International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2012)

November 2012, Volume 23, Number 3
pp. 293-302

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

Optimization of Total Cost of Production and Time in Three-Machine Robotic Cell

I. Nakhai Kamalabadi*, H. Sadeghi & R. Maihami

Isa Nakhai Kamalabadi, *Associate Professor, Department of Industrial Engineering, University of Tarbiat Modares, Tehran, Iran.*
Hamdollah Sadeghi, *M.Sc, Department of Industrial Engineering, University of Tarbiat Modares, Tehran, Iran.*
Reza Maihami, *M.Sc, Department of Industrial Engineering, University of Tarbiat Modares, Tehran, Iran.*

Keywords

scheduling, robotic cell, optimization of manufacturing cost, CNC machine

ABSTRACT

In this research, robotic cell scheduling problem with three CNC machines and with an operation on each machine with the purpose of optimizing manufacturing cost and time in S_1 cycle has been investigated. To obtain the optimal total cost of production has been used the optimal processing time on machine operation. In this research, robotic cell scheduling is studied in three different situations. In the first situation the optimal processing time of operation in each machine, are on the lower bound. In the second situation the optimal processing time of operation in each machine, are on the upper bound. In The third situation the Optimal processing time of operation in each machine, are between upper bound and lower bound.The next step in this research is proposing solving approaches for the problems mentioned above.the Lagrange method is used, To solve this problem. The most important result of this research is modeling and solving scheduling problem for three-machine robotic cell in three different situations and finding optimized answers for the cost and time. It should be mentioned that in the literature, robotic cell scheduling problem for optimization of manufacturing cost and time is only solved and modeled for two-machine situation.

* <u>Corresponding author</u>. **Isa Nakhai Kamalabadi**
Email: *nakhai@modares.ac.ir*

نشـــریه بین المللـــی مهنـــدسی صنـــایع و مدیـــریت تولیــد

شمـــاره ۳، جلـــد ۲۳، آذر ۱۳۹۱
صفحـــــه ۳۰۲-۲۹۴

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران
IJIE

ISSN: 2008-4870

بهینه سازی هزینه کل تولید و زمان در سلول رباتیک سه ماشین

عیسی نخعی کمال آبادی*، حمداله صادقی و رضا میهمی

کلمات کلیدی

زمانبندی, سلول رباتیک،
بهینه سازی هزینه تولید،
ماشین CNC

چکیده:

در این تحقیق، مسأله زمانبندی سلول رباتیک با سه ماشین CNC و با فرض یک عملیات بر روی هر ماشین با هدف بهینه کردن هزینه کل تولید و زمان، در چرخه S_1 بررسی شده است. برای به دست آوردن بهینه هزینه کل تولید از زمان بهینه پردازش عملیات بر روی ماشین‌ها استفاده شده است. این مساله در سه حالت بررسی گردیده است. در حالت اول زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها در کران پایین آنها می‌باشد. در حالت دوم زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها در کران بالای آنها می باشد. در حالت سوم زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها بین کران بالا و کران پایین آنها می‌باشد. قدم بعدی در این تحقیق ارائه رویکرد حل، برای حالت‌هایی است که در بالا ذکر شد.. برای حل این مساله از روش لاگرانژ استفاده شده است. مهمترین حاصل این تحقیق، مدل سازی و حل مساله زمانبندی برای سلول رباتیک سه ماشینه در سه حالت مختلف و یافتن جوابهای بهینه هزینه کل تولید و زمان می‌باشد. لازم به ذکر است که در ادبیات موضوع، مساله زمانبندی سلول رباتیک جهت بهینه کردن هزینه تولید و مقدار زمان تنها برای حالت دو ماشینه مدل‌سازی و حل شده است.

۱. مقدمه

سلول رباتیک[2]، یک سلول تولیدی است که شامل تعدادی ماشین CNC[3] و یک یا چند ربات جابجایی مواد می‌باشد. هدف عمده استفاده از سلول‌های رباتیک، کاهش هزینه کل تولید[4]، افزایش بهره وری یا نرخ خروجی، ایجاد یک سیستم تولیدی با انعطاف پذیری[5] بیشتر و جایگزینی ربات به جای کارگر در شرایط کاری خطرناک و مضر است. امروزه واحدهای تولید صنعتی که از سیستم تولید سلولی رباتیک استفاده می‌کنند، اگر بخواهند محصولاتی را تولید کنند که در بازارهای جهانی با محصولات مشابه قابل رقابت باشد، باید نسبت به فعالیت‌هایی که در ساخت محصولات نقش دارند و همچنین به هزینه انجام این گونه فعالیتها، به موقع آگاه شوند، این آگاهی از طریق شناسایی فعالیت ها روی هر ماشین و تخصیص بهینه فعالیت‌ها و برآورد کردن هزینه‌های هرفعالیت به دست می‌آید. در این مقاله مسأله زمانبندی[6] سلول رباتیک با سه ماشین CNC و با فرض انجام یک عملیات بر روی هر ماشین، با هدف بهینه کردن همزمان هزینه کل تولید و مقدار زمان در چرخه S_1 بررسی می‌شود. چرخه S_1، چرخه‌ای است که در آن بازوی مکانیکی از یک حالت اولیه سیستم حرکت خود را شروع می‌کند و در یک چرخه هر یک از فعالیت‌ها را دقیقا یک بار انجام می‌دهد و در نهایت به حالت اولیه سیستم بر می‌گردد. در سلول رباتیک با سه ماشین CNC و در چرخه S_1، ابتدا ربات ماشین اول را بارگذاری می-

تاریخ وصول: ۸۹/۸/۸
تاریخ تصویب: ۹۰/۳/۲

***نویسنده مسئول مقاله:** **دکتر عیسی نخعی کمال آبادی،** دانشیار بخش مهندسی صنایع،دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس nakhai@modares.ac.ir
حمداله صادقی،کارشناسی ارشد مهندسی صنایع ، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس sadegi89@gmail.com
رضا میهمی، کارشناسی ارشد مهندسی صنایع ، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس maihami_reza@yahoo.com

[2] *Robotioc Cell*
[3] *Computerized Numerical Control*
[4] *Cost of production*
[5] *Flexible*
[6] *Scheduling*

کند و پس از اتمام پردازش عملیات قطعه در ماشین اول، ربات قطعه را از ماشین اول به ماشین دوم انتقال داده سپس با اتمام پردازش عملیات قطعه بر روی ماشین دوم، ربات قطعه را به ماشین سوم انتقال می‌دهد، و در نهایت پس از اتمام پردازش عملیات قطعه بر روی ماشین سوم، ربات ماشین سوم را تخلیه می‌کند. در اکثر مسائل زمانبندی سلول‌های رباتیک، تابع هدف یک معیار در نظر گرفته شده است. روشهایی که عمدتاً روی بهینه کردن یک معیار متمرکز می‌شوند، ممکن است برای بهینگی معیارهای دیگر ضعیف عمل کنند. چرا که بیشتر معیارها با هم در تضاد هستند. ایجاد تعادل بین لحاظ کردن چند معیار مختلف، بینش مفیدی را در اختیار تصمیم گیرنده قرار می‌دهد.

برای مثال جوابی که زمان سیکل را حداقل کند، ممکن است بر حسب هزینه، ضعیف عمل کند. بنابراین در حوزه مسائل واقعی زمان بندی، بهتر است که مسائل با در نظر گرفتن بیش از یک معیار مد نظر قرار گیرند و همچنین در اغلب تحقیقات انجام یافته در زمینه زمانبندی سلول رباتیک هدف بهینه کردن زمان سیکل در سلول رباتیک بود که در این صورت بهینه کردن زمان منجر به بهینه کردن هزینه کل تولید در سلول نمی‌شد و در بیشتر موارد کاهش زمان باعث افزایش هزینه می‌شد، ولی در این تحقیق به طور هم زمان، هزینه کل تولید و زمان در سلول رباتیک بهینه می گردد.

روشهایی که عمدتاً روی بهینه کردن تک معیاره متمرکز می‌شوند، ممکن است برای بهینگی معیارهای دیگر ضعیف عمل کنند. چرا که بیشتر معیارها با هم در تضاد هستند. ایجاد تعادل بین لحاظ کردن چند معیار مختلف، بینش مفیدی را در اختیار تصمیم گیرنده قرار می‌دهد. برای مثال جوابی که زمان را حداقل کند، ممکن است بر حسب هزینه، ضعیف عمل کند. بنابراین در حوزه مسائل واقعی زمان بندی، بهتر است که مسائل با در نظر گرفتن بیش از یک معیار مد نظر قرار گیرند. مرور مدلهای زمانبندی دو و چند معیاره در مقاله هوگون [۶] دیده می‌شود.

در مساله فرض‌های مختلفی مانند یکسان بودن ماشین‌ها و یکسان بودن قطعات تولیدی، در نظر گرفته شده است. ماشین‌های مورد استفاده در این سلول از نوع CNC می‌باشند و قابلیت انجام عملیات مختلف و متنوعی را دارند و هر کدام از ماشین‌ها نیز متناسب با ویژگیهای آن از جمله قیمت، عمردستگاه، قدرت، سرعت وغیره، روی هزینه تولید در سلول تولیدی تاثیر گذار خواهند بود. ماشین‌ها در چرخه تولید می‌توانند بیکار باشند. عملیات بارگذاری/ تخلیه قطعات روی ماشین‌ها و جابجایی آنها بین ماشین‌ها در سلول رباتیک توسط یک ربات انجام می‌پذیرد. در یک سلول رباتیک از یک و یا چند ربات استفاده می‌شود. اکثر تحقیقات در ادبیات موضوع، سلول‌های تک ربات را بررسی کرده اند. البته داوانده و همکاران [۲] بیان کردند که در عمل معمولاً در یک سلول رباتیک، بیش از یک ربات وجود دارد، ولی در بیشتر مطالعات، سلول‌های رباتیک با یک ربات بررسی شده‌است.

۲. مرور ادبیات

معمولاً دو نوع تابع هدف در ادبیات تحقیق سلولهای رباتیک، استفاده شده است. اولین و مهمترین تابع هدف به کار گرفته شده، تابع هدف تک معیاره می‌باشد، مقاله ستی و همکاران [۱۰] به عنوان نقطه شروع ادبیات زمان بندی سلولهای رباتیک، تک معیاره در نظر گرفته می‌شود.

در توابع هدف تک معیاره از یک نوع تابع هدف در مساله استفاده می‌شود. از مهمترین توابع هدف تک معیاره به کار گرفته شده در تحقیقات قبلی حداقل کردن زمان سیکل و یا به عبارتی حداکثر کردن خروجی است. از آنجا که ربات از یک برنامه کامپیوتری تبعیت می‌کند، لذا توالی حرکات محدودی برای ربات وجود دارد که برای تولید قطعات، این توالی‌ها تکرار می‌شود.

بنابراین فعالیت‌های ربات به دلیل طبیعت آن باید از نوع سیکلی باشد و از این رو حداقل کردن زمان سیکل، یک هدف مرتبط خواهد بود.

زمان سیکل، میانگین زمان مورد نیاز برای تولید یک قطعه در بلند مدت است. دومین نوع تابع هدف به کار رفته در تحقیقات قبلی تابع هدف چند معیاره می‌باشد. در مسائل زمانبندی سلول رباتیک با توابع هدف چند معیاره، از دو یا چند تابع هدف در مساله استفاده می‌شود. از مهمترین توابع هدف استفاده شده در تحقیقات قبلی بهینه کردن همزمان هزینه کل تولید و زمان سیکل می‌باشد.

اغلب تحقیقات انجام یافته با توابع هدف چند معیاره بر روی سلول رباتیک با یک ماشین بررسی شده است. اخیرا هاکان گولتکین و همکاران [۴] مدل زمانبندی دو معیاره زمانبندی سلول رباتیک با هدف بهینه کردن زمان سیکل و هزینه کل تولید بر روی دو ماشین بررسی کردند. آنها در این مقاله بیان کردند که کاهش زمان سیکل همیشه منجر به کاهش هزینه نخواهد بود، بنابراین توانستند با بهینه کردن زمان سیکل، هزینه کل تولید را کاهش دهند.

آنها برای انجام این مساله از حد بالا و پایین زمانهای پردازش عملیات استفاده کردند و بدین صورت با تخصیص بهینه عملیات به دو ماشین از طریق الگوریتم ابتکاری DM توانستند مساله زمانبندی سلول رباتیک با دو ماشین با دو تابع هدف مجزا را حل

نمایند. زمانبندی چند معیاره می‌تواند جوابهای خوبی برای بیش از یک هدف فراهم کند. کوکسالان و همکاران [۸] از الگوریتم GAبرای حل مسائل زمانبندی دو معیاره در مساله تک ماشین با تولید قطعات یکسان و با اهداف مینیمم کردن کل زمان در جریان و تعداد کارهای دارای دیرکرد، استفاده کردند. گورل و آکتورک [۵] مساله زمانبندی دو معیاره در مسئله تک ماشین با تولید قطعات یکسان را مطالعه کردند.

در این مطالعه آنها کل هزینه تولید را به عنوان تابع هدف اول و کل زمان تولید را به عنوان تابع هدف دوم در نظر گرفته اند، سپس تابع هدف اول را با محدودیت های مدل و تابع هدف دوم به عنوان محدودیت جدید در یک سطح مشخص، بهینه کردند.

آنها همچنین برای حل مدل یک الگوریتم تاریخی برای تقریب یک جواب کارا ارائه کرده اند که نتایج محاسباتی آنها نشان داد که الگوریتم پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به نرم افزارهای GAMS و MINOS دارد.

همچنین تیواری و همکاران [۹]یک الگوریتم ژنتیک (GA) برای حل مساله بارگذاری ماشین با مشخص بودن زمان ماشین‌کاری و محدودیت مخزن ابزار حل کرده اند. اهداف لحاظ شده آنها حداقل کردن عدم تعادل سیستم و حداکثرکردن خروجی است که این اهداف در واقع از مهمترین اهداف زمان بندی در مسائل سیستم تولید انعطاف پذیر با ماشین‌های چند گانه می‌باشد.

آلاگوز و عزیزاوغلو[۱] مساله تک ماشین با تولید قطعات یکسان و با اهداف، حداقل کردن مجموع زمان تکمیل و حداقل کردن تعداد کارهای منقطع شده، در یک محیط زمان بندی مجدد را مد نظر قرار دادند و ثابت کردند اگر چه روشهای ابتکاری جستجوی محلی، دستیابی به تمام جواب‌های موثر را تضمین نمی‌کند، ولی می‌تواند جوابهای موثر برای معیارهای چند گانه در زمان های محاسباتی قابل قبول تخمین بزنند. در عین حال، کایان وآکتورک [۷] مدل زمانبندی دو معیاره تک ماشین با زمانهای پردازش قابل کنترل را مطالعه کرده اند.

آنها کل هزینه تولید را به عنوان تابع هدف اول و آن دسته از معیارهای زمان بندی عادی، نظیر زمان تکمیل (C_{max}) یا زمان سیکل که با افزایش زمان پردازش، بهبود پیدا نمی‌کنند، یا به عبارتی زمان تکمیل کل کارها را به عنوان هدف ثانویه در نظر گرفتند. همچنین حد پائین و بالا برای زمان پردازش برای هر یک از عملیات را تعیین نمودند و یک الگوریتم ابتکاری برای حل مساله ارائه نمودند.

این تحقیق به مدل‌سازی و حل مساله زمانبندی سلول رباتیک سه ماشینه با یک عملیات بر روی هر ماشین و یافتن هم زمان جواب بهینه هزینه کل تولید و زمان می‌پردازد؛ در ادبیات موضوع، مساله زمانبندی سلول رباتیک جهت بهینه کردن هزینه کل تولید و زمان، تنها برای حالت دو ماشینه حل شده است. در حالیکه در این تحقیق حالت سه ماشینه مدل‌سازی و حل می‌شود. ضمن اینکه تحقیقات انجام گرفته در زمینه زمانبندی سلول رباتیک دارای تابع هدف، بهینه کردن زمان هستند در حالیکه در این تحقیق، هدف بهینه نمودن زمان و هزینه کل تولید به صورت همزمان است.

۳. نمادها و اصطلاحات به کار رفته در مساله

$\mathbf{p_i}$: زمان پردازش عملیات قطعه برروی ماشین iام $\mathbf{i} = \{1,2,3\}$

$\mathbf{l}$: عملیات مربوط به قطعات بر روی ماشین‌ها $\mathbf{l} = \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$

δ: زمان جابجایی بازوی مکانیکی(ربات) بین دو ماشین

ϵ : زمان بارگذاری و تخلیه ماشین‌ها

T : زمان کل چرخه

$\widehat{T}$:مجموع زمان بهینه پردازش عملیات

C_0: هزینه ثابت عملکرد ماشین‌ها

K_l، $\alpha_{\mathbf{l}}$:هزینه مخصوص ابزار برای l امین عملیات

U_l: هزینه ثابت مخصوصl امین عملیات

$\mathbf{p_l^L}$: حد پایین زمان پردازش عملیات

$\mathbf{p_l^U}$: حد بالای زمان پردازش عملیات

m: تعداد ماشینهای CNC

۴. تعریف مساله

جهت روشن شدن مساله ابتدا، فرایند عملیات در چرخه تولید تشریح می‌شود. قطعه در مرحله اول توسط ربات در ماشین اول بارگذاری می‌شود. پس از اتمام عملیات بر روی قطعه توسط ماشین اول، ربات قطعه را از روی ماشین اول تخلیه و در ماشین دوم بارگذاری می‌نماید.

ماشین دوم نیز عملیات مورد نظر را بر قطعه انجام می‌دهد. سپس ربات قطعه را از این ماشین تخلیه و به ماشین سوم انتقال می‌دهد. (بارگذاری می‌کند). پس از اتمام عملیات ماشین سوم بر روی قطعه، ربات ماشین سوم را تخلیه می‌کند و به این ترتیب چرخه تولید کامل می‌شود. هدف اصلی در این چرخه بهینه کردن توام زمان و هزینه کل تولید قطعه است. برای مدل‌سازی مساله ابتدا لازم است چند تعریف زیر ارائه شود.

$f_l(p_l)$: تابع هزینه تولید یک قطعه، با $\mathbf{l}$ عملیات مجزا بر روی هر یک از ماشین‌ها، در سلول رباتیک می‌باشد.[۴]

$$f_l(p_l) = (C_0\, p_l + K_l\, U_l p_l^{\alpha_l}) \tag{۱}$$

$F=\sum_{l=1}^{m} f_l(p_l)$: تابع هزینه کل تولید قطعات، با l عملیات بر روی ماشین‌ها، در یک چرخه کامل می‌باشد.[۴]

$$F = \sum_1^m f_l(p_l) = \sum_{l=1}^m (C_0\, p_l + K_l\, U_l p_l^{\alpha_l}) \tag{۲}$$

همان طور که بالا ذکر گردید چرخه S_1، چرخه‌ای‌است که در آن بازوی مکانیکی از یک حالت اولیه سیستم حرکت خود را شروع می‌کند و در یک چرخه، هر یک از فعالیت‌ها را دقیقا یک بار انجام می‌دهد و در نهایت به حالت اولیه سیستم بر می‌گردد. برای به دست آوردن هزینه کل تولید در این چرخه از بهینه کردن زمان سیکل چرخه استفاده می‌شود، زمان سیکل برای چرخه S_1 توسط ستی و همکاران [۱۰] برای دو سلول رباتیک با دو ماشین CNC به صورت زیر به‌دست آمده است:

$$T_{S_1} = 6\,\delta + 6\epsilon + P_1 + P_2 + P_3 \tag{۳}$$

مسأله زمانبندی سلول رباتیک سه ماشین را با فرض انجام یک عملیات بر روی هر ماشین در چرخه S_1 و با هدف بهینه کردن هزینه کل تولید و زمان، در سه حالت به صورت زیر بررسی می‌کنیم :

۱. **حات اول**: زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها در کران پایین آنها می‌باشد.
۲. **حالت دوم:** زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها در کران بالای آنها می باشد.
۳. **حالت سوم:** زمان پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها بین کران بالا و کران پایین آنها می‌باشد.

۴-۱. حالت اول

قضیه ۱: اگر زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها در کران پایین آنها می‌باشد دراین صورت مقدار بهینه هزینه کل تولید در کران پایین زمان پردازش خواهد بود.

اثبات: اگر زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها در کران پایین آنها می‌باشد در این صورت داریم:

- زمان بهینه پردازش عملیات بر روی ماشین اول به صورت $p_1^* = p_1^l$ باشد.
- زمان بهینه پردازش عملیات بر روی ماشین دوم به صورت $p_2^* = p_2^l$ باشد.
- زمان بهینه پردازش عملیات بر روی ماشین سوم به صورت $p_3^* = p_3^l$ باشد.

اینک با جایگذاری p_i به جای p_l در رابطه (۱) تابع هزینه تولید برای ماشین اول، دوم، و سوم به صورت زیر می نویسیم.

تابع هزینه تولید ماشین اول:

$$f_1(p_1^l) = C_0 p_1^* + K_1 U_1 p_1^{*\alpha_1} \tag{۴}$$

تابع هزینه تولید ماشین دوم:

$$f_2(p_2^l) = C_0\, p_2^* + K_2 U_2\, p_2^{*\alpha_2} \tag{۵}$$

تابع هزینه تولید ماشین سوم:

$$f_3(p_3^l) = C_0\, p_3^* + K_3 U_3\, p_3^{*\alpha_3} \tag{۶}$$

حالا با استفاده از رابطه(۲) و با جمع کردن تابع هزینه تولید هر یک از ماشین‌ها و با جایگزینی مقادیر $p_1^* = p_1^l$ ، $p_2^* = p_2^l$ و $p_3^* = p_3^l$ در روابط بالا مقدار بهینه هزینه کل تولید به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F = f_1(p_1^*) + f_2(p_2^*) + f_3(p_3^*) \tag{۷}$$
$$F = C_0 p_1^l + K_1 U_1\, p_1^{l\alpha_1} + C_0\, p_2^l + K_2 U_2\, p_2^{l\alpha_2} + C_0\, p_3^l + K_3 U_3\, p_3^{l\alpha_3} = C_0(p_1^l + p_2^l + p_2^l) + [K_1 U_1\, p_1^{l\alpha_1} + K_2 U_2\, p_2^{l\alpha_2} + K_3 U_3\, p_3^{l\alpha_3}]$$

با توجه به این که برای تمامی عملیات مربوط بر روی هر یک از ماشین‌ها از یک نوع ابزار استفاده می‌شود، بنابراین $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ و K=K_1= K_2=K_3 خواهد بود.

حال با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۷)، مقدار بهینه هزینه کل تولید برای سه ماشین به صورت زیر خواهد بود.

$$F = C_0(p_1^l + p_2^l + p_2^l) + [KU_1\, p_1^{l^\alpha} + KU_2\, p_2^{l^\alpha} + KU_3\, p_3^{l^\alpha}] \tag{۸}$$

۴-۲. حالت دوم

قضیه ۲:اگر زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها در کران بالای آنها می‌باشد دراین صورت مقدار

بهینه هزینه کل تولید در کران بالای زمان پردازش خواهد بود.

اثبات: اگر زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها در کران بالای آنها می‌باشد در این صورت داریم:

- زمان بهینه پردازش عملیات بر روی ماشین اول به صورت $\mathbf{p_1^* = p_1^U}$ باشد.
- زمان بهینه پردازش عملیات بر روی ماشین دوم به صورت $\mathbf{p_2^* = p_2^U}$ باشد.
- زمان بهینه پردازش عملیات بر روی ماشین سوم به صورت $\mathbf{p_3^* = p_3^U}$ باشد.

مقدار هزینه کل تولید در این حالت، مانند حالت اول به دست می‌آید. با استفاده از رابطه (۱) و همچنین با جایگذاری $\mathbf{p_1^* = p_1^U}$، $\mathbf{p_2^* = p_2^U}$ و $\mathbf{p_3^* = p_3^U}$ در روابط زیر، تابع هزینه کل تولید به صورت به دست می‌آید:

$$F = f_1(p_1^*) + f_2(p_2^*) + f_3(p_3^*) = C_0 p_1^U + K_1 U_1\, p_1^{U^{\alpha_1}} + C_0\, p_2^U + K_2 U_2\, p_2^{U^{\alpha_2}} + C_0\, p_3^U + K_3 U_3\, p_3^{U^{\alpha_3}} = C_0(p_1^U + p_2^U + p_2^U) + \left[K_1 U_1\, p_1^{U^{\alpha_1}} + K_2 U_2\, p_2^{U^{\alpha_2}} + K_3 U_3\, p_3^{U^{\alpha_3}}\right] \qquad (۹)$$

با توجه به این که برای تمامی عملیات بر روی ماشین‌ها از یک نوع ابزار استفاده می شود، بنابراین $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ و $K = K_1 = K_2 = K_3$ خواهد بود و مقدار بهینه هزینه کل تولید برای سه ماشین به صورت زیر خواهد بود:

$$F = C_0(p_1^U + p_2^U + p_2^U) + [KU_1\, p_1^{U^\alpha} + KU_2\, p_2^{U^\alpha} + KU_3\, p_3^{U^\alpha}] \qquad (۱۰)$$

۳-۴. حالت سوم

قضیه ۳: اگر زمان پردازش عملیات بر روی هر یک از ماشین‌ها بین کران پایین و کران بالای آنها باشد دراین صورت مقدار بهینه زمان پردازش عملیات و همچنین مقدار بهینه هزینه کل تولید بین کران بالا و کران پایین آنها خواهد بود.

اثبات: اگر زمانهای پردازش عملیات هر یک از ماشین‌ها بین کران پایین و کران بالای آنها باشد در این صورت داریم:

- زمان پردازش عملیات بر روی ماشین اول به صورت $\mathbf{p_1^L < P_1 < p_1^U}$ باشد.
- زمان پردازش عملیات بر روی ماشین دوم به صورت $\mathbf{p_2^L < P_{12} < p_2^U}$ باشد.
- زمان پردازش عملیات بر روی ماشین سوم به صورت $\mathbf{p_3^L < P_3 < p_3^U}$ باشد.

در دو حالت قبلی مقادیر $\mathbf{p_1^*}$، $\mathbf{p_2^*}$ و $\mathbf{p_3^*}$ به ترتیب در کران پایین و بالا قرار داشتندو با در دست داشتن مقادیر کران‌های زمان پردازش عملیات، مقدار تابع هزینه کل به دست می‌آمد. اما در حالت سوم، زمان‌های پردازش عملیات هر یک از ماشین‌ها بین کران‌های پایین و بالای آنها قرار دارند، بنابراین در این قسمت باید اول مقادیر $\mathbf{p_1^*}$، $\mathbf{p_2^*}$ و $\mathbf{p_3^*}$ را به دست بیاوریم تا هزینه کل تولید به دست آید. با استفاده از رابطه (۱) و رابطه (۲) تابع هزینه کل تولید به صورت زیر خواهد بود.

$$F = [\, C_0(p_1^* + p_2^* + p_3^*) + KU_1\, p_1^{*^\alpha} + KU_2\, p_2^{*^\alpha} + KU_3\, p_3^{*^\alpha}] \qquad (۱۱)$$

اینک باید مقادیر $\mathbf{p_1^*}$، $\mathbf{p_2^*}$ و $\mathbf{p_3^*}$ را به دست آورده ودر رابطه فوق قرار دهیم تا مقدار بهینه هزینه کل تولید به دست آید. برای حل مقادیر $\mathbf{p_1^*}$، $\mathbf{p_2^*}$ و $\mathbf{p_3^*}$ از روش لاگرانژاستفاده می کنیم. ابتدا تابع لاگرانژ نسبت به نقطه P^* را می نویسیم.

$$L(P^*, \mu^*) = f_1(p_1^*) + f_2(p_2^*) + f_3(p_3^*) + \mu^*(6\,\delta + 6\epsilon + p_1^* + p_2^* + p_3^* - T) \qquad (۱۲)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۱۲)، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\partial L(P^*, \mu^*) = [(\partial f_1(p_1^*) + \mu^*) + (\partial f_2(p_2^*) + \mu^*) + (\partial f_3(p_3^*) + \mu^*)] \qquad (۱۳)$$

از آنجا که $\partial(\mathbf{L(P^{l}*, \mu^{\dagger}*)} = \mathbf{0}$ می‌باشد.

بنابراین با صفر قرار دادن طرف دوم رابطه (۱۳) داریم:

$$((\partial f_1(p_1^*) + \mu^*) = 0 \qquad (۱۴)$$

$$((\partial f_2(p_2^*) + \mu^*) = 0 \qquad (۱۵)$$

$$((\partial f_3(p_3^*) + \mu^*) = 0 \qquad (۱۶)$$

با حل معادله‌های (۱۴) ، (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت:

$$\partial f_1(p_1^*) = \partial f_2(p_2^*) = \partial f_3(p_3^*) = -\mu^* \qquad (۱۷)$$

با به کارگیری رابطه $f(P^*) = C_0(P^*) + K\,U\,(P^*)^{\alpha}$ در رابطه‌های $\partial f_1(p_1^*)$ ، $\partial f_2(p_2^*)$ و $\partial f_3(p_3^*)$ مقدار آنها به صورت زیر به دست می آید:

$$\partial f_1(p_1^*) = \partial f_2(p_2^*) \rightarrow C_0 + \alpha_1 K_1 U_1 p_1^{*\alpha_1 - 1} = C_0 + \alpha_2 K_2 U_2 p_2^{*\alpha_2 - 1} \qquad (۱۸)$$

$$\partial f_1(p_1^*) = \partial f_3(p_3^*) \rightarrow C_0 + \alpha_1 K_1 U_1 p_1^{*\alpha_1 - 1} = C_0 + \alpha_3 K_3 U_3 p_3^{*\alpha_3 - 1} \qquad (۱۹)$$

$$\partial f_2(p_2^*) = \partial f_3(p_3^*) \rightarrow C_0 + \alpha_2 K_2 U_2 p_2^{*\alpha_2 - 1} = C_0 + \alpha_3 K_3 U_3 p_3^{*\alpha_3 - 1} \qquad (۲۰)$$

با توجه به این که برای تمامی عملیات مربوط بر روی ماشین‌ها از یک نوع ابزار استفاده می شود، بنابراین $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ و $K = K_1 = K_2 = K_3$ خواهد بود.حال با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌های فوق داریم:

$$U_1\, p_1^{*\alpha-1} = U_2\, p_2^{*\alpha-1} \qquad (۲۱)$$

$$U_1\, p_1^{*\alpha-1} = U_3\, p_3^{*\alpha-1} \qquad (۲۲)$$

$$U_2\, p_2^{*\alpha-1} = U_3\, p_3^{*\alpha-1} \qquad (۲۳)$$

اینک طرفین رابطه‌های فوق را به توان $\frac{1}{\alpha}-1$ می‌رسانیم و به صورت زیر در می‌آیند:

$$U_1^{1/\alpha-1}\, p_1^* - U_2^{1/\alpha-1}\, p_2^* = 0 \qquad (۲۴)$$

$$U_1^{1/\alpha-1}\, p_1^* - U_3^{1/\alpha-1}\, p_3^* = 0 \qquad (۲۵)$$

$$U_2^{1/\alpha-1}\, p_2^* - U_3^{1/\alpha-1}\, p_3^* = 0 \qquad (۲۶)$$

در ادامه با جایگذاری رابطه $T - (6\,\delta + 6\epsilon) = p_1^* + p_2^* + p_3^*$ در رابطه (۲۶)، دستگاه داریم:

$$U_1^{1/\alpha-1}\, p_1^* - U_2^{1/\alpha-1}\, p_2^* = 0 \qquad (۲۷)$$

$$U_1^{1/\alpha-1}\, p_1^* - U_3^{1/\alpha-1}\, p_3^* = 0 \qquad (۲۸)$$

$$p_1^* + p_2^* + p_3^* = T - (6\,\delta + 6\epsilon) \qquad (۲۹)$$

اینک با حل دستگاه سه معادله سه مجهولی بالا به روش کرامر، مقادیر p_1^* ، p_2^* و p_3^* به صورت زیر به دست می‌آید.

$$p_1^* = \frac{(U_2^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})(T-(6\,\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]} \qquad (۳۰)$$

مقدار p_2^* به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p_2^* = \frac{(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})(T-(6\,\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]} \qquad (۳۱)$$

مقدار p_3^* به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p_3^* = \frac{(U_1^{1/\alpha-1})(U_2^{1/\alpha-1})(T-(6\,\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]} \qquad (۳۲)$$

با جایگذاری p_1^*، p_2^* و p_3^* در رابطه(۱۱) مقدار کل تابع هزینه تولید به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F^* = \{[C_0 \left(\frac{(U_2^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})(T-(6\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]} + \frac{(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})(T-(6\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]} + \frac{(U_1^{1/\alpha-1})(U_2^{1/\alpha-1})(T-(6\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]}\right)] + [KU_2 \frac{(U_2^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})(T-(6\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]}] + KU_2 \frac{(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})(T-(6\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]} + KU_3 \frac{(U_1^{1/\alpha-1})(U_2^{1/\alpha-1})(T-(6\delta+6\epsilon))}{[(U_1^{1/\alpha-1})(U_3^{1/\alpha-1})]+[(U_2^{1/\alpha-1})(U_1^{1/\alpha-1}+U_3^{1/\alpha-1})]}\} \quad (۳۳)$$

۵. حل مثال عددی

در این قسمت جهت اثبات کارآیی روش ارایه شده برای حالت سوم یک مثال عددی در نظر گرفته می شود.لازم به ذکر است که داده های استفاده شده در این مثال از ادبیات تحقیق که برای دو ماشین به کار رفته بود، استخراج شده است.مقادیر متغیرها به صورت زیر می‌باشد:

هزینه ثابت عملکرد ماشین‌ها: C_0 =۰/۵

هزینه‌های مخصوص ابزار: ۴= $K3$ =$K2$ =

$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ =-۱/۴۹ , K= $K1$

هزینه عملیات ماشین اول: $U1$ =۳/۹۶

هزینه عملیات ماشین دوم: $U2$ =۱/۱۲

هزینه عملیات ماشین سوم: $U3$ =۵/۹۳

زمان جابجایی ربات: δ=۲ و زمان بارگذاری و تخلیه ماشین‌ها:۱= ϵ

زمان سیکل کل چرخه: ۳۲/۵= $\mathbf{T}$

حد پایین زمان پردازش عملیات بر روی ماشین اول: ۱/۲= $\mathbf{p_1^L}$

حد پایین زمان پردازش عملیات بر روی ماشین دوم: ۲= $\mathbf{p_2^L}$

حد پایین زمان پردازش عملیات بر روی ماشین سوم: ۱/۸= $\mathbf{p_3^L}$

حد بالای زمان پردازش عملیات بر روی ماشین اول: ۴/۹= $\mathbf{p_1^U}$

حد بالای زمان پردازش عملیات بر روی ماشین دوم: ۵/۸= $\mathbf{p_1^U}$

حد بالای زمان پردازش عملیات بر روی ماشین سوم: ۵/۲= $\mathbf{p_1^U}$

اینک مقادیر زمان بهینه پردازش عملیات بر روی هر ماشین ($\mathbf{p_1^*}$، $\mathbf{p_2^*}$، $\mathbf{p_3^*}$) و همچنین مقدار بهینه هزینه کل تولید(F) را با استفاده از رابطه‌های ۳۰ تا ۳۱به دست می‌آید:

$\mathbf{p_1^*}$ =۴/۷ ، $\mathbf{p_2^*}$ =۴/۵ ، $\mathbf{p_3^*}$ =۴/۸، $\hat{\mathbf{T}}$ =۱۴/۵، و $\mathbf{F^*}$ =۱۹/۴

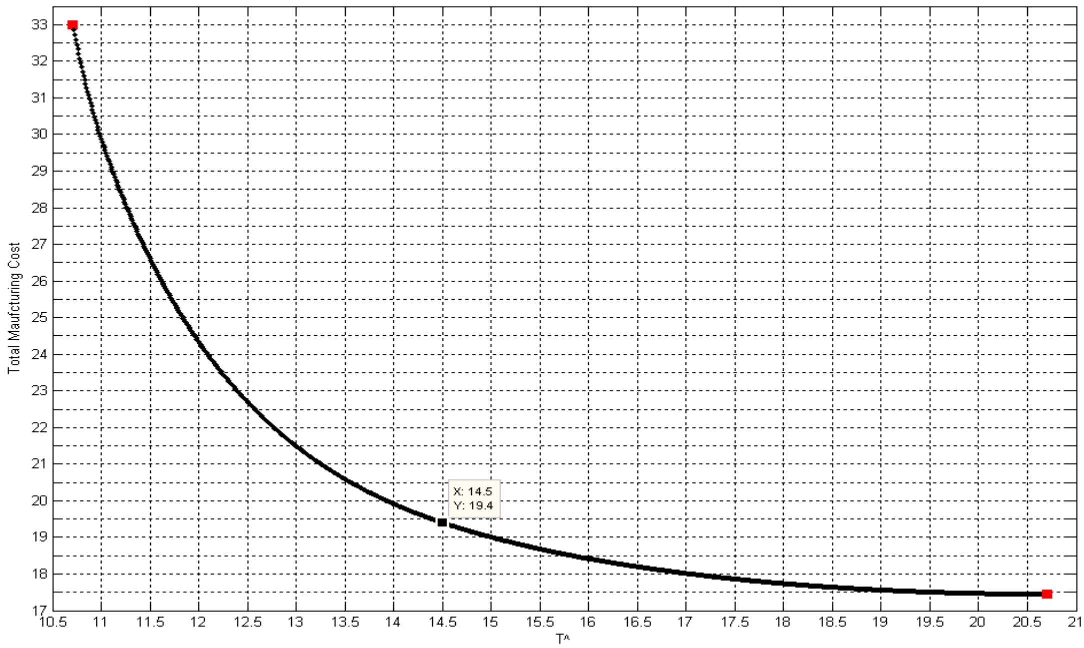
۶. نتیجه گیری

مهمترین نتیجه حاصل از تحقیق، مدل‌سازی و حل مساله زمانبندی سلول رباتیک سه ماشینه با یک عملیات بر روی هر ماشین و یافتن جواب‌های بهینه هزینه کل تولید و زمان می‌باشد که در ادبیات موضوع، مساله زمانبندی سلول رباتیک جهت بهینه کردن هزینه کل تولید و زمان، تنها برای حالت دو ماشینه مدل-سازی و حل شده است.

همچنین در اغلب تحقیقات انجام یافته در زمینه زمانبندی سلول رباتیک، هدف بهینه کردن زمان در سلول رباتیک بود که در این صورت بهینه کردن زمان منجر به بهینه کردن هزینه کل تولید در سلول نمی‌شد و در بیشتر موارد کاهش زمان، باعث افزایش هزینه، می‌شد، ولی در این تحقیق به طور هم‌زمان، هزینه کل تولید و زمان در سلول رباتیک بهینه شده‌است.

برای نشان دادن این ادعا، با استفاده از داده‌های مثال فوق، مساله را در نرم افزار MATLAB به اجرا درآوردیم که نتیجه آن در شکل (۱) به وضوح نشان داده شده است.

همان طور که در شکل نشان به وضوح دیده می‌شود، با افزایش مجموع زمان بهینه پردازش عملیات ($\hat{T}$)، مقدار بهینه هزینه کل تولید($\mathbf{F^*}$) کاهش می‌یابد و برعکس، در نتیجه مجموع زمان بهینه پردازش عملیات($\hat{T}$) بین حد پایین و حد بالای مجموع زمان پردازش عملیات و مقدار بهینه هزینه کل تولید متناسب با آن تغییر خواهد کرد.



شکل ۱. مقایسه زمان پردازش عملیات و هزینه کل تولید

مساله تحقیق از چند جهت قابل گسترش است. می‌توان مساله را برای حالتی که قطعات متنوع باشند مدل‌سازی و حل نمود. در تحقیق فرض شد که ماشین‌ها یکسان و سری هستند. در نظر گرفتن ماشین‌های متفاوت و موازی می‌تواند موضوع مناسب دیگری برای تحقیقات آتی باشد. اضافه کردن محدودیت‌هایی مانند محدودیت مخزن انبار، ربات‌های چندنگه‌دارنده و حالت چند رباته در سلول رباتیک موجب توسعه مساله خواهد شد. همچنین در اکثر تحقیقات انجام یافته برای حل مسائل زمانبندی سلول رباتیک، با توجه به پیچیدگی مسائل از الگوریتم‌های ابتکاری و فرا ابتکاری استفاده شده است. لذا ارائه مدلهای جدید و حل این مسائل با ترکیب مدلهای ریاضی و الگوریتم‌های ابتکاری می‌تواند به عنوان تحقیقات آتی در نظر گرفته شود.

مراجع

[1] Alagoz, O., Azizogbrevelu, M., "*Rescheduling of Identical Parallel machines Under Machine Eligibility Constraints.*" European journal of operational research. 149(3): 2003, P. 523.

[2] Dawande, M., sriskandarajah, C., Sethi, S.P., *On Throughput Maximization inConstant Travel-Time Robotic Cells.* Manufacturing and Service Operations Management, 4, 2002, pp. 296-312.

[3] Gultekin, H., Akturk, M.S., et al., *"Scheduling in a Three-Machine Robotic Flexible Manufacturing Cell*." Computers & operations research. 34(8): 2007, P. 2463.

[4] Gultekin, H., Akturk, M.S., et al., "*Bicriteria Robotic Operation Allocation in a Flexible Manufacturing Cell*." Computers & operations research. 48(4): 2010, P. 779.

[5] Gurel, S., Akturk, M.S., *"Considering Manufacturing Cost and Scheduling Performance on a CNC Turning Machine.*" European journal of operational research. 177(1): 2007, P. 325.

[6] Hoogeveen, H., "*Multicriteria Scheduling.*" European Journal of Operational research 167(3): 2005, pp. 592-623.

[7] Kayan, R.K., Akturk, M.S., *"A New Bounding Mechanism for the CNC Machine Scheduling Problems with Controllable Processing Times*., 2005.

[8] Koksalan, M., Azizoglu, M., et al. "*Minimizing Flowtime and Maximum Earliness on a Single Machine*." Iie Transactions 30(2): 1998, pp. 192-200.

[9] Tiwari, A., Brintrup, A.M., Ramsden, J., *"An Interactive Genetic Algorithm Based Framework for Handling Qualitative Criteria in Design Optimization*." Computers in Industry 58 (3): 2007, pp. 279-291.

[10] Sethi, S.P., d. Groupe d'études et de recherche en analyse des, *Sequencing of Robot Moves and Multiple Parts in a Robotic Cell. Montréal*, Groupe d'études et de recherche en analyse des decisions, 1989.