International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2015)

June 2015, Volume 26, Number 1
pp. 27-41

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

$\overline{X}$ Control Chart with Variable Sampling Interval Using Taguchi's Quality Loss Function

Farzad Amiri, Kazem Noghondarian, Rassoul Noorossana

Farzad Amiri, *PhD candidate, Iran University of Science and Technology.*
Kazem Noghondarian, *Industrial Engineering Department, Iran University of Science and Technology.*
Rassoul Noorossana, *Industrial Engineering Department, Iran University of Science and Technology*

Keywords

Control chart,
genetic algorithm,
markov chain,
quality costs

ABSTRACT

In X-bar control charts, the rate of sampling is considered constant. Actually always samples with fixed size and at fixed time intervals are taken from the process. This chart doesn't have good performance in detecting small and medium size shifts in the process mean. Also, in economic models, fixed values are considered for cost parameters, although changes in other parameters have interaction with quality costs. In recent years, with deploying Taguchi's methods in product design, the concept of loss function is mixed with many statistical decision models estimating quality costs. In this direction, based on Markov chain concepts, X-bar control chart with variable sampling intervals, using Taguchi's quality loss function is developed in this paper. Then using genetic algorithm, the control chart parameters are determined in such a way that the costs of controlling the process is minimized. Also, Taguchi's orthogonal arrays are used in estimating optimum values of the genetic algorithm parameters. Analysis of the results of the developed model, shows its advantage over the constant sampling approach.

© 2015 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 26, No. 1, All Rights Reserved

نشـــریه بین المللـــی مهنـدسی صنـایع و مدیـــریت تولیـد

شمـــاره ۱، جلـــد ۲۶، بهار ۱۳۹۴

صفحـــه ۴۱-۲۸

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

نمودار کنترل $\overline{X}$ با فواصل نمونه‌گیری متغیر با درنظرگرفتن تابع زیان کیفیت تاگوچی

فرزاد امیری ، کاظم نقندریان* ، رسول نورالسناء

کلمات کلیدی

نمودار کنترل،
الگوریتم ژنتیک،
تابع زیان تاگوچی،
هزینه های پایش فرایند

چکیده:

در نمودار کنترل $\overline{X}$ کلاسیک نرخ نمونه‌گیری از فرایند ثابت است. در واقع همواره نمونه‌هایی با اندازه ثابت و در فاصله‌های زمانی ثابت از فرایند گرفته می‌شود. این نمودار در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در میانگین فرایند عملکرد خوبی ندارد. همچنین، در مدل‌های اقتصادی مقادیر ثابتی برای پارامترهای هزینه‌ای درنظرگرفته می‌شود. این درحالی است که تغییرات سایر پارامترها اثرات متقابلی بر تخمین هزینه‌های کیفیت دارد. در سالهای اخیر با گسترش روش‌های تاگوچی در طراحی محصول، مفهوم تابع زیان با بسیاری از مدل‌های تصمیم‌گیری آماری که نیازمند تخمین هزینه‌های کیفیت هستند، آمیخته شده است. در این راستا برپایه مفاهیم زنجیر مارکوف این تحقیق، به توسعه نمودار کنترل $\overline{X}$ با فواصل نمونه‌گیری متغیر با درنظرگرفتن تابع زیان کیفیت تاگوچی پرداخته است. سپس با استفاده از تکنیک الگوریتم ژنتیک، پارامترهای نمودار کنترل به گونه‌ای تعیین می‌گردند که هزینه‌های پایش فرایند حداقل گردد. همچنین، برای تعیین مقادیر بهینه پارامترهای الگوریتم ژنتیک از آرایه متعامد تاگوچی بهره‌گرفته شده است. تحلیل نتایج حاصل از مدل توسعه داده شده در مقایسه با رویکرد نمونه‌گیری ثابت، برتری روش توسعه داده شده را نشان می‌دهد.

۱. مقدمه

در طرح پایش فرایند با استفاده از نمودارهای کنترل، اندازه نمونه در هر بار نمونه‌گیری (n)، فراوانی نمونه‌گیری (h) و ضریب حدود کنترل (L) بایستی تعیین شوند. تجارب عملی و معیارهای آماری خطوط راهنمای کلی برای طراحی نمودارهای کنترل را ارائه نموده‌اند.

تاریخ وصول: ۹۱/۱/۲۶

تاریخ تصویب: ۹۱/۱۰/۱۹

***نویسنده مسئول مقاله:**

***کاظم نقندریان**: استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی صنایع noghondarian@iust.ac.ir

فرزاد امیری دانشجوی دکترا دانشگاه علم و صنعت ایران دانشکده مهندسی صنایع f_amiri@msn.com

رسول نورالسناء استاد دانشگاه علم و صنعت ایران - - تهران نارمک دانشگاه علم و صنعت ایران دانشکده مهندسی صنایع rassoul@iust.ac.ir

برای مثال، ایشیکاوا مقادیر $n = 5, h = 8, L = 3$، فیگنبام مقادیر $n = 5, h = 1, L = 3$ و جوران مقادیر $n = 4, h = 7, L = 3$ را برای این پارامترها در طراحی نمودار کنترل $\overline{X}$ شوهارت پیشنهاد داده‌اند. به استثنای $L = 3$ دو پارامتر دیگر را نمی‌توان به سادگی به دست آورد.

در ادبیات نمودارهای کنترل، در صورتی که پارامترهای نمودار کنترل در طول پایش فرایند ثابت باشند، طرح‌های با نرخ نمونه‌گیری ثابت (FSR)اطلاق می شود (Reynolds and Arnold, 1989). در مقابل نمودارهای کنترل انطباقی نامیده می‌شوند، هرگاه یکی از پارامترهای نمودار براساس مقادیر حاصله از آماره نمونه ای گرفته شده که در بر دارنده اطلاعات فرآیند است، تغییر نماید. برای نمونه، اگر آخرین آماره نمونه‌ای داخل حدود کنترل افتاد ولی خیلی نزدیک به یکی از حدود کنترل بود، آنگاه منطقی است که شک کنیم فرآیند بسمت خارج از کنترل بودن شیفت پیدا کرده است و نمونه بعدی بهتر است زودتر گرفته شود. این انعطاف‌پذیری نمودارهای کنترل انطباقی هم از لحاظ معیارهای

آماری و هم اقتصادی به نتایج بهتری منجر خواهد شد (Tagaras, 1998). طرح با اندازه نمونه متغیر (VSS)، طرح با فواصل نمونه‌گیری متغیر (VSI) و طرح با اندازه نمونه متغیر و بازه نمونه‌گیری متغیر(VSSI) از جمله طرح‌های نمونه‌گیری انطباقی هستند.

نمودار کنترل $\overline{X}$ شوهارت با فواصل زمانی متغیر، اولین بار توسط (Reynolds et al., 1988) مطالعه شد و سپس (Reynolds and Arnold, 1989) و همچنین (Runger and Pignatiello, 1991) ثابت کردند که این نمودارها دارای توان بیشتری در شناسایی تغییرات در میانگین فرایند نسبت به نمودار $\overline{X}$ کلاسیک می‌باشند. تحقیقات فوق صرفا به بهینه‌سازی مشخصه‌های آماری، مانند خطاهای نوع یک و دو، متوسط طول دنباله و متوسط زمان تا هشدار تمرکز داشته است.

رویکرد طراحی اقتصادی-آماری نمودارهای کنترل، رویکرد دیگری است که در پی حداقل‌سازی زیان ناشی از کیفیت پایین تولیدات فرایند برای تعیین طرح‌های بهینه پایش فرایند است. در این رویکرد، علاوه بر درنظرگرفتن هزینه‌های پایش فرایند، مشخصه‌های آماری هم درنظر گرفته می‌شود. پارامترهای اصلی مرتبط با تصمیمات طراحی اقتصادی-آماری نمودار کنترل عبارتند از: ۱) هزینه‌های مرتبط با پایش فرایند همچون هزینه تولید محصول نا منطبق، ۲) پارامترهای وابسته به زمان همچون مدت زمان لازم برای نمونه‌گیری و تفسیر نتایج و ۳) پارامترهای فرایند مثل اندازه شیفت از میانگین فرایند. (Duncan, 1956) اولین طرح اقتصادی نمودارهای کنترل را پیشنهاد کرده است. (Lorenzen and Vance, 1986) یک مدل اقتصادی برای طراحی نمودارهای کنترل ارائه دادند که تقریباً از روشی متفاوت از رویکرد Duncan استفاده می‌کرد. نکته اصلی در مورد این مدل، استفاده از متوسط طول دنباله در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل به جای خطاهای نوع اول و دوم است. تحقیقات متعددی در زمینه طراحی اقتصادی (و اقتصادی-آماری) نمودار کنترلی $\overline{X}$ انطباقی صورت گرفته است (Bai and Lee, 1998, Bai and Lee, 2002, Chen, 2004, Chen and Chiou, 2005, Yu et al., 2007, Lin and Chou, 2008, Lin et al., 2009, Lee et al., 2012, Niaki et al., 2012, Cheng and Guo, 2011).

نخستین طرح اقتصادی نمودار کنترل $\overline{X}$ با فواصل نمونه‌گیری متغیر (VSI) توسط (Bai and Lee, 1998) توسعه داده شد. (Yu and Chen, 2005) به طراحی نمودار کنترل VSI - $\overline{X}$ در یک فرایند پیوسته پرداخته‌اند. (Yu et al., 2007) طرح فوق را با درنظرگرفتن چندین علت بادلیل توسعه داده‌اند. (Lin et al., 2009) و (Chen and Yeh, 2011) به توسعه طرح اقتصادی نمودار کنترل $\overline{X}$ با فواصل نمونه‌گیری متغیر در شرایط غیر نرمال بودن داده‌های فرایند پرداخته اند. در تحقیقات فوق، مدل اقتصادی با فرض مقادیری ثابت برای پارامترهای هزینه‌ای در مدل طراحی شده است. با توجه به اثرات متقابلی که تغییرات پارامترها بر روی هم دارند، استفاده از مفهوم تابع زیان برای تخمین هزینه‌های کیفیت پائین توسط محققین توصیه شده است. دمینگ (Deming, 1982) معتقد است که تابع زیان تاگوچی توصیف بهتری از دنیای واقعی دارد که در آن حداقل زیان در مقدار اسمی است و با هرگونه انحراف از مقدار اسمی مقدار زیان افزایش خواهد یافت. لذا طراحی اقتصادی-آماری نمودار کنترل با تلفیق مدل‌های کلاسیک هزینه‌ای مانند مدل‌های دانکن و لورنزن و وانس، با تابع زیان کیفیت تاگوچی توسعه داده شده است (Safaei et al., 2012, Al-Ghazi et al., 2007, Yang, 1998, Koo and Lin, 1992). مدل‌های طراحی اقتصادی با درنظرگیری تابع زیان تاگوچی، از مفاهیم تاگوچی و کنترل آماری فرایند بهره برداری می‌کنند و برای هر انحرافی از مقدار هدف، چه سیستم تحت کنترل و چه خارج از کنترل باشد، جریمه درنظرگرفته می‌شود.

(Taguchi et al., 1989) طرحی اقتصادی برای تعیین بازه تشخیص و حدود کنترل یک سیستم تولیدی را با استفاده از تابع زیان ارائه نموده اند. محققین بسیاری تابع زیان تاگوچی را در طراحی اقتصادی-آماری نمودار کنترل $\overline{X}$ شوهارت بکارگرفته اند (Moskowitz et al., 1994, Elsayed and Chen, 1994, Koo and Lin, 1992). همچنین، (Chou et al., 2002) با استفاده از تابع زیان تاگوچی به توسعه ایده (Montgomery and Klatt, 1972) برای نمودار کنترل چند متغیره، برای پایش همزمان میانگین و واریانس پرداخته اند. (Serel and Moskowitz, 2008) نیز با استفاده از تابع زیان تاگوچی طراحی اقتصادی آماری نمودار کنترل EWMA را بررسی کرده‌اند. اما هیچ یک از تحقیقات انجام شده تاکنون طراحی اقتصادی نمودار کنترل انطباقی را با درنظرگیری تابع زیان کیفیت تاگوچی بررسی نکرده‌اند.

در این تحقیق، طراحی نمودار کنترل $\overline{X}$ انطباقی با فاصله نمونه‌گیری متغیر (VSI) توسعه داده خواهد شد. ابتدا مدل نمودار کنترل $\overline{X}$ با طرح نمونه‌گیری با فواصل زمانی متغیر طراحی می‌گردد. در بخش سوم، تابع هزینه پایش فرایند توسعه داده خواهد شد. در بخش چهارم، با استفاده از الگوریتم فراابتکاری ژنتیک روش حلی برای تعیین طرح بهینه پایش فرایند ارائه شده است. همچنین، برای تعیین مقادیر بهینه پارامترهای الگوریتم ژنتیک از آرایه متعامد تاگوچی بهره گرفته شده است. در بخش پنجم، تحلیل عددی نتایج حاصل از مدل جدید با رویکرد نمونه‌گیری ثابت مقایسه شده است و تحلیل حساسیت پارامترهای مدل در ادامه صورت گرفته است. در نهایت نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای تحقیقات آتی ارائه شده است.

۲. نمودار کنترل انطباقی با فاصله نمونه گیری متغیر(VSI)

در نمودار کنترل $\overline{X}$ انطباقی با فاصله نمونه‌گیری متغیر(VSI) پارامترهای اندازه نمونه (n)، بازه های نمونه‌گیری (h_1, h_2) وحد هشدار (w) و حد کنترل (L) بگونه‌ای تعیین شوند که با درنظرگرفتن تابع هزینه اقتصادی و هزینه‌های ناملموس خارجی، متوسط کل هزینه‌های سیستم کنترل کیفی حداقل گردد. در نمودار کنترل $\overline{X}$-VSI نمونه‌های با اندازه ثابت گرفته می شود و نمونه آتی همواره بسته به وضعیت فعلی آماره، در یکی از بازه‌های

$$\begin{array}{lll} \text{if} & \overline{X}_{i-1} \in & \text{central region} \\ \text{if} & \overline{X}_{i-1} \in & \text{warning region} \end{array} \qquad (۱)$$

در نمودارهای کنترل انطباقی هنگامی که فرایند از حالت تحت کنترل آماری $(\delta=0)$، شروع بکار می‌نماید از تعدیل شده معیار متوسط زمان تا هشدار (ATS) با نام $AATS$ استفاده می‌شود. $AATS$ بیانگر متوسط زمان لازم از وقوع شیفت تا دریافت یک هشدار از سوی نمودار کنترل است. معمولاً فرض می‌شود که مدت زمانی که فرایند در حالت تحت کنترل باقی می‌ماند از توزیع نمایی با میانگین $1/\lambda$ پیروی می‌نماید. سپس تغییری در میانگین فرایند به اندازه δ سبب بروز یک حالت خارج از کنترل می‌گردد. لذا، مقدار $AATS$ زمانی که تغییری به اندازه δ در میانگین فرایند رخ داده باشد، برابر است با رابطه شماره (۲):

$$AATS = ATC - \frac{1}{\lambda} \qquad (۲)$$

در رابطه فوق، ATC بیانگر متوسط زمان لازم از شروع تولید تا مشاهده اولین هشدار از سوی نمودار بعد از وقوع تغییر در فرایند است. معیار ATC را می‌توان با توجه به ویژگی فقدان حافظه توزیع نمایی و خواص زنجیره مارکوف محاسبه نمود. همانگونه که اشاره شد، اگر نمونه گرفته شده پیشین در ناحیه مرکزی قرارگیرد، نمونه بعدی در h_1 واحد زمانی دیگر از فرایند جمع‌آوری خواهد شد. در هر بار نمونه‌گیری از فرایند یکی از چهار حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت ۱: فرآیند تحت کنترل و بازه نمونه گیری بزرگ باشد.
حالت ۲: فرآیند تحت کنترل و بازه نمونه گیری کوچک باشد.
حالت ۳: فرآیند خارج کنترل و بازه نمونه گیری بزرگ باشد.
حالت ۴: فرآیند تحت کنترل و بازه نمونه گیری کوچک باشد.

(h_1, h_2) نمونه‌گیری خواهد شد. رابطه بین دو بازه نمونه‌گیری بصورت $h_1 > h_2$ است. اگر مقدارآماره زیرگروه i-1 ام در ناحیه میان خط هشدار تا حد کنترل نمودار قرار گیرد، این احتمال وجود دارد که تغییری در میانگین فرایند رخ داده شده باشد، و امکان اعلام یک هشدار از سوی نمودار در زیرگروه بعدی وجود دارد. لذا زیرگروه i ام بعد از h_2 واحد زمانی $(h_1 > h_2)$، گرفته خواهد شد. در غیر این صورت زمانی که آماره در ناحیه مرکزی قرارگیرد، نمونه بعدی در h_1 واحد زمانی دیگر از فرایند جمع‌آوری خواهد شد. بنابراین، طرح نمونه‌گیری VSI به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$(h_i, n, w, k) = \begin{cases} (h_1, n, w, k) \\ (h_2, n, w, k) \end{cases}$$

نمودار کنترل هنگامی که مقدار نمونه در ناحیهٔ اقدام قرار گیرد، هشداری مبنی بر خارج ازکنترل بودن فرایند اعلام می‌دارد و جستجوی برای یافتن انحراف بادلیل شروع می‌شود. در این صورت یکی از حالت‌های زیر ممکن است پیش آمده باشد:

اگر حالت جدید، حالت ۱ یا ۲ باشد، هشداری غلط صادر شده است.

اگر حالت جدید، حالت ۳ یا ۴ باشد، سیگنال هشداری صحیح می‌باشد.

و حالت ۵، زمانی که هشدار صحیح رخ دهد، را می توان حالت جاذب در زنجیرهای مارکوف نامید.

مفاهیم اساسی زنجیرهای مارکوف را که در این بخش به‌کار رفته‌اند را می‌توان در (Cinlar, 1975) یافت. برای یک زنجیر مارکوف با چهار حالت گذرا فوق، ماتریس احتمال تغییر وضعیت زمانی، ماتریس احتمالات انتقال $P = [p_{ij}]$، به قرار زیر است:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

در ماتریس فوق احتمال p_{ij} بیانگر احتمال تغییر وضعیت به حالت فعلی j از حالت قبلی i است. در ادامه، احتمال تغییر وضعیت فرایند از هر حالت به حالت دیگر محاسبه شده است. احتمالات تغییر وضعیت فرایند از حالت ۱ به سایر حالت‌ها مطابق رابطه شماره (۴) است.

$$\begin{aligned} p_{11} &= \Pr(|Z| \le w \,|\, |Z| \le L) \times e^{-\lambda h_1} = (\Phi(w) - 0.5)/(\Phi(L) - 0.5) \times e^{-\lambda h_1} \\ p_{12} &= \Pr(w < |Z| \le L \,|\, |Z| \le L) \times e^{-\lambda h_2} = (\Phi(w) - 0.5)/(\Phi(L) - \Phi(w)) \times e^{-\lambda h_2} \\ p_{13} &= \Pr(|Z| \le w \,|\, |Z| \le L) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) = (\Phi(w) - 0.5)/(\Phi(L) - 0.5) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) \end{aligned} \qquad (۴)$$

$$p_{14} = 1 - p_{11} - p_{12} - p_{13}$$

همچنین، احتمال تغییر وضعیت فرایند از حالت ۲ به سایر حالت‌ها طبق رابطه شماره (۵) قابل تعریف است.

$$\begin{aligned} p_{21} &= \Pr(|Z| \le w \,|\, |Z| \le L) \times e^{-\lambda h_1} = (\Phi(w) - 0.5)/(\Phi(L) - 0.5) \times e^{-\lambda h_1} \\ p_{22} &= \Pr(w < |Z| \le k \,|\, |Z| \le L) \times e^{-\lambda h_2} = (\Phi(w) - 0.5)/(\Phi(L) - \Phi(w)) \times e^{-\lambda h_2} \\ p_{23} &= \Pr(|Z| \le w \,|\, |Z| \le L) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) = (\Phi(w) - 0.5)/(\Phi(L) - 0.5) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) \\ p_{24} &= 1 - p_{21} - p_{22} - p_{23} \end{aligned} \tag{۵}$$

در رابطه شماره (۶) ، احتمالات تغییر وضعیت فرایند از حالت ۳ به سایر حالت‌ها داده شده است.

$$\begin{aligned} p_{31} &= p_{32} = 0 \\ p_{33} &= \Pr(|Y| \le w \,|\, Y \sim N(\delta\sqrt{n}, 1)) = \left[\Phi(w - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n})\right] \\ p_{34} &= \Pr(w < |Y| \le L \,|\, Y \sim N(\delta\sqrt{n}, 1)) \\ &= \left[\Phi(L - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-L - \delta\sqrt{n}) - \Phi(w - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-w - \delta\sqrt{n})\right] \\ p_{35} &= 1 - p_{33} - p_{34} \end{aligned} \tag{۶}$$

احتمالات تغییر وضعیت فرایند از حالت ۴ به سایر حالت‌ها مطابق رابطه شماره (۷) است.

$$\begin{aligned} p_{41} &= p_{42} = 0 \\ p_{43} &= \Pr(|Y| \le w \,|\, Y \sim N(\delta\sqrt{n}, 1)) = \left[\Phi(w - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n})\right] \\ p_{44} &= \Pr(w < |Y| \le L \,|\, Y \sim N(\delta\sqrt{n}, 1)) \\ &= \left[\Phi(L - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-L - \delta\sqrt{n}) - \Phi(w - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-w - \delta\sqrt{n})\right] \\ p_{45} &= 1 - p_{43} - p_{44} \end{aligned} \tag{۷}$$

در روابط فوق $\Phi()$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد می‌باشد. با توجه به خواص زنجیر مارکوف، امید ریاضی مدت زمان لازم از شروع فرایند تا رسیدن به حالت جاذب، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$ATC = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{h} \tag{۸}$$

که در آن Q همان ماتریس تغییر وضعیت P است که سطر و ستون مربوط به حالت جاذب حذف شده است. $\mathbf{b}' = (p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14})$ برداراحتمال‌های آغازین است که در آن $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$ و I ماتریس همانی از درجه چهار و $\mathbf{h}' = (h_1,\ h_2,\ h_1,\ h_2)$ بردار فواصل زمانی نمونه‌گیری است. بنا به خواص زنجیر مارکوف، متوسط دفعات نمونه‌گیری برای طرح VSI برابر است با:

$$ANI = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\eta \tag{۹}$$

$\eta' = (n, n, n, n)$ بردار اندازه نمونه‌گیری با توجه به چهار حالت انتقال است. همچنین، برای محاسبه متوسط تعداد هشدارهای اشتباهی (ANF) با توجه به خواص مقدماتی زنجیره مارکوف می‌توان نوشت که:

$$ANF = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} f \tag{۱۰}$$

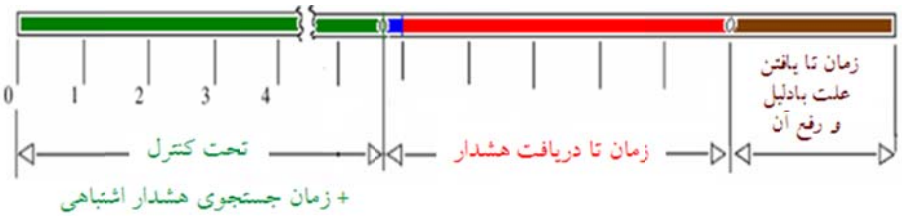
$f = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$ احتمالات هشدار اشتباه در حالات انتقال است.

متوسط زمان لازم از وقوع شیفت تا دریافت یک هشدار از سوی نمودار کنترل ($AATS$)، با فرض توزیع نمایی مدت زمان وقوع تغییرات در میانگین فرایند با میانگین $1/\lambda$ ، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$AATS = ATC - 1/\lambda \tag{۱۱}$$

۳. تابع هزینه پایش فرایند

هزینه انتظاری پایش فرایند در هر ساعت از نسبت هزینه انتظاری در هر چرخه کیفی به زمان انتظاری هر چرخه حاصل می‌شود. هر چرخه کیفی از حالت تحت کنترل (در زمان شروع فرایند) تا زمان شناسایی حالت خارج از کنترل و نهایتاً تعمیر فرایند و بازگشت به حالت کنترل تعریف می‌شود. در شکل شماره (۱) چرخه کیفی در مدل‌های اقتصادی-آماری نمودارهای کنترلی نمایش داده شده است.



شکل شماره ۱ – چرخه کیفی در مدل اقتصادی نمودار کنترل

از آنجا که هر فرایند پس از تعمیر، مجدداً به حالت آغازین خود باز می‌گردد، هر چرخه کیفی در قالب یک فرایند تجدید پاداش مدل بندی می‌گردد. هر سیکل تولید شامل پریودهای زمانی زیر است:

۱. مدت زمانی که فرایند تحت کنترل است.
۲. مدت زمانی که برای جستجوی هشدار اشتباهی صرف می‌شود.
۳. مدت زمانی که طول می‌کشد تا این که نمودار هشدار خارج از کنترل را صادر کند.
۴. مدت زمانی که صرف تعمیر فرایند و رفع عوامل با دلیل می‌گردد.

با فرض توزیع انحرافات با دلیل بصورت توزیع پواسن با پارامتر λ ، زمانی که فرایند تحت کنترل باقی می‌ماند متغیری تصادفی با توزیع نمایی منفی با میانگین $1/\lambda$ خواهد بود. بنابراین متوسط زمان دوره تحت کنترل برابر با $1/\lambda$ می‌باشد.

متوسط هزینه سیستم کیفیت، EC، شامل هزینه‌های نمونه‌گیری، جستجو و تعمیررا دربر می‌گیرد.

۱) هزینه‌های مرتبط با تولید در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل با رابطه زیر حاصل می شود.

$$C_0(1/\lambda)+C_1\times(ATC-1/\lambda) \qquad (۱۲)$$

هزینه تولید هر واحد محصول معیوب وقتی که فرآیند در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل است بترتیب C_0 و C_1 می باشد.

۲) هزینه‌های نمونه‌گیری، با توجه به رابطه حاصله برای متوسط دفعات نمونه‌گیری ANI معادل زیر است.

$$s\times ANI \qquad (۱۳)$$

که s هزینه متوسط نمونه گیری برای هر واحد محصول مورد نظر می‌باشد.

۳) با توجه به خواص مقدماتی زنجیره مارکوف متوسط تعداد هشدارهای اشتباهی (ANF) در بخش قبل محاسبه شده است. چنانچه، هزینه انتظاری مربوط به بررسی یک هشدار اشتباهی f_0 محاسبه شده باشد (این هزینه شامل هزینه جستجو و هزینه توقف خط تولید در صورت وجود است). هزینه های هشدارهای اشتباهی در هر سیکل کیفی مطابق رابطه (۹) بدست می آید.

$$f_0\times ANF \qquad (۱۴)$$

۴) متوسط هزینه جستجو برای یک هشدار با دلیل و تعمیر فرایند (که شامل هزینه توقف فرایند در صورت وجود نیز می باشد) معادل W درنظرگرفته شده است.

تابع هزینه پایش فرایند، به صورت زیر خواهد بود:

$$EC=C_0(1/\lambda)+C_1\times(ATC-1/\lambda)+s\times ANI+f_0\times ANF+W \qquad (۱۵)$$

همچنین پارامترهای وابسته به زمان مانند میانگین زمانی که طول می‌کشد تا فرایند به حالت خارج از کنترل شیفت پیدا کند، زمان لازم برای بررسی هشدار اشتباه نیز باید مشخص شوند.

۱) امید ریاضی مدت زمان لازم از شروع فرایند تا رسیدن به حالت جاذب ATC

۲) متوسط زمان لازم که صرف جستجو برای هشدارهای اشتباهی می‌شود T_0 واحد زمانی و زمانی که فرایند پیوسته است، مقدار آن صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین $T_0\times ANF$ واحد زمانی برای جستجوی هشدار اشتباهی صرف خواهد شد.

۳) T_1 متوسط زمان مورد نیاز برای تشخیص انحراف با دلیل و تعمیر آن پس از دریافت یک هشدار صحیح است.

متوسط زمان هر چرخه کیفی، ET، مطابق رابطه زیر تخمین زده می شود:

$$ET=ATC+T_0\times ANF+T_1 \qquad (۱۶)$$

تابع هزینه پایش فرایند در هرساعت، با توجه به سیاست VP، به فرم زیر خواهد بود:

$$E(L)=\frac{EC}{ET} \qquad (۱۷)$$

برای اجتناب از عملکردهای ضعیف آماری نمودارهای کنترلی که به صورت اقتصادی طراحی می‌شوند، و منجر به ناتوانی در کشف انحرافات با دلیل در فرایند می گردند، استفاده از محدودیتهای آماری همزمان با مدل اقتصادی توصیه می‌شود. در این تحقیق، طراحی بهینه نمودار کنترل $\overline{X}$ با درنظرگرفتن تابع هزینه اقتصادی و هزینه‌های ناملموس خارجی در کنار بهبود مشخصه‌های

آماری بررسی می‌شود. همچنین، برای درنظرگیرفتن هزینه‌های ناملموس خارجی از تابع زیان کیفیت تاگوچی استفاده می شود. در این مدل، $E(L)$ همچنان به عنوان معیار اقتصادی برای ارزیابی بخش قابل اندازه‌گیری هزینه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، تخمین پارامترهای هزینه همانند C_0 و C_1 در تابع هزینه $E(L)$ شامل بخشهای قابل اندازه‌گیری می‌باشد.

میانگین فرایند برای مشخصه کیفی X در حالت تحت کنترل بصورت μ_0 درنظرگرفته می‌شود که تابعی بشکل $f(x)$ و دارای چگالی احتمال توزیع نرمال، $N(\mu_0,\sigma_0^2)$، است. اگر مقدار هدف برای مشخصه کیفی تحت بررسی مقداری معادل با T باشد. زیان کیفیت تنها در حالتی صفر خواهد شد که مشخصه کیفی X با مقدار هدف خود T برابر باشد. زیان کیفی با افزایش میزان انحراف از مقدار هدف افزایش خواهد یافت. چنانچه تابع زیان $L(X)$، حول مقدار هدف متقارن باشد؛ ضریب زیان K بگونه‌ای تخمین زده می‌شود که تابع زیان به صورت زیر باشد:

$$L(X)=K(x-T)^2 \qquad (۱۸)$$

چنانچه، مشخصه کیفی X دارای حد مجاز تلورانس به اندازه Δ باشد، ضریب زیان K متناسب با هزینه دوباره کاری یا اسقاط یک واحد محصول معیوب،A، قابل بیان است:

$$K=\frac{A}{\Delta^2} \qquad (۱۹)$$

با توجه به اینکه میانگین مشخصه کیفی X در حالت تحت کنترل بصورت μ_0 با چگالی احتمال $N(\mu_0,\sigma_0^2)$ است. هزینه مورد انتظار هر محصول در شرایط تحت کنترل بوسیله J_0 نشان داده می‌شود. برای طراحی نمودار کنترل براساس تابع زیان درجه دوم متقارن، J_0 به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}J_0&=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-T)^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-\mu_0+\mu_0-T)^2f(x)dx\\&=K\left[\sigma_0^2+(\mu_0-T)^2\right]\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با توجه به حضور عامل بادلیل، در شرایط تغییر میانگین فرایند، در حالت خارج از کنترل این جابجایی به میزان $\mu_1=\mu_0+\delta\sigma_0$ خواهد بود. هزینه مورد انتظار هر محصول تحت تابع زیان درجه دوم در شرایط خارج از کنترل فرایند بصورت رابطه شماره (۱۶) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}J_1&=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-\mu_1+\mu_1-T)^2f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-\mu_0-\delta\sigma_0+\mu_0+\delta\sigma_0-T)^2f(x)dx\\&=K\left[\sigma_0^2+(\mu_0-T)^2+\delta^2\sigma_0^2-2\delta\sigma_0(\mu_0-T)\right]\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

استنتاج رابطه فوق براساس تغییر توزیع مشخصه کیفی X در حالت خارج از کنترل به توزیع نرمال $N(\mu_1,\sigma_0^2)$ حاصل شده است. اگر $\Pr$ واحد محصول در هر ساعت تولید شود، C_0 و C_1، در تابع هزینه رابطه شماره (۱۲)، بشکل $C_0=J_0\Pr$ و $C_1=J_1\Pr$ قابل محاسبه هستند. جابجایی در میانگین فرایند ($\delta\sigma_0$) از طریق مولفه C_1 در تابع هزینه درنظرگرفته می‌شود.

پس از بازنویسی تابع هزینه مدل اقتصادی-آماری در رابطه شماره (۱۲)، $E(L)$، که شامل بخشهای قابل اندازه‌گیری است با تخمین‌های ارائه شده برای پارامترهای هزینه‌ای C_0 و C_1، مدل هزینه جدید به شکل متوسط زیان کل (ATL) معرفی می‌شود. ATL با استفاده از اعمال جریمه بیشتر با بدترشدن کیفیت خروجی فرایند، دربرگیرنده بخشهای غیر قابل اندازه‌گیری از کیفیت خروجی فرایند که در دیدگاه مشتری اثرگذار است، خواهد بود. در زمینه نحوه کارایی مدل در این بخش در قالب نمونه عددی توضیحات بیشتر ارائه خواهد شد.

کاربردهای صنعتی و ترجیحات کاربران ممکن است نیازمند محدودیتهایی روی متغیرهای تصمیم مسئله باشند. بنابراین، در مدل چند هدفه اقتصادی-آماری ارائه شده محدودیت هایی نیز بایستی لحاظ شود. همچنین، برای جلوگیری از هشدارهای اشتباهی که بر روی دیدگاه کاربران در استفاده از نمودارکنترل تاثیر منفی می‌گذارد(Woodall, 1986) و (Saniga, 1989)، محدودیت $ANF\le ANF_M$ را در نظر گرفته اند. این محدودیت حد قابل قبول، ANF_M، را برای متوسط تعداد هشدارهای اشتباهی حفظ خواهد نمود. چنانچه به تعداد K_i محدودیت داشته باشیم، این محدودیتها در قالب توابع $F_i(n,h_1,h_2,k,w)$ نمایش داده می‌شوند. مدل‌سازی طراحی اقتصادی-آماری نمودار کنترل $\overline{X}$ با تابع هزینه $ATL(n,h_1,h_2,k,w)$، بصورت ذیل پیشنهاد می شود:

$$\min_{x\in X}\left\{\begin{matrix}ATL(n,h_1,h_2,k,w):F_i(n,h_1,h_2,k,w)\\ \in K_i\end{matrix}\right\} \qquad (۲۲)$$

در این مدل، پارامترهای بهینه نمودارکنترل بگونه‌ای تعیین می‌شوند تا ATL حداقل گردد. به تعبیری دیگر، مدل طراحی اقتصادی-آماری نمودار کنترل $\overline{X}$ بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}&Min\quad ATL(n,h_1,h_2,k,w)\\&\text{Subject to:}\\&ANF\le ANF_M\\&h_{\min}\le h_1<h_2\le h_{\max}\\&0<w<k\le k_{\max}\\&1\le n\le n_{\max}\quad\text{(integers)}\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

۴. الگوریتم حل مسئله

مسئله بهینه سازی فوق، دارای متغیرهای تصمیم گیری گسسته و پیوسته و فضای پاسخ نامحدب است. از آن رو حل این مدل با استفاده از روش های بهینه سازی کلاسیک مقدور نمی‌باشد. الگوریتم ژنتیک یک روش جستجو فرا ابتکاری است که توسط هلند در سال ۱۹۷۵ معرفی گردید. این الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم های فرا ابتکاری دیگر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. الگوریتم ژنتیک برای بهینه سازی تابع هدف نیازی به تجزیه و تحلیل ریاضی و پیچیده تابع مورد نظر ندارد و در بسیاری از زمینه های بهینه سازی به طور وسیعی استفاده می‌شود. در واقع هدف الگوریتم ژنتیک دست یابی به یک بهینه عمومی و نه محلی، بدون پیچیده کردن فضای جواب است.الگوریتم ژنتیک از یک مجموعه جواب های شدنی کوچک (جمعیت) در یک فرایند موازی شروع به تولید نسل جدید یا جمعیت جدید می نماید. این فرایند تکراری برگرفته از مباحث ژنتیکی تکامل موجودات است و نسل جدید را همانند فرایند بقاء به طور کاملاً تصادفی از نسل حاضر تولید می کند. از جمله ویژگی های الگوریتم ژنتیک می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) در الگوریتم ژنتیک، جمعیتی از نقاط (به جای یک نقطه) به صورت موازی مورد جستجو قرار می گیرند.

۲) در الگوریتم ژنتیک از قواعد انتقال احتمالی (به جای قواعد انتقال قطعی) استفاده می شود.

۳) در الگوریتم ژنتیک نیازی به اطلاع درباره مشتق پذیری تابع هدف نیست و تنها کافی است که برای مسئله مورد نظر یک تابع برازش تعریف شود.

۴) به راحتی می تواند برای مسائل چند هدفه بکار رود.

۵) روش های متعددی برای سرعت دهی به الگوریتم و بهبود کیفیت جواب وجود دارد و به محض افزایش آگاهی از دامنه مسئله می توان با محدود کردن فضای پاسخ ، از این روش ها استفاده نمود.

۶) لیستی از متغیرهای بهینه ارائه می‌دهد و نه فقط یک جواب بهینه.

کیفیت جوابهای ارائه شده توسط الگوریتم ژنتیک، به پارامترهای GA بستگی دارد. از جمله پارامترهای GA اندازه جمعیت (N_{pop}) ، کسر ترکیب (CP) ، تعداد جمعیت نخبه (NE) ، تعداد تکرار الگوریتم (GN) و نرخ جهش می‌باشند. در ادامه الگوریتم ژنتیک و پارامترهای کلیدی که در شروع الگوریتم بایستی تعیین و در خلال الگوریتم بکارگرفته شوند، تشریح می شود.

۱) الگوریتم ژنتیک با تعدادی از جواب های اولیه شدنی بنام جمعیت اولیه شروع به کار می کند. اندازه جمعیت در ابتدا بایستی تعیین شود. هر جمعیت دارای N_{pop} کروموزوم می‌باشد که به طور کاملاً تصادفی از فضای جواب مسئله مورد بررسی تولید می‌شود. هرچه این کمیت مقدار بزرگتری باشد، در هر نسل محدوده ی بزرگتری از فضای پاسخ مورد بررسی قرار می گیرد. در این تحقیق یک کروموزوم مرکب از پنج ژن در نظر گرفته می شود و هر ژن معرف یک متغیر تصمیم است. متغیرهای تصمیم مدل n, h_1, h_2, k, w می باشند. شکل شماره (۳) نمونه‌ای از کروموزوم معرفی شده را نشان می‌دهد.

5	2	1.5	3	1.5
n	h_1	h_2	L	w

شکل شماره (۲) – نمونه‌ای از کروموزوم معرفی شده

۲) مقدار تابع هزینه برای کروموزوم های هر نسل محاسبه می شود. آنگاه بهترین های هر نسل برای عمل جفت گیری انتخاب می شوند و مابقی حذف می گردند. کسر ترکیب یا عملگر تلاقی برای تولید نسل جدید، بدین صورت است که دو والد به عنوان پدر و مادر انتخاب می شوند و حاصل جفت گیری دو فرزند است. نرخ انتخاب، X_{rate} کسری از N_{pop} است. تعداد کروموزوم هایی که در هر نسل نگهداری می شوند برابر است با $X_{keep} = X_{rate} \cdot N_{pop}$. در واقع هر نسل شامل X_{keep} کروموزوم ارشد و $N_{pop} - X_{keep}$ فرزند است که با عمل جفت‌گیری از والدین بدست می آید. والدین در مجموع باید $N_{pop} - X_{keep}$ فرزند را تولید کنند تا نسل جدید تکمیل گردد.

۳) برای آن که الگوریتم ژنتیک سریعاً به یک مقدار بهینه محلی همگرا نشود، عملگر جهش صورت می‌گیرد تا تنوع بررسی و آزادی عمل الگوریتم در بررسی نقاط فضای جواب افزایش یابد. در اینجا عددی تصادفی از توزیع خاصی به مقدار ژن کروموزوم انتخابی اضافه می‌شود. اغلب کاربران الگوریتم ژنتیک عددی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر را انتخاب می‌کنند. در این روش باید برای واریانس توزیع نرمال مقداری انتخاب شود. البته معمولاً کروموزوم هایی برای عمل جهش انتخاب می شوند که جزو بهترین کروموزوم های هر نسل نباشند.

۴) زمانی که از اپراتورهای ژنیتیکی استفاده می شود ممکن است بهترین کروموزوم ها از دست بروند. لذا لازم است که به منظور حفظ بهترین اطلاعات هر نسل، نخبگان هر نسل مستقیماً به نسل بعدی انتقال یابند. در واقع، عملگر نخبگی روشی است برای نگهداری یک کپی از بهترین کروموزوم های هر نسل در نسل جدید. مکانیزم فوق الگوریتم ژنتیک را مجبور می سازد تا همواره تعدادی از بهترین‌ها را در هر نسل نگه دارد. به تجربه ثابت شده است که این مکانیزم عملگر

الگوریتم ژنتیک را بهبود داده و در ضمن زمان همگرایی را کوتاه می نماید.

۵) بعد از آنکه عملکرد تلاقی و جهش صورت پذیرفت، میزان تابع مطلوبیت برای هر کروموزوم محاسبه می شود. سپس کروموزوم ها رتبه بندی می شوند و مجدداً بهترین ها انتخاب می شوند. معیار توقف که در اینجا تعداد تکرارهای الگوریتم در نظر است، بررسی می‌شود و مجدداً این حلقه تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

در این تحقیق و در الگوریتم توسعه داده شده، نرخ جهش بصورت ترکیب خطی از سایر پارامترها در نظرگرفته شده است. انتخاب ترکیب بهینه پارامترهای GA در اغلب موارد از طریق سعی و خطا انجام می‌شود، که بدلیل تعدد حالات ممکن دشوار است. برای تعیین مقادیر بهینه چهار پارامتر GA از آرایه متعامد تاگوچی L9 بهره گرفته شده است. استفاده از این روش در تعیین بهینه پارامترهای GA توسط محققین بسیاری در حوزه طراحی اقتصادی-آماری نمودارهای کنترل توصیه شده است (Chou et al., 2006, Yang and Chang, 2008, Chen and Yeh, 2009, Chen, 2009). آرایه متعامد L9، نه ترکیب از پارامترهای کنترلی را در سه سطح مختلف برای هر کدام درنظرمی گیرد. در **Error! Reference source not found.** سطوح هر کدام از پارامترها ارائه شده است.

جدول شماره (۱) – سطوح هر یک از پارامترها در طرح متعامد

Parameter	Range	Level 1	Level 2	Level 3
Population size (N_{pop})	100 – 900	100	500	900
Crossover Fraction (CF)	0.1 – 0.9	0.1	0.50	0.90
Number of Elites (NE)	4 – 10	4	6	10
Number of Generations (NG)	50 – 150	50	100	150

این الگوریتم برای هر یک از سطوح سه بار (Y1 ، Y2 و Y3) تکرار شده است. سپس نتایج حاصل از ۲۷ بار اجرای الگوریتم اخذ شده است. مقادیر پاسخ برای هر یک از سطوح پارامترها در هر تکرار در **Error! Reference source not found.** نمایش داده شده است. از آنجا که تابع هدف مسئله از نوع حداقل‌سازی می‌باشد، نرخ سیگنال نسبت به نویز(SN) برای ارزیابی نتایج آزمایشات انجام شده از طریق رابطه زیر محاسبه شده است. شاخص SN هر چه بزرگتر باشد بهتر است (Taguchi et al., 2005).

$$SN = -10\log\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} Y_i^{\,2}\right) \qquad (۲۴)$$

جدول شماره (۲) – طرح متعامد L9 برای پارامترهای GA

Runs	N_{pop}	CF	NE	NG	Y1	Y2	Y3	*SN*
1	100	0.10	2	50	121.848	123.106	123.106	-41.7760
2	100	0.50	6	100	121.848	123.106	121.848	-41.7463
3	100	0.90	10	150	123.106	123.106	123.106	-41.8056
4	500	0.10	6	150	121.848	121.848	121.848	-41.7164
5	500	0.50	10	50	121.848	121.848	121.848	-41.7164
6	500	0.90	2	100	121.848	121.848	121.848	-41.7164
7	900	0.10	10	100	121.848	121.848	121.848	-41.7164
8	900	0.50	2	150	121.848	121.848	121.848	-41.7164
9	900	0.90	6	50	121.848	121.848	121.848	-41.7164

در رابطه شماره (۲۴) پارامتر r تعداد تکرار در هر سطح است. مقدار شاخص SN برای هر سطح، از روی مقادیر متوسط

پاسخ‌ها در سه تکرار (Y1 ، Y2 و Y3) محاسبه شده و در **Error! Reference source not found.**) ارائه گردیده است. مجموع نرخ SN برای هر یک از سه سطح پارامترهای GA در جدول شماره (۳) داده شده است. بر اساس بیشترین مقدار شاخص SN در هر سطح، ترکیب بهینه از سطوح چهار پارامتر GA بترتیب N_{pop} =500 ، CF=0. 5 ، NE=6 و NG=100 پیشنهاد می‌شود.

جدول شماره (۳) – مجموع نرخ SN برای هر یک از سه سطح پارامترهای GA

	N_{pop}	CF	NE	NG
Level 1	-125.3279	-125.2088	-125.2088	-125.2088
Level 2	-125.1491*	-125.1790*	-125.1790*	-125.1790*
Level 3	-125.1491*	-125.2383	-125.2383	-125.2383

* بیشترین مقدار نرخ SN برای هر پارامتر

برای اطمینان از کفایت سطوح اولیه تعیین شده برای پارامترها، اثر سایر ترکیبات بر روی جوابهای GA نیز بررسی گردید. برای نمونه $CF < 0.1$ و $N_{pop} > 150$ نیز مورد آزمایش قرار گرفت. ترکیب بهینه حاصله از آرایه‌های متعامد L9 بهترین نتیجه را بین آزمایشات بررسی شده حاصل نموده است.

۵. تحلیل عددی

در ادامه تحلیل عددی مدل اقتصادی نمودار کنترل $\overline{X}$ با فواصل نمونه گیری متغیر توسعه داده شده بصورت مسئله کمینه‌سازی با تابع هزینه $ATI(n,h_1,h_2,k,w)$ ارائه شده است. محدوده منطقی برای اندازه نمونه گیری [۳۰ , ۱]، بازه نمونه‌گیری [۸ , ۰/۱] و ضریب حدود کنترل [۵ , ۱] تعیین شده است. پارامترهای هزینه و فرایند بشرح ذیل می‌باشند: هزینه نمونه‌گیری s = \$5 است؛ هزینه یافتن یک انحراف با دلیل W = \$1000 است؛ هزینه هر بار هشدار اشتباهی f_0= \$1500 است؛ متوسط زمان جستجو برای هشدار اشتباهی T_0= 5 ساعت است؛ متوسط زمان جستجو برای شناسایی انحراف با دلیل و اصلاح فرایند $2T_1$ = ساعت است؛ و میزان انحراف در میانگین فرایند هنگامی که فرایند به حالت خارج از کنترل می‌رود، به اندازه ۱.۵ انحراف معیار δ 1.5 = است.

همچنین، ضریب تابع زیان درجه دوم بصورت $K = 1$ و میانگین واقعی تولیدات فرایند با مقدار مشخصه فنی در طراحی انطباق داشته $\mu_0 = T$ و مقدار واریانس تولیدات فرایند $\sigma_0^2 = 1$ است. متوسط زمان دوره تحت کنترل برابر با ۱۰۰ می‌باشد. اگر نرخ تولید $\Pr$ 100 = در هر ساعت باشد، هزینه تولید هر واحد محصول معیوب در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل فرایند بترتیب $C_0 = 100J_0$ و $C_1 = 100J_1$ خواهد بود. بردار جواب طرح $(n,h_1,h_2,k_{\overline{X}},w_{\overline{X}})$ است که جواب‌های مختلف براساس تابع هدف هزینه‌های داخلی و خارجی کیفیت ارزیابی می‌شوند. علاوه بر آن محدودیت‌های $0.1 \le h_1 < h_2 \le 8,\ 0 < w_{\overline{X}} < k_{\overline{X}} \le 5,\ 1 \le n \le 30$ نیز به مسئله افزوده شده است.از دیدگاه اقتصادی، حداقل هزینه‌ها در بردار جواب $(n,h_1,h_2,k_{\overline{X}},w_{\overline{X}}) =$ (4 , 4.53, 0.1, 3.08, 1.38) حاصل می‌شود که هزینه معادل 120.78 دلار در هر ساعت برای پایش این فرایند خواهد داشت. در این طرح تعداد متوسط هشدارهای اشتباهی ANF= 0.054 و متوسط زمان اعلام هشدار اصلاح شده $AATS_{VSI}$ = 2.88 ساعت است.

جواب حداقل هزینه در طرح نمونه گیری ثابت $(n,h,,k_{\overline{X}}) =$ (6 , 5.07, 2.69) با هزینه معادل 123.25 دلار در هر ساعت می‌باشد. در این طرح تعداد متوسط هشدارهای اشتباهی 0.139 ANF= و متوسط زمان اعلام هشدار اصلاح شده $AATS$ = 3.53 ساعت است.

کاهش هزینه ناشی از بکارگیری طرح VSI معادل $\frac{120.78-123.25}{123.25} = 2.01\%$ است. بعلاوه متوسط تعداد هشدارهای اشتباهی از $ANF = 0.139$ به صورت چشمگیری به تعداد $ANF_{VSI} = 0.054$ کاهش داده شده است (61.15%). متوسط زمان اعلام هشدار اصلاح شده از 3.53 = $AATS$ ساعت به $AATS_{VSI}$ = 2.88 ساعت معادل 18.43% بهبود داده شده است. مقایسه جواب بهینه طرح VSI با جواب حداقل هزینه در طرح نمونه گیری ثابت نشان دهنده برتری طرح پیشنهادی VSI در هر دو بعد هزینه های پایش فرایند و مشخصه های آماری طرح ها است.

طرح پیشنهادی، ضمن شناسایی سریعتر انحراف بادلیل منجر به تولید طبق مشخصه‌های فنی شده و خروجی محصولات فرایند با کیفیت بالاتری خواهد بود. بنابراین، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که مدل بهینه سازی اقتصادی نمودار کنترلی VSI رویکرد بهتری

برای مهندسین کیفیت برای بهبود فرایند ارائه می‌نماید.

۶. تحلیل حساسیت

بررسی اثر تغییرات در مقدار برآورد شده پارامترهای مدل اقتصادی به دفعات در تحقیقات پیشین توصیه شده است. در این بخش، ابتدا اثر اندازه شیفت در میانگین فرایند $\delta \in \{0.5,1.0,1.5,2.0,2.5,3.0\}$ ارزیابی خواهد شد.

اثر اندازه شیفت در میانگین فرایند بر جوابهای بهینه طرح VSI در جدول شماره ۴) ارائه شده است. در این جدول مشاهده می شود که برای اندازه شیفت های کوچک در میانگین فرایند هزینه متناظر در مقایسه با اندازه شیفت های بزرگ کمتر است، ولی مدت زمان تا هشدار اصلاح شده $AATS$ برای شناسایی شیفت های کوچک بسیار بیشتر است.

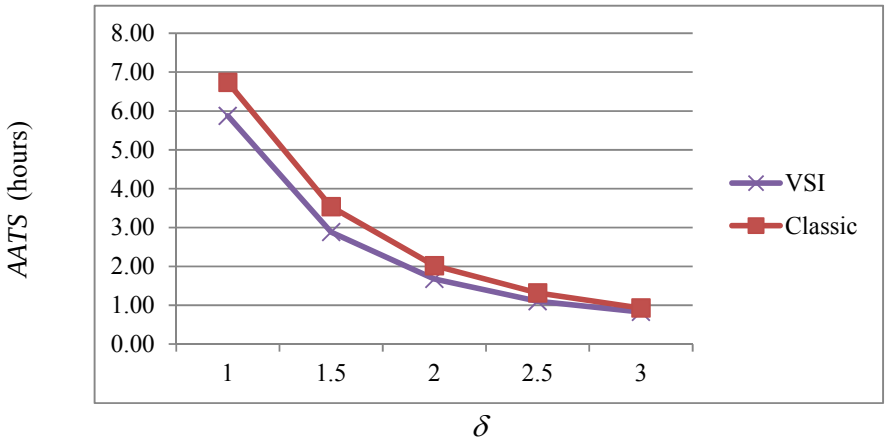
جدول شماره ۴ – اثر اندازه شیفت در میانگین فرایند بر جواب بهینه طرح VSI

δ	n	h_1	h_2	$k_{\overline{X}}$	w	ANF	ET	$AATS$	$Loss$
0.5	4	8.00	0.10	2.19	1.75	0.361	159.50	56.69	119.46
1.0	7	8.00	0.10	2.79	1.34	0.078	107.27	5.87	120.14
1.5	4	4.53	0.10	3.08	1.38	0.054	104.15	2.88	120.78
2.0	3	2.86	0.10	3.32	1.62	0.035	102.85	1.67	121.46
2.5	2	1.86	0.10	3.39	1.65	0.040	102.30	1.10	121.85
3.0	2	1.52	0.10	3.61	2.05	0.021	101.93	0.83	123.09

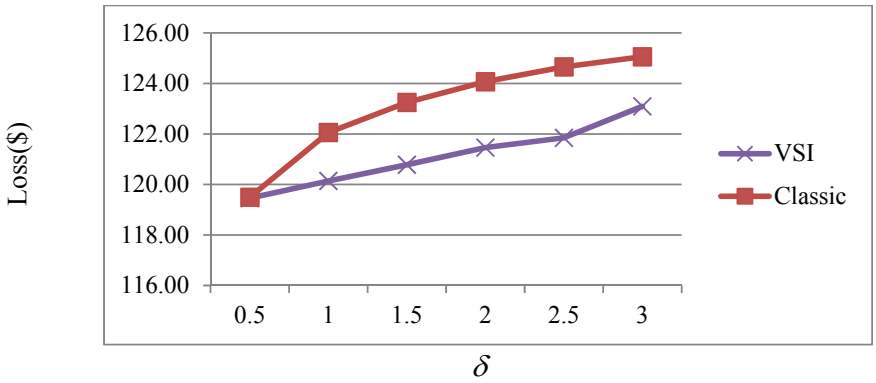
همچنین، برای ارزیابی جوابهای بهینه طرح VSI، جوابهای بهینه طرح کلاسیک در جدول شماره ۵) محاسبه شده است. در شکل شماره ۳)، $AATS$ طرح VSI با طرح کلاسیک نمونه‌گیری ثابت مقایسه شده است. در شکل شماره ۴) هزینه طرح VSI در مقایسه با طرح کلاسیک نمونه‌گیری ثابت برای اندازه شیفت‌های مختلف در میانگین فرایند ترسیم شده است. مقایسه جدول شماره ۴) و جدول شماره ۵) نشان می‌دهد که جواب بهینه طرح VSI همواره در هر دو بعد هزینه‌ای و معیارهای آماری بمراتب بهتر از طرح نمونه گیری ثابت است.

جدول شماره ۵ – اثر اندازه شیفت در میانگین فرایند بر جواب بهینه طرح کلاسیک نمونه گیری ثابت

δ	n	h	$k_{\overline{X}}$	ANF	ET	$AATS$	$Loss$
0.5	4	8.00	2.15	0.375	162.88	60.00	119.50
1.0	10	8.00	2.49	0.153	108.50	6.74	122.06
1.5	6	5.07	2.69	0.139	105.23	3.53	123.25
2.0	4	3.06	2.90	0.121	103.62	2.02	124.07
2.5	3	2.13	3.07	0.099	102.81	1.32	124.66
3.0	2	1.41	3.14	0.121	102.53	0.93	125.06



شکل شماره ۳ – مقایسه *AATS* طرح VSI با طرح کلاسیک نمونه گیری ثابت



شکل شماره ۴ – مقایسه هزینه طرح VSI با طرح کلاسیک نمونه گیری ثابت

اثرات انحراف از مقدار اسمی برآورد شده در پارامتر هزینه متوسط نمونه گیری برای هر محصول $s \in \{1,5\}$ در نظر می‌باشد. هزینه انتظاری مربوط به بررسی یک زنگ خطر اشتباهی $f_0 \in \{600,1500\}$ ، متوسط هزینه جستجو برای یک هشدار با دلیل و تعمیر فرایند معادل $W \in \{150,1000\}$ درنظرگرفته شده است. اندازه تغییرات در میانگین فرایند در مجموعه $\delta \in \{0.5,1.5,2.5\}$ بررسی شده است. نتایج تحلیل حساسیت پارامترهای مدل اقتصادی نمودار کنترلی VSI – $\overline{X}$ در جدول شماره ۶) ارائه شده است.

جدول شماره ۶– تحلیل حساسیت طرح VSI

No.	*s*	f_0	*W*	δ	$k_{\overline{X}}$	*w*	h_1	h_2	*n*	*ANF*	*ET*	*AATS*	*Loss*
1	1	600	150	0.5	1.84	1.23	8.00	0.10	12	9.46	0.952	115.22	105.05
2				1.5	2.82	1.42	1.95	0.10	4	1.23	0.283	103.64	105.79
3				2.5	3.08	1.68	0.82	0.10	2	0.49	0.273	102.86	106.31
4			1000	0.5	1.32	1.11	8.00	5.32	7	11.30	2.336	123.98	112.24
5				1.5	2.48	1.25	1.72	0.10	3	1.19	0.933	106.86	113.87
6				2.5	2.86	1.70	0.82	0.10	2	0.47	0.545	104.20	114.54
7		1500	150	0.5	2.84	1.46	8.00	0.10	22	9.03	0.064	110.35	106.53
8				1.5	3.59	1.71	2.39	0.10	6	1.39	0.015	102.46	106.44
9				2.5	3.83	2.07	1.00	0.10	3	0.56	0.013	101.63	107.15
10			1000	0.5	2.81	1.50	8.00	0.10	19	11.76	0.069	113.11	114.14
11				1.5	3.50	1.51	2.26	0.10	5	1.41	0.024	102.53	114.66
12				2.5	3.82	2.08	1.01	0.10	3	0.56	0.014	101.63	115.51
13	5	600	150	0.5	0.89	0.89	8.00	8.00	1	14.67	4.473	138.04	106.78
14				1.5	1.96	1.14	3.01	0.10	2	2.41	2.095	113.89	110.85
15				2.5	2.35	1.21	1.30	0.10	1	0.93	1.784	110.85	111.67
16			1000	0.5	0.80	0.80	8.00	8.00	1	12.80	5.072	139.16	112.92
17				1.5	0.82	0.53	2.58	2.30	1	2.03	16.272	184.39	117.29
18				2.5	1.32	0.94	1.34	1.01	1	0.81	14.473	174.17	118.64
19		1500	150	0.5	2.24	1.63	8.00	0.10	7	31.58	0.331	134.24	113.59
20				1.5	3.09	1.38	4.45	0.10	4	2.83	0.053	104.10	112.62
21				2.5	3.40	1.65	1.85	0.10	2	1.10	0.039	102.29	113.54

22	1000	0.5	2.19	1.75	8.00	0.10	4	56.69	0.361	159.50	119.46
23		1.5	3.08	1.38	4.53	0.10	4	2.88	0.054	104.15	120.78
24		2.5	3.39	1.65	1.86	0.10	2	1.10	0.040	102.30	121.85

۷. نتیجه گیری

در این تحقیق، نمودار کنترل انطباقی برای پایش میانگین فرایند با درنظرگرفتن همزمان هزینه‌های پایش فرایند و تابع زیان کیفیت تاگوچی توسعه داده شده است. نتایج حاصل از این مدل نشان داده است که بهبود عملکرد نمودارهای کنترل برای پایش میانگین مشخصه کیفی در شناسایی انحرافات بادلیل همراه با کاهش در هزینه‌های پایش فرایند قابل حصول است.

تحلیل حساسیت جوابهای بهینه مدل و روش حل پیشنهاد شده، نحوه ارتباط میان هزینه انتظاری سیستم کیفی و معیارهای آماری متناظر با اعلام هشدار خارج از کنترل را بیان می‌کند. علاوه برآن، رابطه بین هزینه‌های پایش فرایند و انحرافات از مقدار هدف طراحی شده در مشخصه‌های فنی نیز با درنظرگرفتن تابع زیان کیفیت تاگوچی در مدل لحاظ شده است. بطور کلی، ارزیابی جوابهای بهینه نشان می‌دهد که تغییرات در اندازه شیفت در میانگین مشخصه کیفی بر متوسط هزینه انتظاری و متوسط زمان هشدار خارج از کنترل تاثیر دارد. مدل ارائه شده اقتصادی نمودارهای کنترل طرحی ارائه می‌نماید که نسبت به رویکردهای پیشین، هشدار تغییرات در فرایند را بطور قابل ملاحظه‌ای بهبود و انعطاف پذیری بیشتری در تنظیم متغیرهای کنترلی فرایند به کاربران می‌دهد. کاربران می‌توانند طرح‌هایی را انتخاب نمایند که علاوه برآن که مقرون به صرفه و کارا هستند، پیاده‌سازی آنها نیز در عمل برای آنها مقدور باشد.

مراجع

[1] AL-GHAZI, A., K. AL-SHAREEF & DUFFUAA, S. O. Integration of Taguchi's loss function in the economic design of x control charts with increasing failure rate and early replacement. *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management* (2007).

[2] BAI, D. S. & LEE, K. T. An economic design of variable sampling interval X control charts. *International Journal of Production Economics,* 54**,** (1998), pp. 57-64.

[3] BAI, D. S. & LEE, K. T. Variable sampling interval X control charts with an improved switching rule. *International Journal of Production Economics,* 76**,** (2002), pp.189-199.

[4] CHEN, F. L. & YEH, C. H. Economic statistical design of non-uniform sampling scheme X bar control charts under non-normality and Gamma shock using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications,* 36**,** (2009), pp. 9488-9497.

[5] CHEN, F. L. & YEH, C. H. Economic statistical design for x-bar control charts under non-normal distributed data with Weibull in-control time. *Journal of the Operational Research Society,* 62**,** (2011), pp. 750-759.

[6] CHEN, Y. K. Economic design of X̄ control charts for non-normal data using variable sampling policy. *International Journal of Production Economics,* 92**,** (2004), pp. 61-74.

[7] CHEN, Y. K. & CHANG, H.-H. Economic design of variable parameters X̄ control charts for processes with fuzzy mean shifts. *The journal of the Operational Research Society,* 59**,** (2008), pp.1128-1135.

[8] CHEN, Y. K. & CHIOU, K. C. Optimal design of VSI X control charts for monitoring correlated samples. *Quality and Reliability Engineering International,* 21**,** (2005), pp. 757-768.

[9] CHENG, L. & GUO, Z. The economically designed SVSSI Xbar control chart. *2011 International Conference on Computer and Management, CAMAN (2011).* Wuhan.

[10] CHOU, C. Y., CHEN, C.-H. & CHEN, C.-H. Economic design of variable sampling intervals T2 control charts using genetic algorithms. *Expert Systems*

to Maintain Current Control of a Process. *Management Science,* 19**,** (1972), pp. 76-89.

[21] NIAKI, S. T. A., GAZANEH, F. M. & KARIMIFAR, J. Economic design of x-bar control chart with variable sample size and sampling interval under non-normality assumption: A genetic algorithm. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research,* 5 (2012).

[22] REYNOLDS, M. R., AMIN, R. W., ARNOLD, J. C. & NACHLAS, J. A. X-bar Charts with Variable Sampling Intervals. *Techno metrics,* 30**,** (1988), pp. 181-192.

[23] REYNOLDS, M. R. & ARNOLD, J. C. Optimal one-sided shewhart control charts with variable sampling intervals. *Sequential Analysis,* 8**,** (1989), pp. 51 - 77.

[24] RUNGER, G. C. & PIGNATIELLO, J. J. Adaptive sampling for process controls. *Journal of Quality Technology,* 23**,** (1991), pp. 135-155.

[25] SAFAEI, A., KAZEMZADEH, R. & NIAKI, S. Multi-objective economic statistical design of X-bar control chart considering Taguchi loss function. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,* 59**,** (2012), pp. 1091-1101.

[26] SANIGA, E. M. Economic Statistical Control-Chart Designs with an Application to $\bar{X}$ and R Charts. *techno metrics,* 31**,** (1989), pp.313-320.

[27] SEREL, D. A. & MOSKOWITZ, H. Joint economic design of EWMA control charts for mean and variance. *European Journal of Operational Research,* 184**,** (2008), pp. 157-168.

[28] TAGARAS, G. A survey of recent developments in the design of adaptive control charts. *Journal of Quality Technology,* 30**,** (1998), pp. 212-231.

[29] TAGUCHI, G., CHOWDHURY, S. & WU, Y. *Taguchi's quality engineering with Applications,* 30**,** (2006), pp. 233-242.

[11] CHOU, C. Y., LIU, H.-R., CHEN, C.-H. & HUANGE, X. Economic-statistical design of multivariate control charts using quality loss function .*International journal of advanced manufacturing technology,* 20**,** (2002), pp. 916-924.

[12] CINLAR, E. *Introduction to Stochastic Processes,* Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall (1975).

[13] DEMING, W. E. *Out of the Crisis,* Cambridge, MIT Press (1982).

[14] DUNCAN, A. J. The Economic Design of X-bar Charts used to Maintain Current Control of a Process. *Journal of the American Statistical Association,* 51, (1956), pp. 228-242.

[15] KOO, T. & LIN, L. Economic design of X-bar chart when Taguchi's loss function is considered. *Proceedings of Asian Quality Control Symposium.* South Korea (1992).

[16] LEE, P. H., TORNG, C. C. & LIAO, L. F. An economic design of combined double sampling and variable sampling interval $\bar{X}$ control chart. *International Journal of Production Economics,* 138**,** (2012), pp.102-106.

[17] LIN, H. H ,.CHOU, C. Y. & LAI, W. T. Economic design of variable sampling intervals $\bar{X}$ charts with A&L switching rule using genetic algorithms. *Expert Systems with Applications,* 36**,** (2009), pp. 3048-3055.

[18] LIN, Y. C. & CHOU, C. Y. The variable sampling rate $\bar{X}$ control charts for monitoring autocorrelated processes. *Quality and Reliability Engineering International,* 24**,** (2008), pp. 855-870.

[19] LORENZEN, T. J. & VANCE, L. C. The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach. *Technometrics,* 28**,** (1986), pp. 3-10.

[20] MONTGOMERY, D .C. & KLATT, P. J. Economic Design of T2 Control Charts

handbook, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc (2005).

[30] TAGUCHI, G., ELSAYED, E. & HSIANG, T. *Quality Engineering in Production Systems,* New York, NY., McGraw-Hill (1989).

[31] WOODALL, W. H. Weaknesses of the Economic Design of Control Charts. *techno metrics,* 28**,** (1986), pp. 408-410.

[32] YANG, S.-F. Economic statistical design of S control charts using Taguchi loss function. *International Journal of Quality & Reliability Management,* 15**,** (1998), pp. 259-272.

[33] YANG, S.-F. & CHEN, W.-Y. Controlling over-adjusted process means and variances using VSI cause selecting control charts. *Expert Systems with Applications,* 36**,** (2009), pp. 7170-7182.

[34] YU, F. J. & CHEN, Y. S. An economic design for a variable-sampling-interval x control chart for a continuous-flow process .*International Journal of Advanced Manufacturing Technology,* 25**,** (2005), pp. 370-376.

[35] YU, F. J., RAHIM, M. A. & CHIN, H. Economic design of VSI $\bar{X}$ control charts. *International Journal of Production Research,* 45**,** (2007), pp. 5639-5648.