نشریه بین‌المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۱، جلد۱۹، بهار ۱۳۸۷، صفحه ۸۸-۸۱
ویژه‌نامه مهندسی صنـــایع

توسعه دو مدل ریاضی کارا برای مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی

مجید نوجوان

چکیده: در این مقاله دو مدل برای توسعه مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ پیشنهاد شده است. در اولین مدل محدودیتهای انتخاب اشیاء در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ به صورت فازی در نظر گرفته شده و این مدل با استفاده از روش برنامه ریزی خطی فازی حل شده است. مدل دوم نیز با توسعه مدل اول به گونه‌ای تعیین شده است که وابستگی کافی در اشیاء انتخاب شده در ترکیب وجود داشته باشد. مقایسه مدلهای پیشنهاد شده در این مقاله و مدلهای اولیه مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی نشان می‌دهد که آنها کارایی بهتری از مدلهای اولیه داشته و استفاده از آنها خصوصاً در مسائل واقعی که دارای ابعاد بزرگ هستند، بر مدلهای اولیه برتری دارد.

واژه های کلیدی: مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰، مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰، مجموعه‌های فازی، برنامه ریزی خطی فازی.

۱. مقدمه

مسئله کوله‌پشتی یکی از مسائل مهم بهینه سازی بوده و کاربرد زیادی در مسائل واقعی پیدا کرده است. کاربرد زیاد این مسئله و نیز ظاهر شدن آن در قسمتی از مسائل بهینه سازی پیچیده، باعث شده است که در طی سه دههٔ اخیر مسئله کوله‌پشتی مورد توجه فراوان قرار گرفته و انواع زیادی از آن مورد بررسی قرار گیرد [۱]. یکی از انواع مهم مسئله کوله‌پشتی، مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ (MCKP)[1] است که در بودجه‌بندی، برنامه‌ریزی، انتخاب پروژه و ... کاربرد زیادی دارد اثبات شده است[۳،۲]. پیچیدگی مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی از نوع چند جمله‌ای نامعین سخت[2] می‌باشد و از اینرو برای حل این مسئله الگوریتمهای زیادی در طی دو دههٔ اخیر توسعه یافته است که معمولاً بر اساس روش شاخه و کرانه، برنامه‌ریزی پویا و یا ادغام این دو روش و نیز روشهای فراابتکاری عمل می‌کنند [۴].

دادزینسکی برنامه‌ریزی پویا را برای حل مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی بکار برده است. دایر و همکاران از روش شاخه و کرانه و نیز از یک رویکرد ادغامی شامل روشهای شاخه و کرانه و برنامه‌ریزی پویا برای حل این مسئله استفاده کرده است. جنز و لونر برای حل مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی از یک الگوریتم ابتکاری استفاده کرده‌اند. پیسینجر یک الگوریتم خاص برای حل این مسئله پیشنهاد کرده است که کارائی زیادی در حل مسائل بزرگ دارد. همچنین زویی و جی نیز الگوریتم ژنتیک را برای حل مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی بکار برده‌اند [۵،۶،۷،۸،۹،۱۰].

برای در نظر گرفتن عدم اطمینان در مسائل کوله‌پشتی ۱-۰ از دو رویکرد احتمالی و فازی استفاده می‌شود. در رویکرد احتمالی ضرائب تابع هدف، وزن و یا تعداد اشیاء به صورت متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده و یا اشیاء در طی یک فرآیند تصادفی بدست می‌آیند [۱۱، ۱۲ و ۱۳]. در رویکرد فازی نیز معمولاً ضرائب تابع هدف و وزن اشیاء به صورت اعداد فازی نشان داده می‌شود. به علت مزایا و سهولت بکارگیری رویکرد فازی در نشان دادن عدم اطمینان، در سالیان اخیر کاربرد این رویکرد در مسئله کوله‌پشتی توسعه یافته است.

آبوند و همکاران برای حل مسئله کوله‌پشتی چند هدفه و چند بعدی از برنامه‌ریزی فازی استفاده کرده‌اند[۱۴]. ساکاوا و همکاران مسئله کوله‌پشتی چند هدفه را به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (FLP)[3] مدلسازی نموده و برای حل آن از الگوریتم ژنتیک استفاده کرده‌اند[۱۵]. اوکادا و ژن مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی و چند بعدی را در حالیکه ضرائب تابع هدف و وزن اشیاء به صورت اعداد فازی هستند بررسی کرده و رویکردی برای حل آن پیشنهاد نموده‌اند[۱۶ و ۱۷]. لین و یائو وزن اشیاء را به صورت

این مقاله در تاریخ ۸۵/۱۰/۱۲ دریافت و در تاریخ ۸۶/۱۱/۶ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر مجید نوجوان، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب. mnojavan@azad.ac.ir

[1] *Multiple Choice Knapsack Problem (MCKP)*
[2] *NP-Hard*
[3] *Fuzzy Linear Programming (FLP)*

اعداد فازی نشان داده و رویکرد دیگری برای حل مسئله کوله‌پشتی چند بعدی توسعه داده‌اند [۱۸].

نوجوان و غضنفری نیز در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ وابستگی اشیاء به گروههای مختلف را به صورت فازی نشان داده و این مسئله را مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ (FMCKP) نامیده‌اند. آنها با استفاده از مجموعه‌ای از تعاریف، مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ را به دو صورت تک هدفه و دو هدفه فرموله کرده و آن را حل نموده‌اند[۲۰].

در این مقاله برای توسعه مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با استفاده از تئوری فازی، از رویکرد جدیدی استفاده شده و دو مدل کارا برای توسعه مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ پیشنهاد شده است.

ساختار مقاله به این صورت است که ابتدا در بخش دوم مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ و مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی دو هدفه ۱-۰ تشریح شده‌اند. سپس در بخش سوم رویکرد جدیدی برای استفاده از تئوری فازی در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی پیشنهاد و دو مدل جدید برای اینکار معرفی شده است. نهایتاً در بخش چهارم با حل مثالهایی، مدلهای پیشنهاد شده و مدلهای موجود مقایسه شده‌اند. نتیجه‌گیری نیز در آخرین بخش آمده است.

۲. تشریح مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰

در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ (MCKP) اشیاء به چند گروه تقسیم شده و باید از هر گروه دقیقاً یک شیئ برای قرار گرفتن در کوله‌پشتی انتخاب شود. این انتخاب باید به گونه‌ای انجام شود که محدودیت ظرفیت وزن کوله‌پشتی رعایت شده و بیشترین سود حاصل گردد. مسئله MCKP به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\max \quad z=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \le W \qquad (۱)$$

$$\sum_{i\in U_j} x_i = 1 \qquad j=1,\dots,k$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n$$

در مدل فوق، x_i یک متغیر تصمیم‌گیری دودوئی است و در صورتی که شیئ i ام برای قرار گرفتن در کوله‌پشتی انتخاب شود، مقدار آن مساوی یک و در غیر اینصورت مقدار آن مساوی صفر در نظر گرفته می‌شود. مقادیر p_i و w_i به ترتیب سود و وزن شیئ i ام و W نیز ظرفیت وزنی مجاز کوله‌پشتی را نشان می‌دهد. همچنین U_j نیز نشاندهنده مجموعهٔ اشیائی می‌باشد که به گروه j تعلق دارند.

۲-۱. مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰

در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ فرض می‌شود که هر شیئ دقیقاً به یک گروه تعلق داشته و به هیچ گروه دیگری تعلق ندارد. نوجوان و غضنفری در مقاله خود فرض کرده‌اند که در شرایط واقعی ممکن است این فرض صحیح نباشد و هر شیئ به گروههای مختلف با درجات متفاوت وابستگی داشته باشد[۲۰]. آنها این مسئله را مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ (FMCKP) نامیده و برای نشان دادن وابستگی اشیاء به گروههای مختلف از مجموعه‌های فازی استفاده کرده‌اند. برای اینکار آنها با استفاده از نظرات تصمیم‌گیر و کاربرد مجموعه‌های فازی، وابستگی هر شیئ به گروههای مختلف را به صورت مجموعه‌های فازی زیر مشخص کردند:

$$\widetilde{U}_j=\left\{(1,\mu_{1j}),\dots,(n,\mu_{nj})\right\} \qquad j=1,\dots,k \qquad (۲)$$

در رابطه فوق $\widetilde{U}_j$ مجموعه فازی وابستگی اشیاء مختلف به گروه j بوده و به صورت زوجهای مرتب $(i\,,\mu_{ij})$ مشخص می‌شود که در آن i شمارهٔ شیئ و μ_{ij} درجهٔ عضویت شیئ i در گروه j می‌باشد.

چون در حالت فازی، با انتخاب یک شیئ گروههای زیادی (با درجه عضویتهای متفاوت) دارای نماینده‌ای در ترکیب خواهند شد، تعیین وابستگی اشیاء بصورت فازی بر روی محدودیت **"انتخاب دقیقاً یک شیئ از هر گروه"** تاثیر می‌گذارد. با توجه به این تغییر، نوجوان و غضنفری برای مدلسازی مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ تعاریف زیر را بکار برده‌اند:

تعریف ۱: وابستگی کامل اشیاء: یک شیئ به یک گروه وابستگی کامل دارد، اگر درجه عضویت شیئ در آن گروه مساوی یک باشد. فرض می‌شود هر شیئ فقط نسبت به یک گروه دارای وابستگی کامل است.

تعریف ۲: وابستگی کافی اشیاء: یک شیئ نسبت به یک گروه دارای وابستگی کافی است، اگر درجه عضویت شیئ در آن گروه حداقل مساوی α باشد. مقدار α توسط تصمیم‌گیر مشخص می‌شود.

تعریف ۳: نمایندگی یک گروه: یک شیئ نماینده یک گروه نامیده می‌شود اگر درجه عضویت (وابستگی) آن شیئ در آن گروه کافی باشد.

با استفاده از تعاریف فوق و برای اجتناب از کوچک شدن فضای جواب و یا غیر عملی شدن مسئله FMCKP ، محدودیت انتخاب دقیقاً یک شیئ از هر گروه در مسئله MCKP به صورت زیر تعریف شده است:

"در هر ترکیب انتخاب شده از اشیاء، هر گروه باید دارای حداقل یک نماینده با وابستگی کافی و حداکثر یک نماینده با وابستگی کامل باشد."

مفهوم عبارت بالا آن است که انتخاب اشیائی که نسبت به یک گروه دارای درجهٔ عضویت بزرگتر و مساوی α و کوچکتر از یک هستند، محدودیتی برای انتخاب شیئ دیگری با درجهٔ عضویت یک در همان گروه ایجاد نمی‌کند. این مفهوم با استفاده از محدودیتهای زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in U_j^1} x_i \le 1 \qquad j=1,\dots,k \\ &\sum_{i\in U_j^\alpha} x_i \ge 1 \qquad j=1,\dots,k \end{aligned} \tag{۳}$$

در محدودیتهای فوق U_j^1 مجموعهٔ اشیائی هستند که با درجه عضویت مساوی یک به گروه j وابستگی دارند. همچنین U_j^α نیز مجموعهٔ اشیائی را نشان می‌دهد که با درجه عضویت حداقل α به گروه j وابسته هستند. در حقیقت این دو مجموعه برشهایی از مجموعه فازی $\tilde{U}_j$ بوده و می‌توان آنها را به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} &U_j^\alpha = \{\forall i \mid \mu_{ij} \ge \alpha\} \qquad j=1,\dots,k \\ &U_j^1 = \{\forall i \mid \mu_{ij} = 1\} \qquad j=1,\dots,k \end{aligned} \tag{۴}$$

با توجه به تعاریف فوق، نوجوان و غضنفری مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ (FMCKP) را به صورت زیر فرموله نموده‌اند:

$$\begin{aligned} &\max \quad Z=\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \le W \\ &\sum_{i\in U_j^1} x_i \le 1 \qquad j=1,\dots,k \\ &\sum_{i\in U_j^\alpha} x_i \ge 1 \qquad j=1,\dots,k \\ &x_i \in \{0,1\} \qquad i=1,\dots,n \end{aligned} \tag{۵}$$

در رابطه با مسئله FMCKP می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:

الف) اگر درجات عضویت یک شیئ به گونه‌ای داده شود که درجه عضویت در یک گروه برابر یک و در سایر گروهها برابر صفر باشد، محدودیتهای رابطه ۳ در مسئله FMCKP ادغام و این مسئله به مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ (MCKP) تبدیل می‌شود.

ب) چون در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ فقط وابستگی کامل اشیاء به یک گروه در نظر گرفته می‌شود، بنابراین تعداد اشیاء انتخاب شده در هر ترکیب دقیقاً مساوی تعداد گروهها (k) است، اما در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ ممکن است تعداد اشیاء در یک ترکیب کمتر از تعداد گروهها (k) باشد. با توجه به این موضوع می‌توان گفت که فضای جواب مدل FMCKP بزرگتر از فضای جواب مدل MCKP بوده و در نتیجه ممکن است با استفاده از آن جواب بهتری برای مسئله بدست آید.

۲-۲. مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی دو هدفه ۱-۰

چون در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰، هر شیئ به گروههای مختلف وابستگی دارد، انتخاب هر شیئ باعث انتخاب گروههای مختلف با درجات عضویت گوناگونی می‌گردد. در این حالت اگر مجموع وابستگی اشیاء انتخاب شده در ترکیب به یک گروه زیاد باشد، میزان نقض محدودیت اولیه "انتخاب فقط یک شیئ از هر گروه" افزایش می‌یابد و این موضوع از مطلوبیت جواب می‌کاهد. نوجوان و غضنفری برای اجتناب از این وضعیت، مسئله FMCKP را به صورت دو هدفه فرموله کرده‌اند که در آن تابع هدف اول همان حداکثر کردن سود حاصل از ترکیب بوده و تابع هدف دوم نیز حداقل کردن مجموع قدر مطلق اختلاف بین مجموع وابستگی اشیاء انتخاب شده در ترکیب و مقدار وابستگی ایده‌آل (مقدار یک) در هر گروه می‌باشد. تابع هدف دوم این مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_2=\sum_{j=1}^{k}\left|\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}\,.\,x_i\right)-1\right| \qquad j=1,\dots,k \tag{۶}$$

آنها برای حذف رابطه قدر مطلق در تابع هدف از روش تغییر متغیر استفاده کرده و با اضافه کردن چند متغیر و محدودیت به مدل اصلی، مسئله FMCKP را به صورت زیر فرموله کرده‌اند:

$$\begin{aligned} &\max \quad Z_1=\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \\ &\min \quad Z_2=\sum_{j=1}^{k}\left[2\,.\,y_j-\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}\,.\,x_i\right)-1\right] \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \le W \\ &\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}\,.\,x_i\right)-1 \le t_j.M \qquad j=1,\dots,k \\ &\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}\,.\,x_i\right)-1-y_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,k \\ &\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}\,.\,x_i\right)-1-y_j \le (1-t_j).M \qquad j=1,\dots,k \\ &y_j \le t_j.M \qquad j=1,\dots,k \\ &\sum_{i\in U_j^1} x_i \le 1 \qquad j=1,\dots,k \\ &\sum_{i\in U_j^\alpha} x_i \ge 1 \qquad j=1,\dots,k \\ &x_i\in\{0,1\},\ t_j\in\{0,1\},\ y_j\ge 0 \quad i=1,\dots,n,\ \ j=1,\dots,k \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن M یک عدد خیلی بزرگ بوده و t_j نیز یک متغیر دودوئی می‌باشد.

نوجوان و غضنفری این مدل را مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی دو هدفه (BO-FMCKP) نامیده و با استفاده از روش برنامه‌ریزی ریاضی فازی (FLP) آنرا به صورت تک هدفه تبدیل و حل نموده‌اند.

۳. توسعه مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰

در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ (MCKP) فرض می‌شود که هر شیئ دقیقاً به یک گروه تعلق داشته و به هیچ گروه دیگری تعلق ندارد. این وضعیت را می‌توان با استفاده از مجموعه‌های فازی به این صورت تشریح نمود که در مسئله MCKP درجه عضویت هر شیئ فقط در یک گروه برابر یک و در سایر گروهها برابر صفر می‌باشد. در این حالت داریم:

$$\mu_{ij}=\begin{cases}1 & x_i\in U_j\\ 0 & x_i\notin U_j\end{cases}\qquad (۸)$$

با توجه به تعبیر فوق، می‌توان با بازنویسی محدودیت انتخاب دقیقاً یک شیئ از هر گروه، مسئله MCKP را به صورت زیر فرموله نمود:

$$\begin{aligned}&\max\quad Z=\sum_{i=1}^{n}p_i\,x_i\\&\sum_{i=1}^{n}w_i\,x_i\le W\\&\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}.x_i=1\qquad j=1,\dots,k\\&x_i\in\{0,1\}\qquad i=1,\dots.n\end{aligned}\qquad (۹)$$

۳-۱. مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی

با توجه به تعبیر فازی وابستگی اشیاء به گروههای مختلف در مسئله MCKP (مدل ۹) و در صورتیکه فرض شود وابستگی اشیاء مختلف به گروه j با مجموعه فازی $\tilde{U}_j$ (رابطه ۲) نشان داده می‌شود که در آن هر شیئ به گروههای مختلف با درجات عضویت متفاوت وابستگی دارد، می‌توان مسئله MCKP با درجات عضویت فازی را به صورت زیر فرموله نمود:

$$\begin{aligned}&\max\quad Z=\sum_{i=1}^{n}p_i\,x_i\\&\sum_{i=1}^{n}w_i\,x_i\le W\\&\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}\,x_i\cong 1\qquad j=1,\dots,k\\&x_i\in\{0,1\}\qquad i=1,\dots.n\end{aligned}\qquad (۱۰)$$

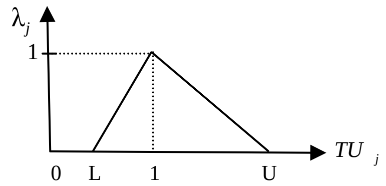
در مدل فوق، علامت تساوی در محدودیتهای مربوط به انتخاب اشیاء در گروههای مختلف به صورت فازی نشان داده شده است و نشان دهنده آن است که مجموع درجات عضویت اشیاء ترکیب در هر گروه باید "**تقریباً مساوی یک**" باشد.

ما این مسئله را مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی (FCMCKP) نامیده‌ایم و با توجه به اینکه در این مسئله تعدادی از محدودیتها به صورت فازی می‌باشند، برای مدلسازی آن از روش برنامه‌ریزی خطی فازی غیرمتقارن پیشنهاد شده توسط ورنرز، استفاده کرده‌ایم[۱۹].

در روش برنامه‌ریزی خطی فازی غیرمتقارن باید ابتدا تابع درجه عضویت محدودیتهای فازی به صورت زیر مشخص گردد:

$$\lambda_j=\begin{cases}0 & TU_j<L\\ \dfrac{TU_j-L}{1-L} & L\le TU_j<1\qquad j=1,\dots,k\\ \dfrac{U-TU_j}{U-1} & 1\le TU_j<U\\ 0 & U\le TU_j\end{cases}\qquad (۱۱)$$

که در آن TU_j مجموع درجات عضویت اشیاء ترکیب در گروه j ($TU_j=\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}.x_i$) می‌باشد. همچنین λ_j تابع درجه عضویت محدودیت فازی در گروه j ام و U و L نیز به ترتیب حداکثر وحداقل میزان تجاوز مجاز برای مجموع درجات عضویت در هر گروه از مقدار ایده‌آل یک می‌باشد. مقادیر U و L توسط تصمیم‌گیر مشخص می‌شوند. شکل ۱ تابع درجه عضویت برای محدودیت فازی j ام را نشان می‌دهد.

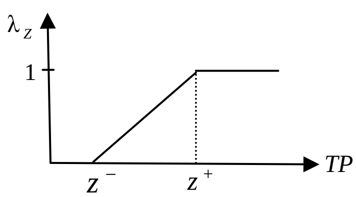


شکل ۱. تابع درجه عضویت محدودیت فازی j ام

همچنین تابع درجه عضویت برای هدف حداکثر کردن سود حاصل از ترکیب نیز به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\lambda_Z=\begin{cases}1 & TP\ge z^+\\ \dfrac{TP-z^-}{z^+-z^-} & z^-<TP<z^+\\ 0 & TP\le z^-\end{cases}\qquad (۱۲)$$

که در آن که در آن TP مجموع سود حاصل از ترکیب ($TP=\sum_{i=1}^{n}p_i.x_i$)، λ_Z تابع درجه عضویت برای هدف حداکثر کردن سود و z^+ و z^- نیز به ترتیب مقادیر مطلوب و نامطلوب (ایده‌آل و ضد ایده‌آل) تابع هدف می‌باشند. شکل ۲ تابع درجه عضویت هدف حداکثر کردن سود را نشان می‌دهد.



شکل ۲. تابع درجه عضویت هدف حداکثر کردن سود

با استفاده از قاعده حداکثر کردن حداقل درجات عضویت، می‌توان تابع درجات عضویت محدودیتهای فازی و تابع هدف را به صورت زیر با هم ادغام نمود:

$$\max\{\lambda = \min\ (\lambda_1,...,\lambda_k,\lambda_Z)\} = \max\{\lambda \mid \lambda \le \lambda_1,...,\lambda \le \lambda_k, \lambda \le \lambda_Z\} \quad (۱۳)$$

در این حالت مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی (FCMCKP) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max\ \ \lambda \\
&\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le W \\
&\lambda(z^+ - z^-) - (\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \le -z^- \\
&\lambda(U-1) + (\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}.x_i) \le U \qquad j=1,...,k \\
&\lambda(1-L) - (\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}.x_i) \le -L \qquad j=1,...,k \\
&\lambda \le 1 \\
&x_i \in \{0,1\},\ \lambda \ge 0 \qquad i=1,....n
\end{aligned} \quad (۱۴)$$

در مسئله FCMCKP توجه به نکات زیر ضروری است:

الف) اگر درجات عضویت یک شیئ به گونه‌ای داده شود که درجه عضویت در یک گروه برابر یک و در سایر گروهها برابر صفر باشد و U و L نیز برابر یک در نظر گرفته شوند، مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی با محدودیت فازی (FCMCKP) به مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ (MCKP) تبدیل می‌شود.

ب) در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی، ممکن است تعداد اشیاء در یک ترکیب کمتر یا بیشتر از تعداد گروهها (k) باشد. با توجه به موضوع فوق می‌توان گفت که فضای جواب مسئله FCMCKP بزرگتر از فضای جواب مسئله MCKP و FMCKP بوده و در نتیجه ممکن است با استفاده از مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی با محدودیت فازی جواب بهتری برای مسئله بدست آید.

ج) برای حل مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی می‌توان از رویکردهایی چون شاخه و کرانه، برنامه‌ریزی پویا و یا الگوریتمهای فراابتکاری استفاده کرد.

۲-۳. مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی و وابستگی کافی اشیاء

در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی (FCMCKP) ممکن است مجموع درجات عضویت در یک گروه نزدیک به یک باشد، اما همه اشیاء موجود در ترکیب انتخابی با درجات عضویت کوچکی به آن گروه وابستگی داشته باشند. برای جلوگیری از این وضعیت می‌توان از محدودیتهای رابطه ۳ پیشنهاد شده توسط نوجوان و غضنفری استفاده کرد[۲۰]. این محدودیتها تضمین می‌کنند که در ترکیب انتخابی هر گروه حداقل دارای یک شیئ با وابستگی کافی باشد. با اضافه کردن این محدودیتها، مسئله FCMCKP به صورت زیر مدلسازی می‌شود:

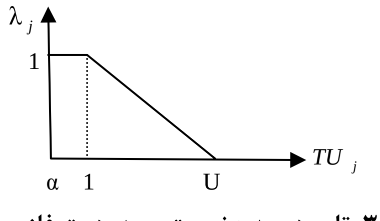
$$\begin{aligned}
&\max\ \ Z = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \\
&\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \le W \\
&\sum_{i \in U_j^1} x_i \le 1 \qquad j=1,..., k \\
&\sum_{i \in U_j^\alpha} x_i \ge 1 \qquad j=1,..., k \\
&\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} x_i \cong 1 \qquad j=1,..., k \\
&x_i \in \{0,1\} \qquad i=1,....n
\end{aligned} \quad (۱۵)$$

ما این مسئله را مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی و وابستگی کافی اشیاء (EFCMCKP) نامیده‌ایم.

مسئله EFCMCKP نیز باید با استفاده از روش برنامه‌ریزی ریاضی فازی (FLP) فرموله شود، اما چون در این مدل، با انتخاب هر ترکیب، هر گروه دارای حداقل یک نماینده با درجه عضویت α یا بیشتر می‌باشد و انتخاب این شیئ از نظر تصمیم‌گیر مطلوبیت کامل دارد، باید تابع درجه عضویت محدودیتهای فازی به صورت زیر اصلاح گردند:

$$\lambda_j = \begin{cases} 1 & TU_j < 1 \\ \dfrac{U - TU_j}{U-1} & 1 \le TU_j < U \qquad j=1,...,k \\ 0 & U \le TU_j \end{cases} \quad (۱۶)$$

شکل ۳ تابع درجه عضویت برای محدودیت فازی jام را در این مدل نشان می‌دهد.



شکل ۳. تابع درجه عضویت محدودیت فازی jام

با توجه به تابع درجه عضویت محدودیتهای فازی و با استفاده از روش برنامه‌ریزی ریاضی فازی غیر متقارن، مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی و وابستگی کافی اشیاء به صورت زیر مدلسازی می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\max \ \lambda \\
&\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le W \\
&\lambda(z^+ - z^-) - (\sum_{i=1}^{n} p_i . x_i) \le -z^- \\
&\lambda(U-1) + (\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} . x_i) \le U && j=1,\dots,k \\
&\lambda \le 1 \\
&\sum_{i \in U_j^1} x_i \le 1 && j=1,\dots,k \\
&\sum_{i \in U_j^{\alpha}} x_i \ge 1 && j=1,\dots,k \\
&x_i \in \{0,1\},\ \lambda \ge 0 && i=1,\dots n
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

برای حل مسئله EFCMCKP نیز می‌توان رویکردهایی چون شاخه و کرانه، برنامه‌ریزی پویا و یا الگوریتمهای فراابتکاری‌را بکار برد.

۴. مقایسه مدلها

برای مقایسه مدلهای پیشنهاد شده در این مقاله (FCMCKP و EFCMCKP) و مدلهای اولیه پیشنهاد شده توسط نوجوان و غضنفری (FMCKP و BO-FMCKP) یک مثال نمونه با این مدلها حل و نتایج آنها با هم مقایسه شده است.

در این مثال باید از میان ده پروژه مختلف که سرمایه و سود مورد نیاز هر یک از آنها در جدول ۱ نشان داده شده است، باید تعدادی انتخاب شوند. این پروژه‌ها به چهار گروه مختلف تقسیم شده و درجه وابستگی هر پروژه به این گروهها در جدول ۲ نشان داده شده است. بودجه در دسترس نیز محدود به مقدار مشخص B می‌باشد.

جدول ۱. سرمایه مورد نیاز و سود پروژه‌ها

شماره پروژه	سود پروژه	سرمایه مورد نیاز
۱	۶۰۰	۲۰
۲	۳۰۰	۵
۳	۱۸۰۰	۱۰۰
۴	۳۸۰۰	۲۰۰
۵	۵۰	۲
۶	۲۰۰	۴
۷	۹۰۰	۶۰
۸	۳۲۰۰	۱۵۰
۹	۲۴۰۰	۸۰
۱۰	۳۰۰	۴۰

جدول ۲. درجات عضویت پروژه‌ها در گروههای مختلف

پروژه / گروه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۱	۱	۰/۵	۰	۰	۰	۰	۰/۱	۰	۰
۲	۰/۸	۰/۱	۱	۱	۰	۰/۱	۰/۵	۰/۵	۰	۰
۳	۰	۰/۵	۰/۸	۰/۵	۱	۱	۱	۰/۱	۰/۸	۰/۵
۴	۰	۰	۰	۱	۰/۱	۰/۵	۰	۱	۱	۰/۵

برای حل این مسئله از نرم‌افزار Lingo و روش شاخه و کرانه استفاده شده و مسئله با مقادیر مختلف بودجه در دسترس (۱۰۰≤ B ≤ ۵۰۰) حل شده است. همچنین در حل مسئله ، مقادیر α =۰/۸، L=۰/۵ و U =۲/۵ در نظر گرفته شده است.

جدول ۳ نتایج حل این مسئله را در سه حالت، کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ (MCKP)، کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ (FMCKP) و کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی (FCMCKP) نشان می‌دهد.

جدول ۳. نتایج حل مثال در مدلهای MCKP، FMCKP و FCMCKP

شماره مسئله	مقدار بودجه	پروژه‌های انتخاب شده در ترکیب			سود ترکیب			مجموع انحراف از وابستگی ایده‌آل		
		MCKP	FMCKP	FCMCKP	MCKP	FMCKP	FCMCKP	MCKP	FMCKP	FCMCKP
۱	۱۰۰	-	{۱،۵،۷}	{۹،۱}	-	۱۵۵۰	۳۰۰۰	-	۲/۳	۱/۱
۲	۱۵۰	{۵،۶،۳،۱}	{۱،۶،۹}	{۹،۶،۷،۲}	۲۶۵۰	۳۲۰۰	۳۸۰۰	۳/۵	۱/۳	۲
۳	۲۰۰	{۹،۶،۳،۲}	{۹،۶،۳،۲}	{۱،۳،۹}	۴۷۰۰	۴۷۰۰	۴۸۰۰	۱/۴	۱/۴	۱/۹
۴	۲۵۰	{۹،۷،۳،۲}	{۱،۸،۹}	{۱،۸،۹}	۵۴۰۰	۶۲۰۰	۶۲۰۰	۲/۲	۱/۵	۱/۵
۵	۳۰۰	{۹،۶،۴،۳}	{۱،۴،۹}	{۱،۴،۹}	۶۷۰۰	۶۸۰۰	۶۸۰۰	۱/۷	۱/۲	۱/۷
۶	۳۵۰	{۹،۸،۳،۱}	{۹،۸،۳،۱}	{۹،۸،۳،۱}	۸۰۰۰	۸۰۰۰	۸۰۰۰	۳/۵	۳/۵	۳/۵
۷	۴۰۰	{۹،۸،۳،۱}	{۹،۸،۳،۱}	{۹،۸،۷،۳،۲}	۸۰۰۰	۸۰۰۰	۸۶۰۰	۳/۵	۳/۵	۳/۸
۸	۴۵۰	{۹،۸،۴،۱}	{۹،۸،۴،۱}	{۹،۸،۴،۱}	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۳/۳	۳/۳	۳/۳
۹	۵۰۰	{۹،۸،۴،۱}	{۹،۸،۴،۱}	{۹،۸،۴،۲،۱}	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۳۰۰	۳/۳	۳/۳	۵/۴

جدول ۴. نتایج حل مثال در مدلهای FCMCKP و EFCMCKP

شماره مسئله	مقدار بودجه	پروژه‌های انتخاب شده در ترکیب		سود ترکیب		مقدار کلی انحراف از وابستگی ایده‌آل در ترکیب	
		BO-FCMCKP	EFCMCKP	BO-FCMCKP	EFCMCKP	BO-FCMCKP	EFCMCKP
۱	۱۰۰	{۱،۵،۷}	{۱،۵،۷}	۱۵۵۰	۱۵۵۰	۲/۳	۲/۳
۲	۱۵۰	{۱،۶،۹}	{۱،۶،۹}	۳۲۰۰	۳۲۰۰	۱/۳	۱/۳
۳	۲۰۰	{۹،۶،۳،۲}	{۹،۶،۳،۲}	۴۷۰۰	۴۷۰۰	۱/۴	۱/۴
۴	۲۵۰	{۹،۸،۱}	{۹،۸،۱}	۶۲۰۰	۶۲۰۰	۱/۵	۱/۵
۵	۳۰۰	{۹،۴،۲}	{۹،۴،۲}	۶۵۰۰	۶۵۰۰	۰/۲	۰/۲
۶	۳۵۰	{۹،۴،۲}	{۹،۴،۲}	۶۵۰۰	۶۵۰۰	۰/۲	۰/۲
۷	۴۰۰	{۹،۴،۲}	{۹،۴،۲}	۶۵۰۰	۶۵۰۰	۰/۲	۰/۲
۸	۴۵۰	{۹،۴،۲}	{۹،۴،۲}	۶۵۰۰	۶۵۰۰	۰/۲	۰/۲
۹	۵۰۰	{۲،۹،۴}	{۹،۴،۲}	۶۵۰۰	۶۵۰۰	۰/۲	۰/۲

با توجه به جدول ۳ مشخص است که در بعضی از مقادیر بودجه مدل FCMCKP جوابهای بهتری از مدل FMCKP بدست آورده است و از اینرو اگر لزوم وجود اشیائی با درجه عضویت کافی در یک گروه وجود نداشته باشد، مدل FCMCKP بر مدل FMCKP برتری دارد.

جدول ۴ نیز نتایج حل مثال را در دو حالت کوله‌پشتی چند انتخابی فازی دو هدفه ۱-۰ (BO-FMCKP) و کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ با محدودیت فازی و وابستگی کافی اشیاء (EFCMCKP) نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۴ مشخص است که اگر چه جوابهای این دو مدل در همه مقادیر بودجه مشابه است، اما با توجه به اینکه تعداد متغیرها و محدودیتهای مدل EFMCKP از مدل BO-FMCKP بسیار کمتر است، حل مدل EFCMCKP راحتتر می‌باشد. در حالت کلی مدل EFMCKP نسبت به مدل BO-FMCKP تعداد k متغیر دودوئی، k متغیر پیوسته و ۴k محدودیت کمتر دارد که در آن k تعداد گروهها می‌باشد.

۶. نتیجه‌گیری

در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ فرض می‌شود که هر شیئ دقیقاً به یک گروه تعلق دارد، اما در کاربردهای عملی ممکن است این فرض صادق نباشد و از اینرو در حالت فازی، درجه وابستگی هر شیئ به گروههای مختلف با استفاده از مجموعه‌های فازی مشخص می‌شود. در این مقاله رویکرد جدیدی برای توسعه مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی فازی ۱-۰ پیشنهاد و دو مدل کارا برای مدلسازی این مسئله معرفی شده است. اولین مدل با فازی کردن محدودیتهای انتخاب اشیاء در مسئله کوله‌پشتی چند انتخابی ۱-۰ بدست آمده است. همچنین با توسعه مدل اول به صورتی که وابستگی کافی در اشیاء انتخاب شده در ترکیب وجود داشته باشد، مدل دوم توسعه داده شده است. مقایسه مدلهای پیشنهاد شده در این مقاله و دو مدل اولیه نشان می‌دهد که اولین مدل پیشنهادی فضای جواب بزرگتری داشته و می‌تواند در شرایط خاصی جوابهای بهینه بهتری از مدل اولیه تولید کند. همچنین دومین مدل پیشنهاد شده نیز با تعداد متغیر و محدودیتهای کمتر می‌تواند جوابهای مشابه با مدل اولیه بدست آورد و چون ابعاد مسائل واقعی عموماً بزرگ است، استفاده از این مدل بر مدل اولیه برتری دارد.

مراجع

[1] Martello, S., & Toth, P., “*Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*”, Wiley-Inter science series in discrete mathematics and optimization, John-Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1990.

[2] Ibaraki, T., Hasegawa, T., Teranaka, K., & Iwase, J., *"The Multiple-Choice Knapsack Problem"*, Journal of Operations Research Society of Japan, No. 21, 1978, PP. 59-95.

[3] Sinha, P., & Zoltners, A.A., *"The Multiple-Choice Knapsack Problem"*, Operations Research, No. 27, 1979, PP. 503-515.

[4] Pisinger, D., *Algorithms For Knapsack Problems*, Ph.D. thesis, University of Copenhagen, 1995.

[5] Dudzinski, K., *"A Dynamic Programming Approach to Solving The Multiple Choice Knapsack Problem"*, Bull. Polish Acad. Sci., Tech. Sci., No. 32, 1984, PP. 325-332.

[6] Dyer, M.E., Kayal, N.,& Walker, J., *"A Branch and Bound Algorithm For Solving The Multiple Choice Knapsack Problem"*, Journal of Computational and Applied Mathematics, No. 11, 1984, PP. 231-249.

[7] Dyer, M.E., Riha, W.O., & Walker, J., *"A Hybrid Dynamic Programming/Branch and Bound Algorithm For The Multiple-Choice Knapsack Problem"*, Journal of Computational and Applied Mathematics, No. 58, 1995, PP. 43-54.

[8] Gens, G., & Levner, E., *"An Approximate Binary Search Algorithm For The Multiple Choice Knapsack Problem"*, Inform. Process. Letter, No. 67, 1998, PP. 261-265.

[9] Pisinger, D., *"A Minimal Algorithm For The Multiple Choice Knapsack Problem"*, European Journal of Operational Research, No. 83, 1995, PP. 394-410.

[10] Xue, J., & Ji, P., *"Process Tolerance Allocation in Angular Tolerance Charting"*, International Journal of Production Research, Vol. 42, No. 18, 2004, PP. 3929-3945.

[11] Kleywegt, A., & Papastavrou, J., *"The Dynamic and Stochastic Knapsack Problem"*, Operations Research, No. 46, 1998, PP. 17-35.

[12] Ross, K.W., & Tsang, D.H.K., *"The Stochastic Knapsack Problem"*, IEEE Transactions on Communications, No. 37, 1989, pp. 740-747.

[13] Cohn, A.M., *"The Stochastic Knapsack Problem With Random Weights: A Heuristic Approach to Robust transportation planning"*, Operations Research Center, Working paper, MIT, Cambridge, Massachusetts, 2000.

[14] Abbond N.J., Sakawa, M., & Inuiguchi, M.,*"A Fuzzy Programming Approach to Multi Objective Multi Dimensional 0-1 Knapsack Problems"*, Fuzzy Sets and Systems, No. 86, 1997, PP.1-14.

[15] Sakawa, M., Kato, K., & Shibano, T., *"Fuzzy Programming For Multi-Objectives 0-1 Programming Problem Through Revised Genetic Algorithms"*, European Journal of Operational Research, No. 97, 1998, PP.149-158.

[16] Okada, S., & Gen, M., *"Fuzzy Multiple Choice Knapsack Problem"*, Fuzzy Sets and Systems, No. 67, 1994, PP. 71-80.

[17] Okada, S., & Gen, M., *"A Method For Solving Fuzzy Multi-Dimensional 0-1 Knapsack Problems"*, Japanese Journal Fuzzy Theory Systems, No. 6, 1995, PP. 687-702.

[18] Lin, F.T., & Yao, J.S., *"Using Fuzzy Numbers in Knapsack Problems"*, European Journal of Operational Research, No. 135, 2001, PP. 158-176.

[19] Zimmermann, H.J., *"Fuzzy Set Theory And its Applications"*, Kluwer Academic Publishers, 3rd ed., 1996, PP. 295-299.

[۲۰] نوجوان، مجید.، و غضنفری، مهدی.، *"توسعه مسئله کوله پشتی چند انتخابی ۱-۰ با استفاده از مجموعه‌های فازی"*، مجله علمی پژوهشی علوم مهندسی، دانشگاه علم و صنعت، جلد ۱۵، شماره ۳، تابستان ۱۳۸۳.