



## Calculating the Mean Project Completion Time in Dynamic PERT Networks (Multi-Project System) with Finite Capacity

S. Noori\* & S. Yaghoubi

*Siamak Noori*, Associate professor, Department of Industrial Engineering, Iran University of Science & Technology, [snoori@iust.ac.ir](mailto:snoori@iust.ac.ir)  
*Saeed Yaghoubi*, PhD, Department of Industrial Engineering, Iran University of Science & Technology, [yaghoubi@iust.ac.ir](mailto:yaghoubi@iust.ac.ir)

### Keywords

Project management,  
Network of queue,  
Markov Processes

### ABSTRACT

*In this paper, dynamic PERT networks with finite capacity of concurrent projects are expressed in the framework of networks of queues. In this investigation, it is assumed that the system capacity is finite and new projects are generated according to a Poisson process. There is only one server in every service station and the discipline of queue is FCFS (Fist Come, First Served). Each activity is performed independently in its corresponding service station with exponential distribution. For calculating the mean project completion time in dynamic PERT network with finite capacity, we first convert the network of queues into a stochastic network. Then, by constructing a proper finite-state continuous-time Markov model, a system of differential equations is created to solve and find the manufacturing lead time distribution for any particular work, analytically. Finally, by using Little's Theorem the mean project completion time is obtained.*

© 2013 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 24, No. 3, All Rights Reserved

\* **Corresponding author. Siamak Noori**  
**Email:** [snoori@iust.ac.ir](mailto:snoori@iust.ac.ir)

## به دست آوردن میانگین زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت پویا (سیستم چند پروژه‌ای) با ظرفیت محدود

سیامک نوری\* و سعید یعقوبی

### کلمات کلیدی

مدیریت پروژه، شبکه صف،  
فرآیندهای مارکوفی

### چکیده:

در این نوشتار، شبکه‌های پرت پویا با ظرفیت محدود در اجرای هم‌زمان پروژه‌ها در چارچوب شبکه‌صف بیان شده‌است. در این پژوهش، فرض شده‌است که ظرفیت سیستم برای اجرای هم‌زمان پروژه‌ها محدود می‌باشد و نیز پروژه‌های ورودی کاملاً مشابه بوده و طبق فرآیند پواسون وارد سازمان می‌شوند. در هر ایستگاه کاری فقط یک خدمت‌دهنده مستقر بوده و نیز نظم حاکم بر صف‌ها، اولین ورودی، اولین سرویس (FCFS) می‌باشد. هر فعالیت به طور مستقل و با توزیع نمایی در ایستگاه کاری متناظر خود اجراء می‌شود. برای به دست آوردن میانگین زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت پویا با ظرفیت محدود، ابتدا شبکه‌صف را به شبکه احتمالی تبدیل نموده و سپس با ایجاد یک مدل مارکوفی مناسب که دارای حالات محدود و زمان پیوسته می‌باشد، معادله دیفرانسیلی سیستم تشکیل می‌گردد. در نهایت با بهره‌گیری از قانون لیتل، میانگین زمان تکمیل پروژه به دست می‌آید.

### ۱. مقدمه

عموماً مدیریت پروژه سنتی بر روی مسائل برنامه‌ریزی تک پروژه‌ای متمرکز می‌شود، در حالی که ۹۰٪ سازمان‌ها، چندین پروژه را به طور هم‌زمان مدیریت می‌نمایند [۱]. در چنین شرایطی، سازمان‌ها برای بهره‌برداری هر چه بیشتر از منابع، آنها را در بین پروژه‌ها به اشتراک گذاشته که این امر، برنامه‌ریزی پروژه‌ها را پیچیده و دشوار می‌سازد. در نتیجه امروزه مدیریت چندپروژه‌ای<sup>۲</sup> یک دیدگاه ضروری و حیاتی در اکثر سازمان‌ها، بلاخص سازمان‌های پروژه‌محور می‌باشد.

به طور کلی مسئله برنامه‌ریزی چندپروژه‌ای<sup>۳</sup> با در نظر گرفتن پروژه‌ها به عنوان اجزاء مستقل و به کار بردن یک یا چندین تابع هدف که شامل همه آنها باشد و یا به وسیله اضافه نمودن فعالیت‌های مجازی ابتدایی و انتهایی، و در نظر گرفتن هر پروژه

تاریخ وصول: ۹۰/۶/۹

تاریخ تصویب: ۹۱/۲/۱۷

\*نویسنده مسئول مقاله: دکتر سیامک نوری، دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، [snoori@iust.ac.ir](mailto:snoori@iust.ac.ir)  
دکتر سعید یعقوبی، استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، [yaghoubi@iust.ac.ir](mailto:yaghoubi@iust.ac.ir)

به عنوان یک زیرپروژه و ایجاد یک پروژه بزرگ، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. [۲]، [۳]، [۴] و [۵] جزو اولین مطالعاتی بودند که مسئله برنامه‌ریزی چندپروژه‌ای را مورد بررسی قرار دادند. مسئله برنامه‌ریزی چندپروژه‌ای با استفاده از برنامه‌ریزی صفر و یک [۶]، و نیز روش‌های چندمعیاره [۷] مورد مطالعه قرار گرفته‌است. همچنین روش‌های فرآبتکاری و ابتکاری کاربرد زیادی در حل مسائل برنامه‌ریزی چندپروژه‌ای دارند که در این زمینه می‌توان به مطالعات [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲] و [۱۳] اشاره کرد.

در حین اجرای پروژه، فعالیت‌های پروژه در معرض عدم قطعیت<sup>۴</sup> و بی‌ثباتی قابل توجهی قرار دارند که ممکن است منجر به اختلالات فراوان در برنامه‌ریزی شود. این عدم قطعیت ممکن است از برخی منابع احتمالی نشأت بگیرد که عبارتند از: تغییر محسوس زمان فعالیت‌ها نسبت به برآورد انجام شده، در دسترس نبودن منابع به مقدار لازم، عدم پیش بینی دقیق در خصوص فعالیت‌ها و منابع، تغییر نمودن موعد تحویل پروژه، اعمال تغییرات در شبکه پروژه (شامل: اضافه نمودن فعالیت جدید، حذف کردن یک یا چندین فعالیت و اعمال تغییرات در پیش‌نیازها)، وقوع وقایع غیر مترقبه و غیره [۱۴].

<sup>4</sup> Uncertainty

<sup>2</sup> Multi-project management

<sup>3</sup> Multi-project scheduling problem

[۱۹] مساله تخصیص منابع چندین پروژه‌ای را به‌عنوان یک سیستم صف چندکاناله در نظر گرفته و از شبیه‌سازی برای به‌دست آوردن متغیرهایی همچون سطح منبع، میانگین استفاده از منبع و میانگین زمان انجام پروژه‌ها، استفاده نمودند. ولی آنها محیط پویایی که منجر به ایجاد پروژه‌های جدید در گذر زمان شود، مدنظر قرار ندادند.

از طرف دیگر، آذرون و مدرس [۲۰] با استفاده از یک روش تحلیلی، تابع توزیع زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا را مورد مطالعه قرار دادند. آنها فرض کردند که پروژه‌ها با توزیع پواسون وارد سیستم شده و توزیع زمان انجام فعالیت‌ها نمایی می‌باشد. همچنین مولفان فرض کردند که در هر ایستگاه‌کاری یک و یا بی‌نهایت خدمت‌دهنده مستقر بوده و نیز ظرفیت سیستم نامحدود است.

همچنین، آذرون و همکاران [۲۱] تابع توزیع طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های صف را که قابل استفاده در شبکه‌های پرت‌پویا می‌باشد، مورد مطالعه قرار دادند و نیز آذرون و فاطمی‌قمی [۲۲] یک حد پایین برای میانگین زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا ارائه نمودند. همچنین، آذرون و توکلی‌مقدم [۲۳] و یعقوبی و همکاران [۲۴]، یک مدل برنامه‌ریزی احتمالی به کمک فرآیند مارکوفی برای مسئله تخصیص منابع در شبکه‌های پرت‌پویا ارائه نمودند. اخیراً هم آذرون و همکاران [۲۵] بر روی تخصیص موعد مقرر تحویل پروژه‌ها در شبکه‌های پرت‌پویا متمرکز شده و یک الگوریتم برای محاسبه آن ارائه کرده‌اند. لازم به‌ذکر است که در مقالات ذکر شده که همگی از یک روش تحلیلی برای مدل‌نمودن شبکه‌های پرت‌پویا استفاده می‌نمایند، فرض بر این است که محدودیتی در انجام هم‌زمان پروژه‌ها نبوده و ظرفیت سیستم نامحدود است.

علیرغم اینکه مطالعات کمی درخصوص زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا و نیز طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های صف انجام شده، ولی تحقیقات متعددی درخصوص طولانی‌ترین مسیر یا زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های احتمالی صورت پذیرفته‌است، به‌طوری که برخی از این مطالعات، این مقوله را به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. آدلاخا و کالکارنی [۲۶] یک دسته‌بندی خوبی بر روی شبکه‌های احتمالی انجام دادند.

چارنس و همکاران [۲۷] با فرض نمایی بودن فعالیت‌ها یک برنامه‌ریزی تصادفی برای شبکه‌های احتمالی ارائه‌نمودند. همچنین، یک روش سیستماتیک برای محاسبه طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های احتمالی با استفاده از کاهش‌دادن شبکه به فعالیت‌های سری-موازی در [۲۸] و نیز یک برنامه‌ریزی پویا برای مسئله مذکور در [۲۹] ارائه شده‌است. کالکارنی و آدلاخا [۳۰] با فرض نمایی بودن فعالیت‌ها شبکه پرت را به یک زنجیره مارکوفی

در بسیاری از سازمان‌ها، علاوه‌بر مواجهه با عدم‌قطعیت در انجام فعالیت‌ها ممکن است که پروژه‌ها در زمانهای مشخص و از پیش تعیین‌شده، وارد سازمان نشده و به‌صورت پویا و احتمالی، درگذر زمان وارد سازمان شوند، که این امر، برنامه‌ریزی پروژه را پیچیده‌تر و دشوارتر از پیش می‌نماید. این نوع مسائل که علاوه‌بر احتمالی بودن فعالیت‌ها، ورود پروژه‌ها نیز احتمالی بوده و پروژه‌ها در یک محیط پویا وارد سازمان می‌شوند، شبکه‌های پرت‌پویا<sup>۱</sup> نام‌گذاری شده‌اند.

آدلر و همکاران [۱۵] برای فائق‌آمدن به مسائل شبکه‌های پرت‌پویا، دیدگاه فرآیندی را ارائه‌نموده و با استفاده از شبیه‌سازی زمان تکمیل پروژه را مورد مطالعه قرار دادند. در این دیدگاه سازمان به‌صورت یک شبکه پردازشی احتمالی<sup>۲</sup> درنظر گرفته می‌شود که دارای ایستگاه‌های کاری می‌باشد. پروژه‌ها به‌طور مستمر وارد سازمان شده و ایستگاه‌های کاری نیز در حال خدمت دادن به پروژه‌ها با یک نظم از پیش تعیین شده می‌باشند. در نتیجه سازمان با یک شبکه‌صف روبرو می‌باشد که پروژه‌ها برای دریافت خدمت به ایستگاه‌های کاری مراجعه می‌کنند.

در این دیدگاه فرآیندی، پروژه‌ها به‌صورت انفرادی با ملزومات و منابع مختص به‌خود، درنظر گرفته نشده، بلکه به‌صورت یک سیستم یکپارچه‌ای که پروژه‌ها جهت دریافت خدمت، به‌طور مستمر وارد سازمان شده و منابع مشترکاً در اختیار تمامی پروژه‌ها قرار می‌گیرد، تلقی می‌شوند. در این نوع سیستم، پروژه‌ها پس از طی ایستگاه‌های کاری براساس شبکه پیش‌نیازی خود، تکمیل شده و آماده تحویل به کارفرمای خود می‌باشند، به‌طوری که زمان تکمیل پروژه معادل طولانی‌ترین مسیر شبکه‌صف خواهد بود.

در دنیای واقعی به‌دلیل وجود محدودیت‌هایی در سیستم، معمولاً امکان اجرای هم‌زمان پروژه‌ها از یک تعداد مشخصی بیشتر وجود ندارد. با توجه‌به وجود این نوع محدودیت در سازمان‌ها، اناوی ایساکو و گلانی [۱۶] شبکه‌های پرت‌پویا را با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت در پذیرش پروژه‌ها مورد مطالعه قرار دادند. آنها محدودیت سیستم را در تعداد ثابت پروژه‌های در حال پردازش (CONPIP)<sup>۳</sup> و یا در زمان ثابت در حال پردازش (CONTIP)<sup>۴</sup> در نظر گرفته و با استفاده از شبیه‌سازی برای نظم‌های مختلف، زمان تکمیل پروژه را به‌دست آوردند. مسئله تخصیص منابع در شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود نیز با استفاده از روش کراس آنترپوی<sup>۵</sup> که یک روش مبتنی بر شبیه‌سازی می‌باشد مورد مطالعه قرار گرفته‌است [۱۷] و [۱۸]. همچنین فاطمی‌قمی و اشجری

<sup>1</sup> Dynamic PERT networks

<sup>2</sup> Stochastic processing network

<sup>3</sup> Constant Number of Projects In Process (CONPIP)

<sup>4</sup> Constant Time In Process (CONTIP)

<sup>5</sup> Cross Entropy

شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود، ابتدا شبکه‌صف را به شبکه احتمالی تبدیل نموده و با ایجاد یک مدل مارکوفی مناسب که دارای حالات محدود و زمان پیوسته می‌باشد، معادله دیفرانسیلی سیستم تشکیل می‌گردد. سپس با بهره‌گیری از قانون لیتل، میانگین زمان تکمیل پروژه به‌دست می‌آید. موضوع مورد بحث در این مقاله برای سازمان‌های چندپروژه‌ای که دارای محدودیت در اجرای هم‌زمان پروژه‌ها می‌باشند، بسیار مناسب است؛ به طوری که پروژه‌ها علاوه بر مواجهه با عدم قطعیت در انجام فعالیت‌ها، به‌طور پویا و احتمالی، در گذر زمان وارد سازمان می‌شوند. از نمونه‌های بارز این‌گونه پروژه‌ها می‌توان به پروژه‌های تعمیرات نگهداری هواپیما، قطار، مترو و غیره اشاره کرد.

در ادامه مقاله، در بخش ۲ یک مدل مارکوفی با حالات محدود و زمان پیوسته برای شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود ارائه خواهد شد و سپس میانگین زمان تکمیل پروژه در بخش ۳ به‌دست خواهد آمد. در بخش ۴ هم یک مثال عددی بیان شده و در انتها، نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای مطالعات آتی در بخش ۵ ذکر خواهد شد.

## ۲. شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود

در این قسمت یک زنجیره مارکوفی با تعداد حالات محدود و زمان پیوسته برای شبکه پرت‌پویا با ظرفیت محدود که به‌عنوان یک شبکه‌صف در نظر گرفته شده، ارائه می‌شود. در این مقاله فرض شده است که ظرفیت سیستم برای اجرای هم‌زمان پروژه‌ها محدود می‌باشد و نیز پروژه‌های ورودی کاملاً مشابه بوده و طبق فرآیند پواسون با نرخ  $\lambda$  وارد سازمان می‌شوند. همچنین فرض بر این است که در هر ایستگاه‌کاری فقط یک خدمت‌دهنده مستقر بوده و نیز نظم حاکم بر صف‌ها  $FCFS$  می‌باشد. فعالیت‌ها به‌طور مستقل از هم و با توزیع نمایی انجام می‌شوند، به طوری که زمان انجام فعالیت  $a$  در ایستگاه‌کاری  $a$ ، دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\mu$  می‌باشد.

برای مدل نمودن مسئله مذکور، ابتدا شبکه پرت‌پویا، که به‌صورت شبکه فعالیت در گره (AoN) نشان داده می‌شود، به یک شبکه پرت کلاسیک (AOA) تبدیل می‌شود. اگر فرض کنیم گره  $k$  در شبکه پرت‌پویا، دارای کمان‌های ورودی  $b_1, b_2, \dots, b_n$  و کمان‌های خروجی  $d_1, d_2, \dots, d_m$  باشد، در این صورت در شبکه پرت کلاسیک، با کمان  $(k', k'')$  تعویض خواهد شد که  $n$  کمان به گره  $k'$  وارد شده و  $m$  کمان از گره  $k''$  خارج می‌شود.

شبکه پرت کلاسیک (AOA)، را به صورت  $G = (V, A)$  در نظر می‌گیریم که در آن مجموعه  $V$  بیانگر مجموعه گره‌ها و مجموعه  $A$  بیانگر مجموعه فعالیت‌ها خواهد بود. لازم به‌ذکر است که در طول این مقاله واژه‌های فعالیت و کمان معادل بوده و ممکن است

با تعداد حالات محدود و زمان پیوسته که دارای حالت جذب‌کننده‌ای می‌باشد، تبدیل نمود و به‌کمک آن تابع توزیع تکمیل پروژه را محاسبه نمود. لازم به‌ذکر است که در این مقاله، ما نیز برای مدل نمودن شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود، یک زنجیره مارکوفی با تعداد حالات محدود و زمان پیوسته ارائه خواهیم نمود. به‌علت سختی و پیچیدگی در محاسبه توزیع زمان تکمیل پروژه، برخی از مطالعات مانند [۳۱]، [۳۲]، [۳۳] و [۳۴]، تکنیک‌های تقریبی و یا حدپایین برای زمان تکمیل پروژه ارائه کرده و نیز بعضی از تحقیقات مانند [۳۵]، [۳۶] و [۳۷]، بر روی میانگین زمان تکمیل پروژه متمرکز شده‌اند.

لازم به‌ذکر است که به‌سبب وجود محدودیت ظرفیت در بسیاری از سیستم‌های واقعی، شبکه‌صف ظرفیت محدود (FCQN)<sup>۱</sup> مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است، که در این میان می‌توان به پُرس [۳۸] به‌عنوان یکی از محققان پیشرو اشاره کرد. شبکه‌صف ظرفیت محدود در زمینه‌های مختلفی از قبیل: سیستم‌های تولیدی [۳۹]، [۴۰]، معماری نرم افزار [۴۱]، فعالیت‌های بهداشتی [۴۲]، سیستم‌های ارتباط از راه دور [۴۳]، مرکز تلفن [۴۴] و غیره، کاربرد وسیعی دارد.

با توجه به مطالب ذکر شده می‌توان نتیجه گرفت که هیچ روش تحلیلی برای به‌دست آوردن میانگین زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود انجام نشده و مطالعات در این زمینه محدود به انجام شبیه‌سازی می‌باشد. در نتیجه، نوآوری این پژوهش ارائه یک روش تحلیلی به‌کمک زنجیره مارکوفی با تعداد حالات محدود و زمان پیوسته جهت محاسبه میانگین زمان تکمیل پروژه می‌باشد. لازم به‌یادآوری است که در [۲۰] زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا و در [۲۱] طولانی‌ترین مسیر در شبکه‌های صف، بدون در نظر گرفتن محدودیت در ظرفیت سیستم‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است، که با توجه به محدود بودن بیشتر سیستم‌ها و عدم امکان اجرای هم‌زمان پروژه‌ها از یک تعداد مشخصی بیشتر، نامحدود فرض کردن ظرفیت سیستم چندان واقعی به نظر نمی‌رسد.

در این مقاله فرض شده است که ظرفیت سیستم برای اجرای هم‌زمان پروژه‌ها محدود می‌باشد و نیز پروژه‌های ورودی کاملاً مشابه بوده و طبق فرآیند پواسون وارد سازمان می‌شوند. همچنین فرض بر این است که در هر ایستگاه‌کاری فقط یک خدمت‌دهنده مستقر بوده و نیز نظم حاکم بر صف‌ها، اولین ورودی، اولین سرویس (FCFS)<sup>۲</sup> می‌باشد. فعالیت‌ها به‌طور مستقل از هم و با توزیع نمایی در ایستگاه‌کاری متناظر خود انجام می‌شوند. در این مقاله، برای به‌دست آوردن میانگین زمان تکمیل پروژه در

<sup>۱</sup> Finite Capacity Queueing Network (FCQN)

<sup>۲</sup> First Come, First Served (FCFS)

تعریف ۳. اگر فرض کنیم سه تایی مرتب  $(E, F, Q)$ ، زیرمجموعه‌هایی از برش جهتدار یکنواخت  $D$  در شبکه باشد، در این صورت این سه تایی مرتب، سه‌افزازی قابل قبول (Admissible 3-partition) نامیده می‌شود اگر داشته باشیم  $D = E \cup F \cup Q$ ،  $E \cap F = E \cap Q = F \cap Q = \emptyset$  و نیز برای  $a \in F$ ، داشته باشیم:  $I(\beta(a)) \not\subset F$ . یعنی اولاً: سه مجموعه  $E, F, Q$  اجتماع‌شان برابر  $D$  بوده و اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً: برای هر فعالیت متعلق به  $F$ ، در گره انتهایی این فعالیت، حتماً فعالیتی از مجموعه  $E$  هم به این گره ختم شود.

تعریف مذکور بعداً برای تعیین برشهای سه‌افزازی قابل قبول سیستم به کار گرفته خواهد شد. برای روشن‌تر شدن مطلب، مثال ۱ را دوباره در نظر بگیرید که در آن  $(1, 4, 5)$  یک UDC می‌باشد. به‌عنوان مثال این برش می‌تواند به  $E = \{1\}$ ،  $F = \{4\}$  و  $Q = \{5\}$  افزایش شود. در این مورد این سه تایی مرتب یک سه‌افزازی قابل قبول را تشکیل می‌دهند، چون داریم:  $I(\beta(4)) = \{4, 5\} \not\subset F$  ولی اگر فرض کنیم  $E = \{1\}$ ،  $F = \{4, 5\}$  و  $Q = \emptyset$ ، در این صورت این سه تایی مرتب یک برش سه‌افزازی قابل قبول نخواهد بود، زیرا:  $I(\beta(4)) = \{4, 5\} \subset F = \{4, 5\}$

تعریف ۴. در طول اجرای پروژه، در زمان  $t$  هر فعالیتی می‌تواند یکی و فقط یکی از حالات فعال، غیرفعال منتظر، در صف و غیرفعال را به خود اختصاص دهد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

- فعال: به فعالیتی که در زمان  $t$  در حال اجراء شدن باشد، فعالیت «فعال» گویند.
- غیرفعال منتظر: به فعالیتی که در زمان  $t$  پایان پذیرفته ولی حداقل یک فعالیت در  $I(\beta(a))$  هنوز پایان نیافته است، فعالیت «غیرفعال منتظر» گویند. یعنی در زمان  $t$  هیچ فعالیت  $O(\beta(a))$  مجاز به شروع نمی‌باشد.
- در صف: به فعالیتی که در زمان  $t$  تمام پیش‌نیازهای آن انجام شده ولی ایستگاه‌کاری متناظرش در حال خدمت دادن به پروژه دیگری می‌باشد. فعالیت «در صف» گویند.
- غیرفعال: به فعالیتی که در زمان  $t$  هیچ کدام از حالات ذکر شده قبلی را نداشته باشد، یعنی فعال، در صف و غیرفعال منتظر نباشد، «غیرفعال» گویند.

تعریف ۵. حالت پروژه  $i$ ام در زمان  $t$  برابر است با مجموعه  $X_i(t) = (Y_i(t), Z_i(t), Q_i(t))$  که در آن  $Y_i(t)$  مجموعه فعالیت‌های فعال پروژه  $i$ ام در زمان  $t$ ،  $Z_i(t)$  مجموعه فعالیت‌های غیرفعال منتظر پروژه  $i$ ام در زمان  $t$ ، و  $Q_i(t)$

به جای یکدیگر استفاده شوند. همچنین گره  $s$ ، نشاندهنده گره ابتدایی و گره  $y$ ، نمایانگر گره انتهایی در شبکه پرت کلاسیک می‌باشد، در حالی که طول کمان  $a \in A$ ، یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر  $\mu_a$  می‌باشد. برای هر  $a \in A$ ،  $\alpha(a)$  را گره شروع فعالیت  $a$  و  $\beta(a)$  را گره پایانی فعالیت  $a$  تعریف می‌نماییم. همچنین تعاریف زیر را برای مسئله مورد بحث در نظر می‌گیریم:

تعریف ۱.  $I(v)$  را به‌عنوان مجموعه فعالیت‌هایی (کمان‌هایی) که به گره  $v$  در شبکه‌های پرت کلاسیک خاتمه می‌یابند و  $O(v)$  را مجموعه فعالیت‌هایی (کمان‌هایی) که از گره  $v$  در شبکه پرت کلاسیک شروع می‌شوند، تعریف می‌کنیم، یعنی داریم:

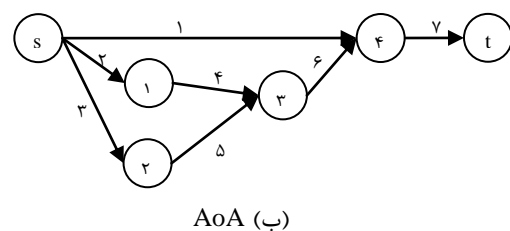
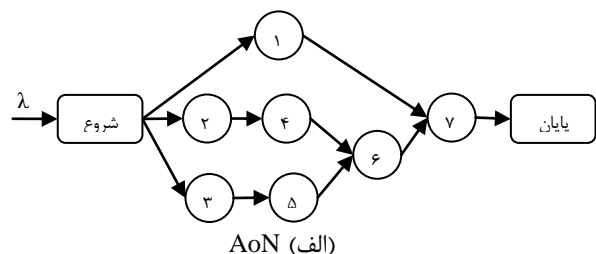
$$I(v) = \{a \in A : \beta(a) = v\} \quad (v \in V), \quad (1)$$

$$O(v) = \{a \in A : \alpha(a) = v\} \quad (v \in V). \quad (2)$$

تعریف ۲. اگر  $X \subset V$  چنانچه  $s \in X$  و  $y \in \bar{X} = V - X$  باشد، در این صورت  $(X, \bar{X})$ ، مجموعه فعالیت‌هایی که شروع در  $X$  و پایان در  $\bar{X}$  باشد را نمایش خواهد داد. یعنی برای برش  $(s, y)$  داریم:

$$(X, \bar{X}) = \{a \in A : \alpha(a) \in X, \beta(a) \in \bar{X}\} \quad (3)$$

حال اگر  $(\bar{X}, X) = \emptyset$  باشد، به آن برش، برش جهتدار یکنواخت (UDC) Uniformly Directed Cut گفته می‌شود یعنی اینکه در برش انجام شده، دو فعالیت در یک مسیر وجود نداشته باشد. مثال ۱. شبکه پرت‌پویای نشان داده شده در شکل ۱-الف را در نظر بگیرید. برشهای جهتدار یکنواخت این مثال عبارتند از:  $(1, 2, 3)$ ،  $(1, 3, 4)$ ،  $(1, 2, 5)$ ،  $(1, 4, 5)$ ،  $(1, 6)$  و  $(7)$ ، که از شبکه پرت کلاسیک (شکل ۱-ب) به دست می‌آید.



شکل ۱. شبکه‌های مثال ۱

*End,*

ii. اگر فعالیت  $a$  از پروژه اول ( $a \in E_1$ )، با نرخ  $\mu_a$  خاتمه پذیرد و در آن لحظه همه فعالیت‌های  $O(\beta(a))$  با تکمیل شدن فعالیت مذکور، شروع به دریافت خدمت نمایند، در این صورت فعالیت مذکور از مجموعه فعالیت‌های فعال حذف شده و تمام فعالیت‌های  $O(\beta(a))$  به مجموعه فعالیت‌های فعال جدید،  $E'_1$ ، اضافه خواهند شد، یعنی داریم:  $E'_1 = (E_1 - \{a\}) \cup O(\beta(a))$  و همچنین ایستگاه کاری  $a$  به فعالیت دیگری که در ابتدای صف وجود دارد، شروع به سرویس‌دهی می‌نماید. اما اگر فعالیت  $a$  که با نرخ  $\mu_a$  تکمیل شده، متعلق به پروژه اول نباشد ( $a \in E_i, i \neq 1$ ) و نیز در آن لحظه همه فعالیت‌های  $O(\beta(a))$  با خاتمه یافتن فعالیت یاد شده، آماده دریافت خدمت و یا در صف منتظر دریافت خدمت باشند، در این صورت فعالیت مذکور از مجموعه فعالیت‌های فعال حذف شده و ممکن است برخی از فعالیت‌های  $O(\beta(a))$  به مجموعه فعالیت‌های فعال جدید،  $E'_i$ ، اضافه شده و بقیه نیز به مجموعه فعالیت‌های در صف ملحق شوند،  $Q'_i$ . ایستگاه کاری  $a$  هم به فعالیت دیگری که در صف وجود دارد، سرویس‌دهی می‌نماید. در این گذار، نرخ گذار برابر است با  $\mu_a$  که الگوریتم آن به شرح ذیل می‌باشد:

If  $a \in E_i, I(\beta(a)) \subset F_i \cup \{a\}$  then

Begin:

If  $i = 1$  then

Begin:

$$E'_1 = (E_1 - \{a\}) \cup O(\beta(a)),$$

$$F'_1 = F_1 - I(\beta(a)),$$

For  $j = 2$  to  $N$  do

If  $a \in Q_j$  then

$$\{E'_j = E_j \cup \{a\}, Q'_j = Q_j - \{a\} \text{ and Go to End}\},$$

End,

If  $i \neq 1$  then

Begin:

$$M = \phi,$$

For  $j = 1$  to  $i-1$  do

$$M = M \cup (O(\beta(a)) \cap E_j),$$

$$E'_i = (E_i - \{a\}) \cup (O(\beta(a)) - M),$$

$$F'_i = F_i - I(\beta(a)),$$

$$Q'_i = Q_i \cup M,$$

For  $j = i+1$  to  $N$  do

If  $a \in Q_j$  then

$$\{E'_j = E_j \cup \{a\}, Q'_j = Q_j - \{a\} \text{ and Go to End}\},$$

End,

End.

مجموعه فعالیت‌های در صف پروژه  $i$ ام در زمان  $t$  را نشان می‌دهد.

فرض می‌کنیم  $N$  معرف ظرفیت سیستم و یا به عبارت دیگر، حداکثر تعداد پروژه‌های فعال به‌طور هم‌زمان در سیستم باشد، در این صورت حالت کل سیستم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(t) = [(Y_1(t), Z_1(t), Q_1(t)), \dots, (Y_N(t), Z_N(t), Q_N(t))] \quad (4)$$

همچنین، برش سه‌افزازی قابل قبول برای کل سیستم به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$[E, F, Q] \stackrel{define}{=} [(E_1, F_1, Q_1), \dots, (E_N, F_N, Q_N)] \quad (5)$$

که در آن  $(E_i, F_i, Q_i)$  یک برش سه‌افزازی قابل قبول پروژه  $i$ ام و یا  $(\phi, \phi, \phi)$  را نشان می‌دهد، به‌طوری که  $Q_i, F_i, E_i$  به ترتیب، مجموعه فعالیت‌های فعال، فعالیت‌های منتظر غیرفعال و فعالیت‌های در صف پروژه  $i$ ام را بیان می‌کند.

لازم به ذکر است که برش‌های سه‌افزازی قابل قبول یکسان برای پروژه‌های مختلف، نمی‌توانند هم‌زمان اتفاق بیفتند. همچنین فعالیت‌های پروژه‌ای که زودتر از بقیه پروژه‌ها وارد سیستم شده‌است (پروژه ۱)، هیچگاه در صف منتظر دریافت خدمت نخواهند بود، یعنی همواره خواهیم داشت:  $Q_1 = \phi$ .

برای تعیین مولفه‌های ماتریس آهنگ مولد (گذار) که با  $G = [g\{(E, F, Q), (E', F', Q')\}]$  نمایش داده می‌شود، به‌طور کلی سه حالت وجود دارد که به شرح ذیل می‌باشد:

i. هنگامی که فعالیت  $a$  از پروژه  $i$ ام با نرخ  $\mu_a$  تکمیل شود و در آن لحظه حداقل یک فعالیت کامل‌نشده در  $I(\beta(a))$  وجود داشته باشد، در این صورت آن فعالیت از مجموعه فعالیت‌های فعال،  $E_i$ ، به مجموعه فعالیت‌های غیرفعال منتظر جدید،  $F'_i$ ، انتقال می‌یابد و نیز ایستگاه کاری  $a$  به فعالیت دیگری که در ابتدای صف وجود دارد، شروع به سرویس‌دهی می‌نماید. در این گذار، نرخ گذار برابر است با  $\mu_a$  که الگوریتم آن به شرح ذیل می‌باشد:

If  $a \in E_i, I(\beta(a)) \not\subset F_i \cup \{a\}$  then

Begin:

$$E'_i = E_i - \{a\},$$

$$F'_i = F_i \cup \{a\},$$

For  $j = i+1$  to  $N$  do

If  $a \in Q_j$  then

$$\{E'_j = E_j \cup \{a\}, Q'_j = Q_j - \{a\} \text{ and Go to End}\},$$

iii. اگر سیستم ظرفیت پذیرش پروژه جدید با نرخ  $\lambda$  را داشته باشد، در این صورت ممکن است برخی از اجزای  $O(s)$  به مجموعه فعالیت‌های فعال پروژه جدید اضافه شده و مابقی آن به مجموعه فعالیت‌های درصاف پروژه جدید ملحق شوند. در این گذار، نرخ گذار برابر است با  $\lambda$  که الگوریتم آن به شرح ذیل می‌باشد:

iii. اگر سیستم ظرفیت پذیرش پروژه جدید با نرخ  $\lambda$  را داشته باشد، در این صورت ممکن است برخی از اجزای  $O(s)$  به مجموعه فعالیت‌های فعال پروژه جدید اضافه شده و مابقی آن به مجموعه فعالیت‌های درصاف پروژه جدید ملحق شوند. در این گذار، نرخ گذار برابر است با  $\lambda$  که الگوریتم آن به شرح ذیل می‌باشد:

If  $E_i = Q_i = F_i = \phi$  and ( $E_{i-1} \neq \phi$  or  $Q_{i-1} \neq \phi$  or  $F_{i-1} \neq \phi$ ) then

Begin:

$$M = \phi,$$

$$\text{For } j=1 \text{ to } i-1 \text{ do } M = M \cup (O(s) \cap E_j),$$

$$Q'_i = M,$$

$$E'_i = O(s) - M,$$

End

$$P_i(t) = P(X(t)=i | X(0)=1) \quad i=1,2,\dots,K. \quad (6)$$

با استفاده از روابط پیشرو چپمن-کولموگروف، معادلات دیفرانسیلی خطی سیستم برای بردار  $P(t) = [P_1(t) \ P_2(t) \ \dots \ P_K(t)]$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P'(t) = \frac{dP(t)}{dt} = P(t).G \quad (7)$$

$$P(0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

که در آن  $P'(t)$ ، مشتق بردار حالت  $P(t)$  و  $G$ ، ماتریس آهنگ مولد (گذار) فرآیند تصادفی  $\{X(t), t \geq 0\}$  را نشان می‌دهد. برای حل معادله دیفرانسیلی رابطه (۷)، آن را به یک معادله دیفرانسیلی با ضریب ثابت تبدیل می‌نمائیم که بدین منظور از دو طرف رابطه مذکور ترانهاده می‌گیریم. در نتیجه داریم:

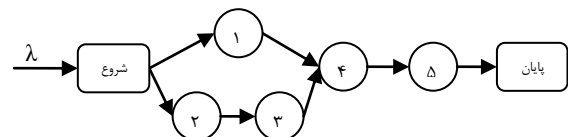
$$P'(t)^T = G^T . P(t)^T \quad (8)$$

فرض کنید  $M$  ماتریس مُدال (Modal matrix) ماتریس  $G^T$  باشد، به طوری که ستونهای آن را بردارهای ویژه ماتریس  $G^T$  تشکیل می‌دهند. همچنین  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$  مقادیر ویژه ماتریس  $G^T$  در نظر گرفته شده است. بنابراین حل معادله دیفرانسیل رابطه (۷) برابر است با (برای جزئیات بیشتر [۴۵] را مطالعه نمائید):

$$P(t)^T = M . e^{At} . M^{-1} . P(0)^T \quad (9)$$

که در آن  $e^{At}$  که یک ماتریس قطری می‌باشد از رابطه زیر به دست می‌آید:

مثال ۲. شبکه پرت‌پویای نشان داده شده در شکل ۲ را با پنج ایستگاه کاری در نظر بگیرید، به طوری که سیستم ظرفیت پذیرش هم‌زمان حداکثر دو پروژه را داشته باشد.



شکل ۲. شبکه پرت‌پویای مثال ۲

جدول ۱ تمام برشهای سه‌افزایی قابل قبول شبکه مثال ۲ را نشان می‌دهد، در حالی که نشانه \* برای فعالیت‌های غیرفعال منتظر و علامت q برای فعالیت‌های درصاف به کار رفته است. به عنوان مثال حالت ۱۲ در جدول ۱ را در نظر بگیرید. این حالت نشان می‌دهد که فعالیت ۲ از پروژه اول فعال بوده و فعالیت‌های ۱ از پروژه اول و دوم غیر فعال منتظر می‌باشند و همچنین فعالیت ۲ از پروژه دوم درصاف منتظر دریافت خدمت می‌باشد.

جدول ۱. همه برشهای سه‌افزایی قابل قبول مثال ۲

1. $[\phi, \phi]$	12. $[(1^*, 2), (1^*, 2^q)]$	23. $[(1^*, 3), (1^*, 3^q)]$
2. $[(1, 2), \phi]$	13. $[(1, 3^*), (1^q, 2)]$	24. $[(1, 3^*), (1^q, 3^*)]$
3. $[(1^*, 2), \phi]$	14. $[(1, 3), (1^q, 3^q)]$	25. $[5, (1^*, 2)]$
4. $[(1, 2), (1^q, 2^q)]$	15. $[5, \phi]$	26. $[4, (1^*, 3)]$
5. $[(1, 3), \phi]$	16. $[4, (1, 2)]$	27. $[4, (1, 3^*)]$
6. $[(1^*, 3), \phi]$	17. $[(1^*, 3), (1^*, 2)]$	28. $[5, (1, 3)]$
7. $[(1^*, 2), (1, 2^q)]$	18. $[(1^*, 3), (1, 3^q)]$	29. $[5, (1^*, 3)]$
8. $[(1, 3), (1^q, 2)]$	19. $[(1, 3^*), (1^q, 3)]$	30. $[4, 4^q]$
9. $[(1, 3^*), \phi]$	20. $[5, (1, 2)]$	31. $[5, (1, 3^*)]$
10. $[4, \phi]$	21. $[4, (1^*, 2)]$	32. $[5, 4]$
11. $[(1^*, 3), (1, 2)]$	22. $[4, (1, 3)]$	33. $[5, 5^q]$

در نتیجه، میانگین زمان تکمیل پروژه برابر است با:

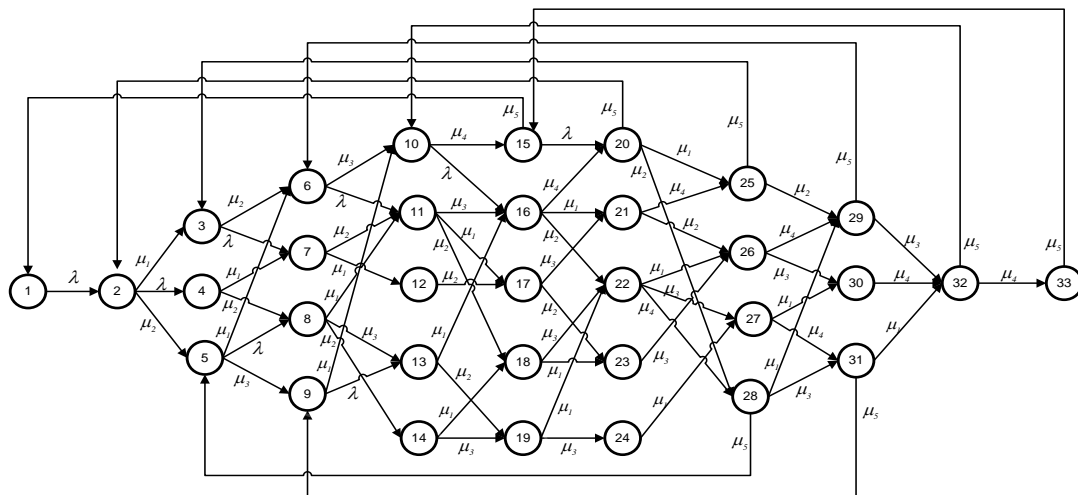
$$T = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i \in S^j} j P_i(t)}{\lambda \sum_{i \in S-S^N} P_i(t)} \quad (12)$$

که در آن  $P_i(t)$  ها از رابطه (۹) وقتی  $t$  به سمت بی‌نهایت و یا عددی بزرگ میل کند، به دست می‌آید. یعنی داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)^T = \lim_{t \rightarrow \infty} M \cdot e^{-\lambda t} \cdot M^{-1} \cdot P(0)^T \quad (13)$$

#### ۴. مثال عددی

برای روشن شدن مطلب، مثال ۲ را دوباره در نظر بگیرید که در سیستم ظرفیت پذیرش هم‌زمان حداکثر دو پروژه وجود دارد. فرض کنید پروژه‌های ورودی با توزیع پواسون و با نرخ  $\lambda = 5$  پروژه در سال، وارد سیستم می‌شوند و توزیع زمان فعالیت‌ها در ایستگاه‌های کاری نمایشی بوده که میانگین آنها عبارتست از:  $\mu_1 = 2.5$ ،  $\mu_2 = 3.5$ ،  $\mu_3 = 3$ ،  $\mu_4 = 2.75$ ،  $\mu_5 = 4$ . همچنین در هر ایستگاه کاری فقط یک خدمت‌دهنده مستقر می‌باشد. شکل ۳، نمودار نرخ زنجیره مارکوفی مسئله مذکور را نشان می‌دهد.



شکل ۳. نمودار نرخ زنجیره مارکوفی با زمان پیوسته برای مثال ۲

برای به دست آوردن میانگین زمان تکمیل پروژه در شبکه پرت‌پویای مثال ۲، یک دسته‌بندی مناسب بر روی حالت‌های سیستم براساس تعداد پروژه‌های فعال انجام می‌شود که در جدول ۳ نشان داده شده است.

در نتیجه، میانگین زمان تکمیل پروژه در شبکه پرت‌پویای مذکور با میل دادن  $t \rightarrow 100$  عبارتست از:

$$e^{-\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda t} \end{bmatrix} \quad (10)$$

#### ۳. میانگین زمان تکمیل پروژه

در این قسمت، هدف به دست آوردن میانگین زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود می‌باشد. بدین منظور، فرض کنید  $S^i$  یک زیر مجموعه از  $S$  باشد که سیستم،  $i$  پروژه در حال اجراء داشته باشد و یا به عبارت دیگر  $N-i$  ظرفیت خالی برای پذیرفتن پروژه جدید در سیستم وجود داشته باشد. همچنین، فرض کنید  $P$  میانگین تعداد پروژه‌های فعال در سیستم بوده و  $T$  میانگین زمان تکمیل هر پروژه در سیستم باشد. در نتیجه برطبق تئوری لیتل، در حالت پایداری سیستم داریم:  $P = \lambda' T$ ، که در آن  $\lambda'$  نرخ ورودی واقعی پروژه‌ها به سیستم می‌باشد که برابر است با:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda \sum_{i \in S-S^N} P_i(t)$ . علاوه بر این  $P$  از رابطه (۱۱) به دست می‌آید: (برای جزئیات بیشتر پیوست را مطالعه نمایید).

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \sum_{i \in S^j} j P_i(t) \quad (11)$$

تشکیل ماتریس آهنگ مولد (گذار) که در جدول ۲ نشان داده شده، معادلات دیفرانسیلی سیستم مذکور براساس رابطه (۷) و سپس احتمالات سیستم از رابطه (۱۳) وقتی  $t \rightarrow 100$  به دست می‌آید.

لازم به ذکر است که در جدول ۲، عناصر قطر اصلی در هر سطر برابر با قرینه مجموع بقیه عناصر آن سطر می‌باشند. همچنین،



$$T = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[P_2(t) + P_3(t) + P_5(t) + P_6(t) + P_9(t) + P_{10}(t) + P_{15}(t)] + 2 \left[ P_4(t) + P_7(t) + P_8(t) + \sum_{i=11}^{14} P_i(t) + \sum_{i=16}^{33} P_i(t) \right]}{\lambda [P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_5(t) + P_6(t) + P_9(t) + P_{10}(t) + P_{15}(t)]} = 2.257$$

جدول ۲. ماتریس  $G(\mu)$

state	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33				
1	λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
2	0	μ <sub>1</sub>	λ	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
3	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	λ	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	μ <sub>1</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	0	λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	μ <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	0	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	μ <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	λ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	0	μ <sub>2</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	μ <sub>1</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	μ <sub>2</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	μ <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	0	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	μ <sub>1</sub>	μ <sub>1</sub>	0	0	0	0	0	0	
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	0	0	0	0	0	0	
25	0	0	μ <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0	
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	0	0	0	0		
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	μ <sub>1</sub>	0	0	0		
28	0	0	0	0	μ <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	μ <sub>2</sub>	0	0	0		
29	0	0	0	0	0	μ <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>2</sub>	0		
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0		
31	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>1</sub>	0	
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

جدول ۳. دسته‌بندی حالات سیستم بر اساس تعداد پروژه‌های فعال

تعداد پروژه‌های فعال	حالت	$S^j$
۰	1	$S^0$
۱	2,3,5,6,9,10,15	$S^1$
۲	4,7,8,11,12,13,14,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33	$S^2$

مقاله، فرض شده بود که پروژه‌های کاملاً مشابه طبق فرآیند پواسون وارد سازمان می‌شوند، به طوری که ظرفیت سیستم برای اجرای هم‌زمان پروژه‌ها محدود می‌باشد. در هر ایستگاه کاری فقط یک خدمت‌دهنده مستقر بوده و فعالیت‌ها به‌طور مستقل و با توزیع نمایی در ایستگاه کاری متناظر خود انجام می‌شوند. برای به دست آوردن میانگین زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت پویا با ظرفیت محدود، ابتدا شبکه‌صاف به شبکه احتمالی تبدیل شده و سپس با ایجاد یک مدل مارکوفی مناسب که دارای حالات محدود و زمان پیوسته می‌باشد، معادله دیفرانسیلی سیستم تشکیل گردید.

تعداد حالات سیستم با افزایش تعداد برشهای سه‌افزازی قابل قبول و همچنین ظرفیت سیستم به‌طور نمایی افزایش خواهد یافت. در نهایت با بهره‌گیری از قانون لیتل، میانگین زمان تکمیل پروژه به دست آمد.

علاوه بر این، از شبیه‌سازی مونت کارلو شرایطی<sup>۱</sup> [۴۶] با تعداد اجرای ۱۰۰۰، جهت مقایسه نتایج تحلیلی به دست آمده استفاده می‌شود که در جدول ۴ نشان داده شده است.

جدول ۴. مقایسه روش ارائه شده با شبیه‌سازی

روش	میانگین زمان پروژه	زمان
روش ارائه شده	۲,۲۵۷	"۰:۰۳"
شبیه‌سازی مونت کارلو شرایطی	۲,۲۳۶	"۱۱:۰۳"

### ۵. نتیجه‌گیری و پیشنهاد مطالعات آتی

در این مقاله، شبکه‌های پرت پویا با ظرفیت محدود که به صورت یک شبکه‌صاف در نظر گرفته شده، مورد مطالعه قرار گرفت. در این

<sup>1</sup> Conditional Monte Carlo simulation

- Journal of Project Management, Vol 13, 1995, pp. 163-168.
- [2] Pritsker, A.A.B., Watters, L.J., Wolfe, P.M., "Multiproject Scheduling with Limited Resources: A Zero-One Programming Approach", Management Science, Vol. 16, No. 1, 1969, pp. 93-108.
- [3] Wiest, J.D., "A Heuristic Model for Scheduling Large Projects with Limited Resources", Management Science, Vol. 13 No. 6, 1967, pp. 359-377.
- [4] Kurtulus, I.S., Davis, E.W, "Multi-Project Scheduling: Categorization of Heuristic Rules Performance", Management Science, Vol. 28, 1982, pp. 161-172.
- [5] Kurtulus, I.S., Narula, S.C., "Multi-Project Scheduling: Analysis of Project Performance", IIE Transactions, Vol. 17, 1985, pp. 58-66.
- [6] Chen, V., "A 0-1 Goal Programming-Model for Scheduling Multiple Maintenance Project at a Copper Mine", European Journal of Operational Research, Vol. 6, 1994, pp. 176-191.
- [7] Lova, A., Maroto, C., Tormos, P., "A Multicriteria Heuristic Method to Improve Resource Allocation in Multiproject Scheduling", European Journal of Operational Research, Vol. 127, 2000, pp. 408-424.
- [8] Tsubakitani S., & Deckro R.F., "A Heuristic for Multi-Project Scheduling with Limited Resources in the Housing Industry", European Journal of Operational Research, Vol. 49, 1990, pp. 80- 91.
- [9] Lova, A., & Tormos, P., "Analysis of Scheduling Schemes and Heuristic Rules Performance in Resource-Constrained Multiproject Scheduling", Annals of Operations Research, Vol. 102, 2001, pp. 263-286.
- [10] Kumanan, S., Jegan Jose G., Raja K., "Multi-Project Scheduling using an Heuristic and a Genetic Algorithm", The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 31, 2006, pp. 360-366.
- [11] Goncalves, J.F., Mendes, J.J.M., Resende, M.G.C., "A Genetic Algorithm for the Resource Constrained Multi-Project Scheduling Problem", European Journal of Operational Research, Vol. 189, 2008, pp. 1171- 1190.
- [12] Ying, Y., Shou, Y., Li, M., "Hybrid Genetic Algorithm for Resource Constrained Multi-Project Scheduling Problem", Journal of Zhejiang University (Engineering Science), Vol. 43, 2009, pp. 23-27.
- [13] Chen, P.H., Shahandashti, S.M., "Hybrid of Genetic Algorithm and Simulated Annealing for Multiple Project Scheduling with Multiple Resource Constraints", Automation in Construction, Vol. 18, 2009, pp. 434-443.

در دنیای واقعی معمولاً پروژه‌های ورودی به سازمان دارای انواع مختلفی می‌باشند. در نتیجه، به‌عنوان مطالعه آتی می‌توان بر روی شبکه‌های پرت‌پویا با چندین کلاس (نوع) و ظرفیت محدود متمرکز شد و این در حالی است که در این پژوهش فرض شد که پروژه‌های ورودی همگی کاملاً مشابه و از یک نوع می‌باشند. همچنین، در این مقاله فرض شده‌است که در هر ایستگاه‌کاری فقط یک خدمت‌دهنده وجود دارد که می‌توان این فرض را تعمیم داده و چندین خدمت‌دهنده در هر ایستگاه‌کاری در نظر گرفت. علاوه بر این، به‌عنوان کار تحقیقاتی بعدی می‌توان بر روی توزیع زمان تکمیل پروژه در شبکه‌های پرت‌پویا با ظرفیت محدود متمرکز شد، در حالی که در این پژوهش میانگین زمان تکمیل پروژه در این نوع شبکه‌ها به‌دست آمده است.

### پیوست

فرض کنید  $n^o(t)$  و  $n^i(t)$  به ترتیب، تعداد پروژه‌های ورودی و خروجی به سیستم در بازه زمانی  $[0, t]$  باشند. همچنین فرض کنید  $n(t)$  تعداد پروژه‌های موجود در سیستم در زمان  $t$  باشد که برابر است با:  $n^i(t) - n^o(t)$ . علاوه بر این، فرض کنید  $\lambda'$  نرخ ورودی واقعی پروژه‌ها به سیستم و  $P$  میانگین تعداد پروژه‌های فعال در سیستم باشند.  $T_i$  را متغیر تصادفی زمان تکمیل پروژه  $i$  ام و  $T$  را میانگین زمان تکمیل پروژه در نظر می‌گیریم. در نتیجه،  $\lambda'$ ،  $P$  و  $T$  برابرند با:

$$\lambda' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n^i(t)}{t} \quad (\text{پ-۱})$$

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t n(u) du \quad (\text{پ-۲})$$

$$T = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n^i(t)} \sum_{i=1}^{n^i(t)} T_i \quad (\text{پ-۳})$$

از سوی دیگر، داریم:  $\int_0^t n(u) du = \sum_{i=1}^{n^i(t)} T_i$ . بنابراین رابطه (پ-۴) را می‌توان نوشت:

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t n(u) du = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n^i(t)} T_i = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n^i(t)}{t} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n^i(t)} \sum_{i=1}^{n^i(t)} T_i \right) = \lambda' T \quad (\text{پ-۴})$$

### مراجع

- [1] Payne, J.H., "Management of Multiple Simultaneous Projects: a State-of-the-art Review", International

- Networks: 1966–1987*", INFORM, Vol. 27, 1989, pp. 272–290.
- [27] Charnes, A., Cooper, W., Thompson, G., "Critical Path Analysis via Chance Constrained and Stochastic Programming", Operations Research, Vol. 12, 1964, pp. 460–470.
- [28] Martin, J., "Distribution of the Time through a Directed Acyclic Network", Operations Research, Vol. 13, 1965, pp. 46–66.
- [29] Hopfinger, E., & Steinhardt, V., "On the Exact Evaluation of Finite Activity Networks with Stochastic Durations of Activities", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 117, Springer-Verlag, 1976.
- [30] Kulkarni, V., Adlakha, V., "Markov and Markov-Regenerative PERT Networks", Operations Research, Vol. 34, 1986, pp. 769–781.
- [31] Ord, J., "A Simple Approximation to the Completion Time Distribution for a PERT Network", Journal of Operational Research Society, Vol. 42, 1991, pp. 1011–1017.
- [32] Soroush, H., "The Most Critical Path in a PERT Network", Journal of Operational Research Society, Vol. 45, 1994, pp. 287–300.
- [33] Ludwig, A., Mohring, R. H., Frederik, S., "A Computational Study on Bounding the Makespan Distribution in Stochastic Project Networks", Annals of Operations Research, Vol. 102, 2001, pp. 49–64.
- [34] Abdelkader, Y. H., "Evaluating Project Completion Times when Activity Times are Weibull Distributed", European Journal of Operational Research, Vol. 157, 2004, pp. 704–715.
- [35] Elmaghraby, S., "On the Expected Duration of PERT Type Networks", Management Science, Vol. 13, 1967, pp. 299–306.
- [36] Robillard, P., "Expected Completion Time in PERT Networks", Operations Research, Vol. 24, 1976, pp. 177–182.
- [37] Pontrandolfo, P., "Project Duration in Stochastic Networks by the PERT-path Technique", International Journal of Project Management, Vol. 18, 2000, pp. 215–222.
- [38] Perros, H., "Queueing Networks with Blocking: a Bibliography", ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, Vol. 12, No. 2, 1984, pp. 8–12.
- [39] Papadopoulos, H.T., Heavey, C., "Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design: A Classification of Models for Production and Transfer Lines", European Journal of Operational Research, Vol. 92, No. 1, 1996, pp. 1–27.
- [14] Herroelen, W., Leus, R., "Project Scheduling under Uncertainty: Survey and Research Potentials", European Journal of Operational Research, Vol. 165, 2005, pp. 289–306.
- [15] Adler, P.S., Mandelbaum, A., Nguyen, V., Schwerer, E., "From Project to Process Management: an Empirically-Based Framework for Analyzing Product Development Time", Management Science, Vol. 41, No. 3, 1995, pp. 458–484.
- [16] Anavi-Isakow, S., & Golany, B., "Managing Multi-Project Environments through Constant Work-in-Process", International Journal of Project Management, Vol. 21, No. 1, 2003, pp. 9–18.
- [17] Cohen, I., Golany, B., Shtub, A., "Managing Stochastic, Finite Capacity, Multi-Project Systems through the Cross Entropy Methodology", Annals of Operations Research, Vol. 134, 2005, pp. 183–199.
- [18] Cohen, I., Golany, B., Shtub, A., "Resource Allocation in Stochastic, Finite-Capacity, Multi-Project Systems through the Cross Entropy Methodology", Journal of Scheduling, Vol. 10, 2007, pp. 181–193.
- [19] Fatemi Ghomi, S.M.T., Ashjari, B., "A Simulation Model for Multi-project Resource Allocation", International Journal of Project Management, Vol 20, 2002, pp. 127-130.
- [20] Azaron, A., Modarres, M., "Project Completion Time in Dynamic PERT Networks with Generating Projects", Scientia Iranica, Vol. 14, No. 1, 2007, pp. 56–63.
- [21] Azaron, A., Katagiri, H., Kato, K., Sakawa M., "Longest Path Analysis in Networks of Queues: Dynamic Scheduling Problems", European Journal of Operational Research, Vol. 174, 2006, pp. 132-149.
- [22] Azaron A., Tavakkoli-Moghaddam R., "Multi-Objective Time-Cost Trade-Off in Dynamic PERT Networks using an Interactive Approach", European Journal of Operational Research, Vol. 180, 2007, pp. 1186–1200.
- [23] Yaghoubi, S., Noori, S., Azaron A., Tavakkoli-Moghaddam R., "Resource Allocation in Dynamic PERT Networks with Finite Capacity", European Journal of Operational Research, Vol. 215, 2011, pp. 670–678.
- [24] Azaron, A., Fatemi Ghomi, S.M.T., "Lower Bound for the Project Completion Time in Dynamic PERT Networks", European Journal of Operational Research, Vol. 186, 2008, pp. 120-127.
- [25] Azaron A., Fynes B., Modarres M., "Due Date Assignment in Repetitive Projects", International Journal of Production Economics, Vol. 129, 2011, pp. 79-85.
- [26] Adlakha, V., Kulkarni, V., "A Classified Bibliography of Research on Stochastic PERT

- [40] Tan, B., Gershwin, S.B., "Analysis of a General Markovian Two-stage Continuous-flow Production System with a Finite Buffer", International Journal of Production Economics, Vol. 120, No. 2, 2009, pp. 327–339.
- [41] Balsamo, S., De Nitto Persone, V., Inverardi, P., "A Review on Queueing Network Models with Finite Capacity Queues for Software Architectures Performance Prediction", Performance Evaluation, Vol. 51, 2003, pp. 269–288.
- [42] Osorio, C., Bierlaire, M., "An Analytic Finite Capacity Queueing Network Model Capturing the Propagation of Congestion and Blocking", European Journal of Operational Research, Vol. 196, No. 3, 2009, pp.996–1007.
- [43] Artalejo, J.R., "Accessible Bibliography on Retrial Queues", Mathematical and Computer Modelling, Vol. 30, 1999, pp. 1–6.
- [44] Jouini, O., Dallery, Y., Aksin, Z., "Queueing Models for Full-flexible Multi-class Call Centers with Real-time Anticipated Delays", International Journal of Production Economics, Vol. 120, No. 2, 2009, pp. 389–399.
- [45] Luenberger, D., Introduction to Dynamic Systems, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [46] Fatemi Ghomi, S.M.T., Hashemin, S.S., "A New Analytical Algorithm and Feneration of Gaussian Quadrature Formula for Stochastic Network", European Journal of Operational Research, Vol. 114, 1999, pp. 610-625.