $z^* = 4/3$

در شکل ۶ پروفیل‌های سرعت برای زمان T_1 رسم شده‌اند. همانگونه که در شکل ۵-ب مشخص شده است، در T_1 در منطقه‌ای از ضربان قرار دارد که در این محدوده شتاب منفی است. هر دو نتیجه عددی و آزمایشگاهی بازگشت جریان را در ناحیه نزدیک دیواره پیش‌بینی می‌کنند. برای زمانی در نزدیکی کمترین آهنگ جریان سیال (T_2)، جایی که شتاب جریان مثبت است (شکل ۵-ب)، پروفیل‌های سرعت در شکل ۷ رسم شده‌اند. با توجه به اینکه جریان در این زمان در ناحیه شتاب مثبت قرار دارد، انتظار داریم که بازگشت جریان برای این زمان مشاهده نشود. همانگونه که در شکل‌های ۷-الف و ۷-ب برای دو فاصله مختلف از مرکز گرفتگی نشان داده شده است، هر دو نتیجه آزمایشگاهی و عددی این پیش‌بینی را تایید می‌کنند.



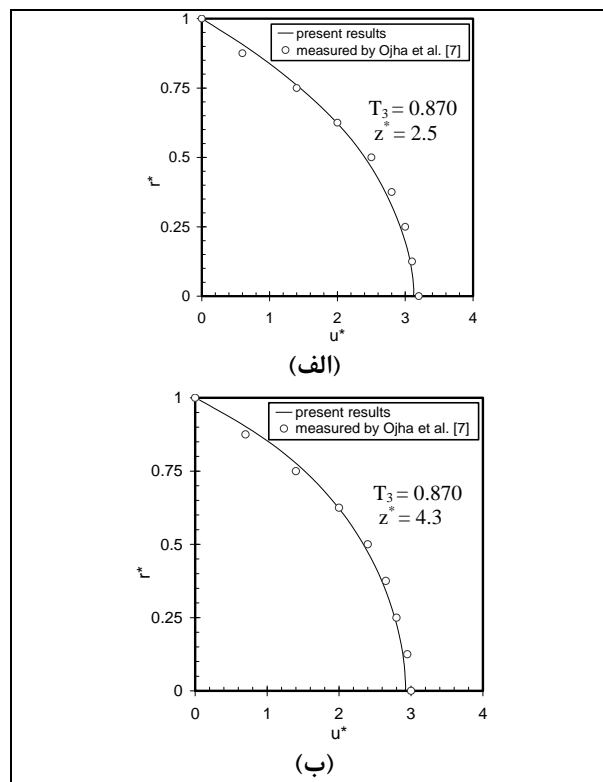
شکل ۶. پروفیل‌های سرعت محوری برای دو نقطه در طول لوله، برای گرفتگی ۴۵٪ در زمان $T_1 = 0.174$ و مقایسه با نتایج [۷] Ojha et al.: (الف): پروفیل سرعت در $z^* = 2/5$ و (ب): پروفیل سرعت در $z^* = 4/3$

پروفیل‌های سرعت در دو فاصله مختلف برای زمان T_3 در نزدیکی آهنگ جریان ماکزیمم و در ناحیه شتاب مثبت (شکل ۵-ب) در شکل ۸ رسم شده‌اند. برای این زمان، اختلاف موجود در مقدار ماکزیمم سرعت ورودی مرکز لوله که در شکل ۵-الف به آن اشاره شد، مجدداً نمایان می‌شود.

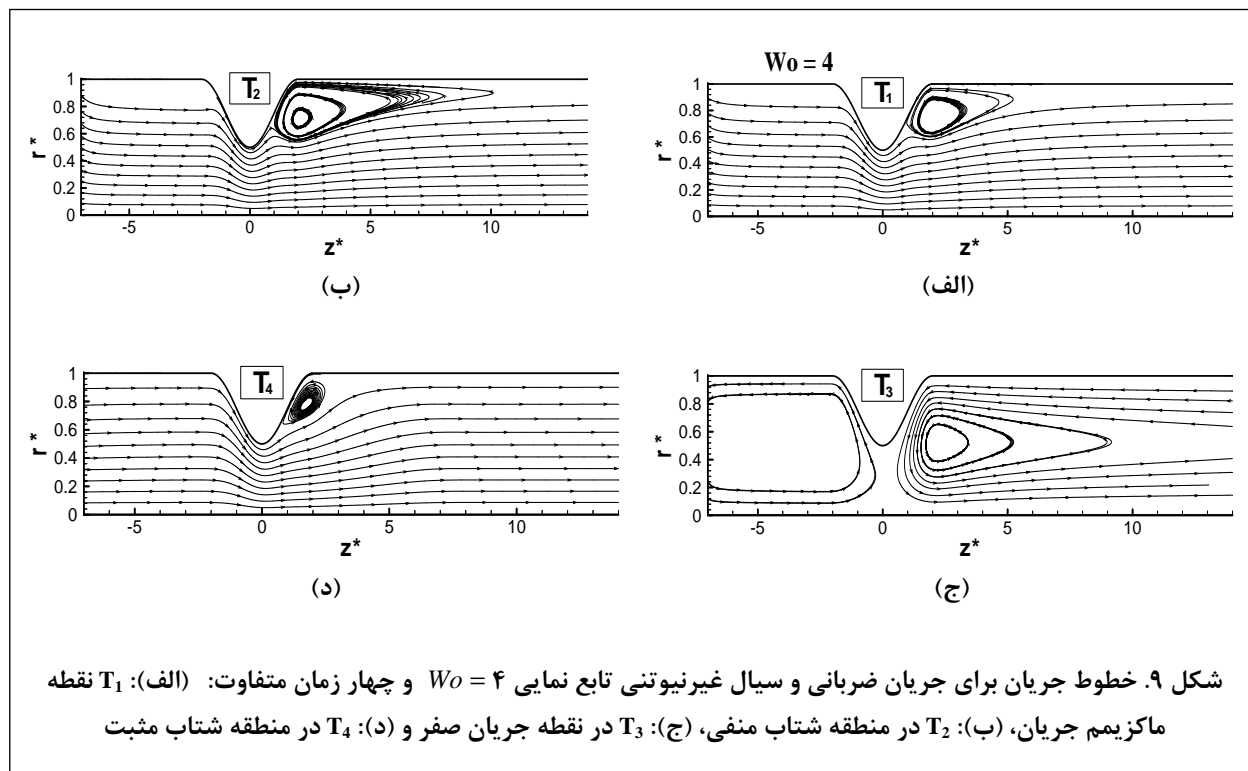
در زمان T_3 با صفر شدن جریان ورودی و متعاقب آن فروکش کردن جت جریان خروجی از گرفتگی، میدان جریان تقریباً به دو منطقه که شامل محدوده پیش از گرفتگی و پس از گرفتگی است، تقسیم می‌شود (شکل ۹-ج). در این حالت با وجود اینکه جریان ورودی صفر است ولی اینرسی موجود باعث جریان سیال می‌شود. با شتاب گرفتن جریان در محدوده یک چهارم انتهایی ضربان (از T_3 تا T_4) و افزایش جت خروجی از گلوگاه میدان جریان یک گردابه جدید در نزدیکی دیواره پشتی گرفتگی^۱ تشکیل می‌شود.

در شکل ۱۰ نیز خطوط جریان در میدان حل برای $Wo = 7/5$ نمایش داده شده‌اند.

مشخصه‌های میدان جریان در این عدد و مرسلی ($Wo = 7/5$) تقریباً مشابه میدان جریان برای $Wo = 4$ است، با این تفاوت که اینرسی جت جریان تولید شده به واسطه گرفتگی برای این حالت ($Wo = 7/5$) بیشتر از حالت قبل ($Wo = 4$) است.

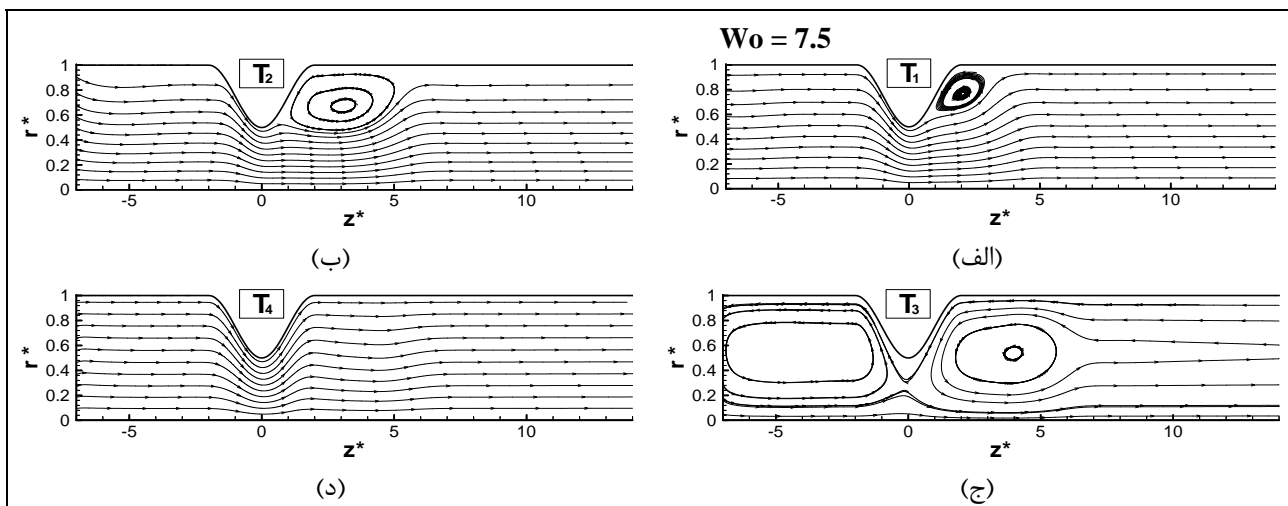


شکل ۸. پروفیل‌های سرعت محوری برای دو نقطه در طول لوله، برای گرفتگی ۴۵٪ در زمان $T_3 = 0.870$ و مقایسه با نتایج [۷] Ojha et al. (الف): پروفیل سرعت در $z^* = 2/5$ و (ب): پروفیل سرعت در $z^* = 4/3$

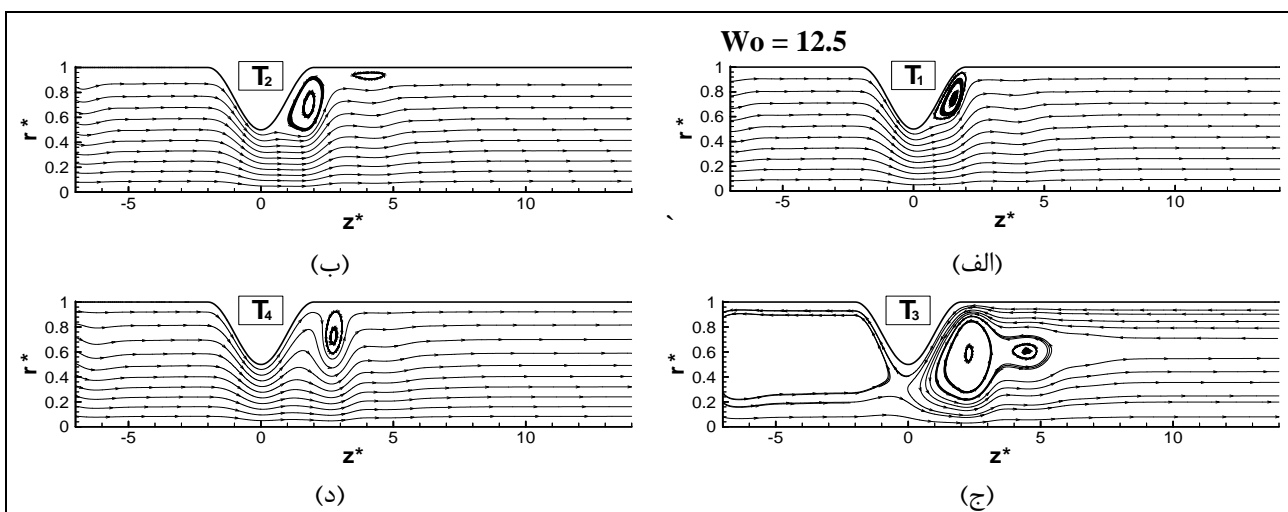


شکل ۹. خطوط جریان برای جریان ضربانی و سیال غیرنیوتنی تابع نمایی $Wo = 4$ و چهار زمان متفاوت: (الف): T_1 نقطه ماکزیمم جریان، (ب): T_2 در منطقه شتاب منفی، (ج): T_3 در نقطه جریان صفر و (د): T_4 در منطقه شتاب مثبت

^۱ Distal face



شکل ۱۰. خطوط جریان برای جریان ضربانی و سیال غیرنیوتنی تابع نمایی $Wo = 7/5$ و چهار زمان متفاوت: (الف): T_1 نقطه ماکزیمم جریان، (ب): T_2 در منطقه شتاب منفی، (ج): T_3 در نقطه جریان صفر و (د): T_4 در منطقه شتاب مثبت



شکل ۱۱. خطوط جریان برای جریان ضربانی و سیال غیرنیوتنی تابع نمایی در $Wo = 12/5$ و چهار زمان متفاوت: (الف): T_1 نقطه ماکزیمم جریان، (ب): T_2 در منطقه شتاب منفی، (ج): T_3 در نقطه جریان صفر و (د): T_4 در منطقه شتاب مثبت

می‌آید این است که گردابه‌های به وجود آمده در زمانهای مشابه در طول یک تکرار ضربان برای $Wo = 4$ کشیده‌تر از گردابه‌های تشکیل شده برای $Wo = 7/5$ می‌باشند. این روند برای $Wo = 12/5$ نیز وجود دارد به طوری که گردابه‌های تشکیل شده برای این عدد و مرسلی نسبت به گردابه‌های تشکیل شده برای ۴ و $Wo = 7/5$ در زمانهای متناظر بزرگ‌تر هستند (شکل ۱۱). علت این پدیده را می‌توان در تقابل اثرات اینرسی گذرا و اثرات لزجتی که در واقع نسبت آنها بیان کننده عدد و مرسلی است، جستجو کرد.

خطوط جریان برای $Wo = 12/5$ که اثرات اینرسی گذرای بیشتری (در مقابل اثرات لزجتی) نسبت به دو عدد و مرسلی ۴ و $7/5$ دارد، برای چهار زمان مختلف در شکل ۱-ج در شکل ۱۱ رسم شده‌اند. برای زمان T_1 محدوده چرخش در مقایسه با همین زمان برای $Wo = 7/5$ باز هم کوچکتر شده است (شکل ۱۱-الف). با شروع محدوده شتاب منفی، تشکیل و توسعه گردابه دوم در پایین دست

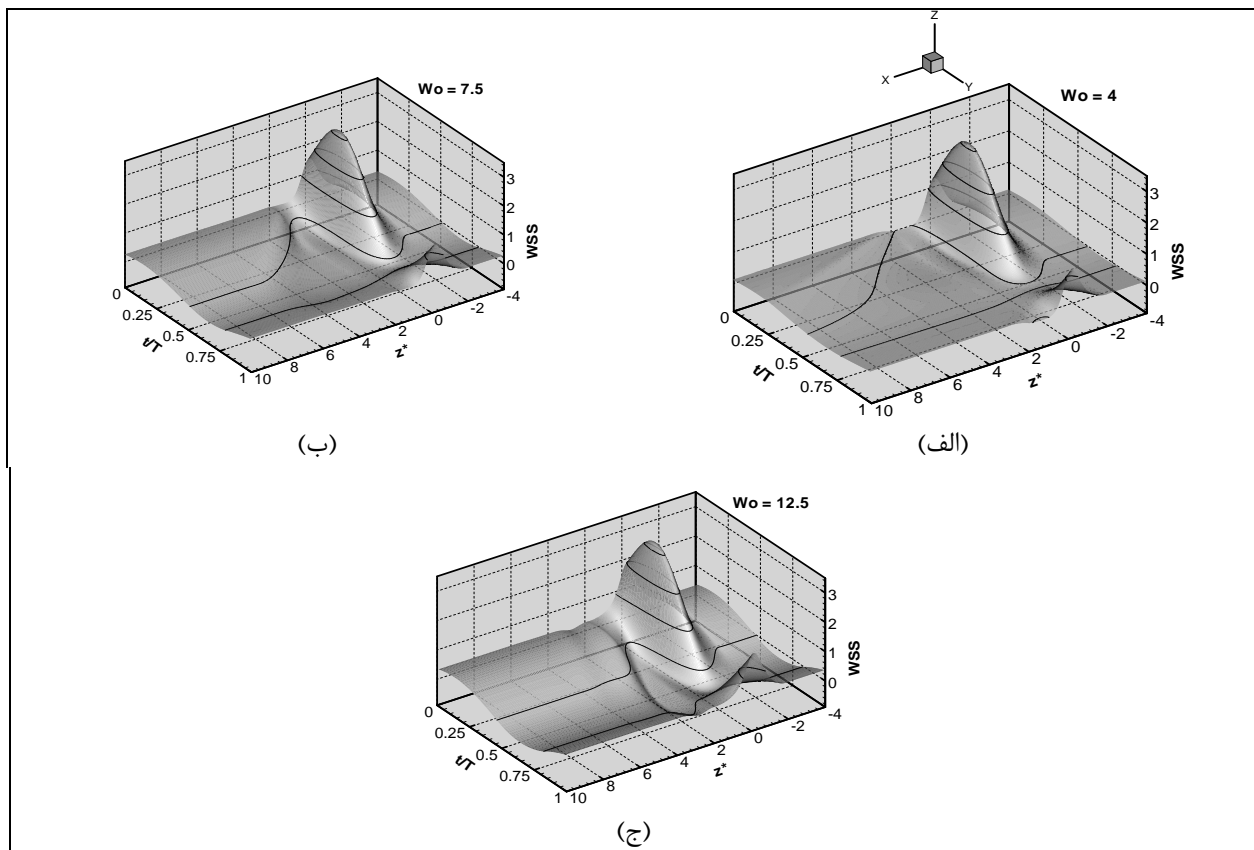
بدین ترتیب در $Wo = 7/5$ به واسطه بیشتر بودن اثرات اینرسی، گردابه‌های تشکیل شده در پشت گرفتگی برای دو زمان T_2 و T_1 نسبت به دو حالت قبل ($Wo = 4$) کوچکتر شده‌اند (شکل ۱۰-الف و ۱۰-ب). همچنین در زمان T_4 با شتاب‌گیری جریان از نقطه جریان صفر (T_3) محدوده چرخش در پشت گرفتگی تشکیل نمی‌شود (بر خلاف زمان T_4 برای $Wo = 4$) و تنها خطوط جریان خمیده در پایین دست جریان نشان می‌دهند که محدوده چرخش در زمانهای قبل وجود داشته است (شکل ۱۰-د). در زمان T_3 نیز مجدداً میدان جریان به دو منطقه جدایش که یکی در محدوده قبل از گرفتگی و دیگری در محدوده بعد از گرفتگی به وجود می‌آید، تقسیم می‌شود (شکل ۱۰-ج). در این زمان نیز محدوده چرخش در پشت گرفتگی نسبت به زمان مشابه برای $Wo = 4$ کوچکتر شده است. نکته قابل توجهی که از مقایسه محدوده‌های چرخش ایجاد شده در میدان جریان برای دو عدد و مرسلی ۴ و $7/5$ به دست

گردابه جدا شده از گرفتگی کاملاً از بین رفته است و دیگر قابل مشاهده نیست (شکل ۱۱-الف). اثرات گردابه قبلی هنوز به شکل خطوط خمیده جریان در فاصله چهار برابر قطر، از مرکز گرفتگی دیده می‌شود (شکل ۱۱-د). اثرات وجود این گردابه و اغتشاشات تولید شده به واسطه آن در منحنی صفحه‌ای تنش برشی دیواره برای $Wo = 12/5$ (شکل ۱۲-ج) نیز در زمان $t/T = 0$ و مکان $z^* \approx 4$ قابل مشاهده است. با کاهش شتاب جریان، ترکیب اثرات به جا مانده از گردابه قبلی (گردابه مربوط به زمان T_4 در شکل ۱۱-د) با سرعت‌های چرخشی مجاور گردابه جدید، باعث شکل‌گیری گردابه دوم در نزدیکی گردابه اولیه می‌شود و کم‌کم هر دو گردابه به سمت پایین دست جریان جابجا می‌شوند. این روند برای هر ضربان تکرار می‌شود.

۲-۵. تغییرات تنش برشی دیواره (WSS)

منحنی‌های صفحه‌ای تنش برشی دیواره در مقابل زمان و مکان (در امتداد طول لوله) برای سه عدد ومرسلی ۴، ۷/۵ و ۱۲/۵ در شکل ۱۲ رسم شده‌اند. همانگونه که در قسمت قبل در بررسی خطوط جریان میدانهای حل برای اعداد ومرسلی مختلف نیز اشاره شد، بعضی از مشخصه‌های میدان جریان در این منحنی‌های صفحه‌ای بهتر نمایش داده می‌شوند.

جریان در پشت گردابه اولیه آغاز می‌شود. همانگونه که در شکل ۱۱-ب مشاهده می‌شود این گردابه در زمان T_2 در فاصله ۵ برابر قطر و در نزدیکی دیواره تشکیل شده است. بررسی میدان جریان در طول یک تکرار ضربان نشان می‌دهد که ظهور اولین مولفه‌های سرعت چرخشی در پایین دست گرفتگی باعث شکل‌گیری گردابه اولیه می‌شود که این گردابه در نتایج مربوط به ۴ و $Wo = 7/5$ نیز مشاهده می‌شود. در $Wo = 12/5$ دو گردابه تشکیل شده با کم شدن قدرت آنها کمی به پایین دست جریان جابجا می‌شوند و توسعه پیدا می‌کنند به طوری که در نقطه جریان صفر (T_3) اندازه محدوده چرخش شامل این دو گردابه افزایش پیدا کرده و به بزرگترین حالت ممکن در طول یک ضربان می‌رسد (شکل ۱۱-ج). با شتاب‌گیری جریان و افزایش شدت جت جریان تولید شده هر دو گردابه به پایین دست جریان منتقل شده و گردابه دوم در نهایت از بین می‌رود به طوری که در زمان T_4 گردابه دوم کاملاً از بین رفته است و گردابه اولیه تقریباً در فاصله ۳ برابر قطر از مرکز گرفتگی قرار می‌گیرد در حالی که اندازه آن کوچکتر شده است (شکل ۱۱-د). می‌توان این گونه نتیجه‌گیری کرد که افزایش اینرسی جت جریان خروجی از گرفتگی باعث جلوگیری از نزدیکی این گردابه و شکل‌گیری یک محدوده چرخش در نزدیکی گرفتگی شده است. این افزایش در نهایت باعث از بین رفتن این گردابه می‌شود به طوری که در زمان T_1 مجدداً گردابه جدیدی در نزدیکی گرفتگی ایجاد شده و



شکل ۱۲. تنش برشی دیواره بر حسب زمان و مکان برای جریان ضربانی خون و مدل سیال غیرنیوتنی تابع نمایی در اعداد ومرسلی مختلف:

(الف): $Wo = 4$ ، (ب): $Wo = 7/5$ و (ج): $Wo = 12/5$

استفاده از مدل تابع نمایی، بررسی گردیده است و نشان داده شده که تغییرات این عدد که بیانگر تقابل اثرات اینرسی گذرا و اثرات لزجی است، چگونه بر میدان جریان تاثیر می‌گذارد و باعث تغییر اندازه گردابه‌ها و یا حتی تعداد آنها می‌شود.

۳- گردابه‌های تشکیل شده در زمانهای مشابه با کاهش عدد ومرسلی کشیده‌تر و طولی‌تر می‌شوند که این پدیده به علت تفاوت در نسبت تاثیرات اینرسی گذرای جریان و اثرات لزجی که بیان کننده عدد ومرسلی است، به وجود می‌آید.

۴- زمان تشکیل گردابه اولیه که در میدان جریان اتفاق می‌افتد متاثر از مقدار عدد ومرسلی است که با افزایش آن این زمان به تاخیر می‌افتد.

۵- با توجه به تفاوت اساسی در میدان جریان برای $Wo = 12/5$ در مقایسه با اعداد ومرسلی کمتر می‌توان اینگونه نتیجه‌گیری کرد که فرکانس تپش در جریانهای ضربانی تکرار شونده نقش اساسی در شکل‌گیری الگوی جریان دارد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از راهنمایی‌ها و کمکهای آقای دکتر حمید نیازمند تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

- [1] Pontrelli, G., "Pulsatile Blood Flow in a Pipe," Computers & Fluids, Vol. 27, No. 3, 1998, PP. 367-380.
- [2] Tu, C., Deville, M., "Pulsatile Flow of Non-Newtonian Fluids Through Arterial Stenoses," J. Biomechanics, Vol. 29, No. 7, 1996, PP. 899-908.
- [3] Deplano, V., Siouffi, M., "Experimental and Numerical Study of Pulsatile Flows through Stenosis: Wall Shear Stress Analysis," Journal of Biomechanics, Vol. 32, 1999, PP. 1081-1090.
- [4] Ishikawa, T., Guimaraes, L.F.R., Oshima, S., Yamane, R., "Effect of Non-Newtonian Property of Blood on Flow Through a Stenosed Tube," Fluid Dynamics Research, Vol. 22, 1998, PP. 251-264.
- [5] Ishikawa, T., Oshima, S., Yamane, R., "Vortex Enhancement in Blood Flow Through Stenosed and Locally Expanded Tubes," Fluid Dynamics Research, Vol. 26, 2000, PP. 35-52.
- [6] Buchanan, Jr.J.R., Kleinstreuer, C., Comer, J.K., "Rheological Effects on Pulsatile Hemodynamics in a Stenosed Tube," Computers & Fluids, Vol. 29, 2000, PP. 695-724.
- [7] Ojha, M., Cobbald, R.S.C., Johnston, K.W., Hummel, R.L., "Pulsatile Flow Through Constricted Tubes: an Experimental Investigation Using Photocromic Tracer Methods," Fluid Mech., Vol. 203, 1989, PP. 173-197.
- [8] Chhabra, R.P., Richardson, J.F., Non-Newtonian Flow in

هر سه منحنی صفحه‌ای تنش برشی، تقریباً دارای مقادیر ماکزیمم یکسان هستند اگرچه افزایش اندکی در این مقدار ماکزیمم با افزایش عدد ومرسلی صورت می‌گیرد ولی پارامتر اساسی که این مقدار ماکزیمم را کنترل می‌کند، مقدار ماکزیمم عدد رینولدز می‌باشد که برای این نتایج ثابت است. با بررسی خطوط هم تنش برشی صفر در هر کدام از این سه شکل می‌توان زمان تشکیل گردابه اولیه را در هر کدام از سه عدد ومرسلی مختلف روی قسمت پشت گرفتگی تخمین زد [۶]. با بررسی این خطوط هم در شکل ۱۲- الف برای $Wo = 4$ مشاهده می‌شود که زمان تشکیل گردابه اولیه، در محدوده شتاب‌گیری یعنی در فاصله زمانی بین T_3 تا T_4 قرار می‌گیرد به طوریکه در زمان T_4 این گردابه اولیه باید تشکیل شده و توسعه پیدا کرده باشد. این پیش‌بینی با نتایج خطوط جریان برای $Wo = 4$ در زمان T_4 که گردابه اولیه تشکیل شده است، تایید می‌شود (شکل ۹-د). این در حالی است که این زمان (یعنی زمان تشکیل گردابه اولیه) برای $Wo = 7/5$ به تاخیر می‌افتد به طوریکه از روی شکل ۱۲- ب این زمان بین T_1 و T_4 تخمین زده می‌شود که با نتایج شکل ۱۰ برای خطوط جریان $Wo = 7/5$ هم‌خوانی دارد. همانطور که در شکل ۱۰- د مشاهده می‌شود،

در زمان T_4 هنوز گردابه اولیه تشکیل نشده است در حالی که این گردابه در زمان T_1 در میدان جریان مشاهده می‌شود و بیانگر آن است که تشکیل گردابه اولیه در زمانی بین T_1 و T_4 صورت گرفته است. همچنین با بررسی خطوط هم تنش برشی صفر برای $Wo = 12/5$ (شکل ۱۲- ج) مشاهده می‌شود که زمان تشکیل گردابه اولیه به تاخیر افتاده است. اگرچه در $Wo = 12/5$ نیز تشکیل گردابه اولیه بین T_1 و T_4 رخ می‌دهد ولی این زمان نسبت به حالت قبل ($Wo = 7/5$) به T_1 نزدیک‌تر شده که نشانگر تاخیر زمانی بیشتر است.

با توجه به اینکه بر اساس نتایج شکل‌های ۱۰- الف و ۱۱- الف، گردابه تشکیل شده در زمان T_1 برای $Wo = 12/5$ کوچکتر از این گردابه در همین زمان برای $Wo = 7/5$ است نتیجه‌گیری به دست آمده از شکل ۱۲- ج، مبنی بر تاخیر بیشتر در تشکیل گردابه اولیه نسبت به دو حالت قبلی (۴ و $Wo = 7/5$) نیز تایید می‌شود. همچنین در این شکل اغتشاشاتی که باعث تشکیل گردابه دوم در نزدیکی گردابه اولیه، برای $Wo = 12/5$ می‌شوند به خوبی نمایش داده شده است.

۶. نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از این پژوهش به شرح زیر است:

- ۱- کد توسعه داده شده می‌تواند جریان ضربانی خون را در مجاری تنگ شده با استفاده از سیال نیوتنی و غیرنیوتنی برای جریان با تقارن محوری به خوبی شبیه‌سازی کند.
- ۲- اثرات عدد ومرسلی با در نظر گرفتن رفتار غیرنیوتنی سیال، با

the Process Industries-Fundamental and Engineering Applications, Butterworth-Heinemann, 1999.

- [9] Bohme, G., *North-Holland in Applied Mathematics and Mechanics*; V. 31-Non-newtonian Fluid mechanics, Elsevier Science Publishers B.V., 1987.
- [10] Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [11] Fletcher, C.A.J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2-Specific Techniques for Different Flow Categories*, Springer-Verlag, 1988.
- [12] Mai, T., Davis, A.M.J., "Laminar Pulsatile two-Phase Non-Newtonian Flow Through a Pipe," *Computers & Fluids*, Vol. 25, No. 1, 1996, PP. 77-93.

[۱۳] باشی شهابی، پیمان، بررسی و مطالعه دینامیک جریان پالسی خون در رگها، پایان نامه کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد، شهریور ۱۳۸۲.

[۱۴] باشی شهابی، پیمان و مدرس رضوی، سیدمحمد رضا، "تشیه سازی جریان ضربانی خون در مجاری تنگ شده با استفاده از سیال غیر نیوتنی،" هشتمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها، دانشگاه تبریز، ۱۷ تا ۱۹ شهریور ۱۳۸۲.