International Journal of Industrial Engineering & Production Management (2014)

May 2014, Volume 25, Number 1
pp. 31-43

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

# A Method for Finding Non-Dominated Solutions of the Multi Objective Combinatorial Optimization Problems by Elastic Constraints Method

## M. Darrudi & R. Sadeghian*

***Maryam Darrudi,*** *Master of Science Student at Bu Ali Sina University, Engineering Department, Industrial Engineering Group, Hamedan, Iran.*
***Ramin Sadeghian,*** *Assistant Professor at Tehran Payam Noor University, Industrial Engineering Group, Tehran, Iran, sadeghian@pnu.ac.ir***,**

**Keywords**

Multi Objective Integer Programming (MOIP),
Multi Objective Combinatorial Optimization (MOCO),
Elastic Constraints (EC) Method

**ABSTRACT**

*In this paper, a general procedure is developed to find all non-dominated solutions of the multi objective combinatorial optimization (MOCO) problem. This procedure is based on the elastic constraints method and applies the identification of objective's bounds for it. The bounds of objectives are determined by solving single objective integer programming problems. First, the elastic constraints method is performed on a bi-objective and tri-objective problem respectively, then it is developed on a general multi objective integer programming (MOIP) problem. In this paper, a numerical example such as tri-objective assignment problem is presented to clear the proposed method.*



* **Corresponding author. Ramin Sadeghian**
**Email**: *sadeghian@pnu.ac.ir*

نشـــریه بین المللـــی مهنـدسی صنـایع و مدیـــریت تولیـد

شمـــاره ۱، جلـــد ۲۵، خـــرداد ۱۳۹۳
صفحـــــه ۴۳-۳۲

نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید
دانشگاه علم و صنعت ایران

ISSN: 2008-4870

http://IJIEPM.iust.ac.ir/

# یافتن راه‌حل‌های مؤثر در مسائل بهینه‌سازی ترکیبی چندهدفه به کمک روش قیود ارتجاعی

مریم دررودی و رامین صادقیان*

**کلمات کلیدی**

برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه،
بهینه‌سازی ترکیبی چندهدفه،
روش قیود ارتجاعی

**چکیده:**

در این مقاله، یک فرآیند کلی برای یافتن تمام راه‌حل‌های مؤثر از مسأله بهینه‌سازی ترکیبی چندهدفه تشریح می شود. این فرآیند بر پایه روش قیود ارتجاعی بوده و به شناسایی حدود هر هدف می‌پردازد. حدود اهداف، با حل مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح تک هدفه، به‌دست می‌آیند. ابتدا روش قیود ارتجاعی بر روی مسأله دوهدفه و سپس بر روی مسأله سه‌هدفه بررسی شده و از این طریق به مسأله برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه کلی تعمیم داده می‌شود. در این مقاله، جهت روشن‌تر شدن روش کار، یک مثال عددی شامل مسأله تخصیص با سه تابع هدف ارائه می‌گردد.

## ۱. مقدمه

مسائل بهینه سازی ترکیبی چندهدفه[2]، نمونه‌های خاصی از مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه[3] هستند که به واسطه مجموعه‌های محدودیت ساختاریافته خاص‌شان، تمیز داده می‌شوند. بسیاری از پدیده‌های جهان واقعی طبعاً یک بهینه‌سازی ترکیبی چندهدفه هستند، زیرا اکثر این پدیده‌ها دارای متغیرهای عددصحیح و با اهداف ناسازگارند.

هرقات و گاندی‌بلکس[4] در مورد مسائل مربوط به بهینه‌سازی ترکیبی چندهدفه روی روش‌های تقریبی و دقیق بررسی‌هایی انجام دادند. آنها روی برخی انواع خاص مسائل بررسی کرده و در مورد متدلوژی‌های حل‌شان بحث کردند. آنها بدون اینکه به برنامه ریزی غیرخطی، زمان‌بندی و برنامه‌ریزی چند سطحی محدود شوند، برخی دیگر از مسائل بهینه‌سازی چندمعیاره را بررسی کردند [۲-۱].

هنان و کلین[5] برای مسأله برنامه‌ریزی عددصحیح خطی چندهدفه، الگوریتمی بر اساس راه‌حل‌های متوالی از مدل‌های تک هدفه ارائه کردند، که در آن از برخی محدودیت‌های اضافی برای حذف راه‌حل‌های مسلط شناخته‌شده، استفاده می‌شود [۳]. الگوریتم آنها یک زیرمجموعه تولید می‌کند که لزوماً مجموعه کاملی از راه‌حل‌های مؤثر نیست. کرما و سیلوا[6] روشی برای پیدا کردن مجموعه بردارهای غیرمسلط در برنامه‌های خطی عددصحیح چندهدفه عرضه کردند، که دیدگاه هنان و کلین را با یکی‌کردن تمام اهداف در یک تابع وزنی توسعه داده و یافتن تمام راه‌حل‌های مؤثر را تضمین کردند [۴]. لاومانس[7] و همکاران یک الگوریتم فرا ابتکاری برای به‌دست‌آوردن راه‌حل‌های مؤثر مسأله برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه، به‌صورت تقریبی و با استفاده از روش $\varepsilon$- محدودیت ارائه کردند [۵]. اشکال اصلی دیدگاه‌های ارائه شده، مشکل‌بودن حل مسائل مربوطه است که ناشی از افزایش تعداد محدودیت‌ها و متغیرها و در نتیجه افزایش در تعداد راه حل های مؤثر مسأله می‌باشد.

تکنیک عددی‌سازی[8] یکی از روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه است، که استفاده از آن جهت پیدا کردن راه‌حل‌های مؤثر مسائل چندهدفه بسیار رایج است[۱۰-۶]. این

**تاریخ وصول: ۹۰/۴/۱۹**
**تاریخ تصویب: ۹۱/۴/۱۷**

**مریم دررودی**، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه بوعلی سینا، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی صنایع، همدان، ایران.

*نویسنده مسئول مقاله: **دکتر رامین صادقیان**، استادیار دانشگاه پیام نور تهران، دانشکده مهندسی صنایع، ایران، sadeghian@pnu.ac.ir

2 *Multi Objective Combinatorial Optimization (MOCO)*
3 *Multi Objective Integer Programming (MOIP)*
4 *Ehrgott & Gandibleux*
5 *Klein & Hannan*
6 *Sylva & Crema*
7 *Laumanns*
8 *Scalarization Technique*

تکنیک خود شامل چندین روش است که مرسوم‌ترین آنها روش‌های جمع‌وزنی[1] و روش $\varepsilon$- محدودیت[2] هستند[۱۲-۱۱]. هرقات روی تکنیک‌های عددی‌سازی مسأله برنامه‌ریزی عددصحیح خطی چندهدفه، بحث کرد و برخی خصوصیات راه‌حل‌های مؤثر را توسعه داد و تکنیک جدیدی از عددی‌سازی با عنوان روش قیود ارتجاعی[3] را معرفی نمود. البته او در مقاله خود نحوه پیاده‌سازی و اجرای این روش را بیان نکرده و فقط ایده آن را طرح کرد [۷].

## ۲. مفاهیم و تعاریف

یک روش کلی برای یافتن مجموعه راه‌حل های مؤثر از مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه، روش عددی‌سازی است، که در آن مسأله چندهدفه به شکل‌های خاصی به مسائل تک‌هدفه تبدیل شده و متناوباً تا رسیدن به جواب مورد نظر با دقت تعیین شده حل می‌شوند. برخی روش‌های عددی‌سازی در ذیل معرفی می‌شوند.

۱. روش جمع وزنی: عددی‌سازی روش جمع وزنی یک ترکیب محدب از $p$ هدف از برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه می‌باشد و از بردار وزن‌ها $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ به عنوان پارامتر استفاده می‌کند [۱۱].

$$\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x). \qquad (۱)$$

۲. روش $\varepsilon$– محدودیت: در روش $\varepsilon$- محدودیت، یکی از $p$ هدف ( $j$ امین هدف ) برای مینیمم‌سازی باقی می‌ماند و $p$-1 هدف دیگر در محدودیت‌ها قرار می‌گیرند.

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} \ f_j(x) \\ &f_k(x) \leq \varepsilon_k \qquad k \neq j. \end{aligned} \qquad (۲)$$

این روش توسط هایمیس[4] معرفی شده و بحث گسترده‌تر توسط چانکونگ[5] و هایمیس انجام گرفته‌است[۱۲].

۳. روش قیود ارتجاعی: ایده این روش، ایجاد ارتجاع قیود به منظور کسب مسأله‌ای با حل آسان‌تر، است. زیرا در این روش حدود بالای روی مقادیر هدف مختل شده و از طرفی دیگر نقض محدودیت، جریمه می‌شود. عددی‌سازی این مسأله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} \quad c_j x + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k \\ &\text{subject to } \ c_k x + l_k - s_k = \varepsilon_k \qquad k \neq j \\ &s_k, l_k \geq 0 \qquad k \neq j. \end{aligned} \qquad (۳)$$

هرقات و ریان[6]، از این ایده برای ایجاد روش قیود ارتجاعی استفاده کردند[۱۳]. پارامترها عبارتند از ضرایب جریمه $\mu_k$ و مقادیر سمت راست، $\varepsilon_k$. در این روش از دو مجموعه متغیرهای اضافی استفاده می‌شود: متغیرهای کمکی $l_k$ و متغیرهای مازاد $s_k$. استفاده از این متغیرها به منظور تبدیل حدود بالای مقادیر هدف از (۲) به محدودیت‌های مساوی صورت می‌گیرد که می‌تواند با انتخاب مناسب $s$ و $l$ برای هر $x \in X$ فراهم آید.

## ۳. ارائه مدل پیشنهادی

روش قیودارتجاعی یکی از تکنیک‌های عددی‌سازی در حل مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه است که در واقع ترکیبی از دو روش جمع‌وزنی و $\varepsilon$- محدودیت می‌باشد. روش قیود ارتجاعی دربردارنده مزیت‌های روش جمع وزنی و $\varepsilon$- محدودیت به‌طور توأمان بوده و برخی از معایب این دو روش را از بین می‌برد. این روش از سادگی حل تک‌هدفه‌شدن مسأله (مانند روش جمع‌وزنی بر خلاف روش $\varepsilon$- محدودیت) و امکان یافتن تمام راه‌حل‌های مؤثر (مانند روش $\varepsilon$- محدودیت بر خلاف روش جمع‌وزنی) بهره می‌برد.

در راستای بهره‌برداری از روش جدید قیود ارتجاعی و نیز به منظور تسهیل در استفاده از روش مذکور، فرآیندی برای یافتن راه‌حل‌های مؤثر مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه بر پایه روش قیود ارتجاعی ارائه خواهد شد.

برای این منظور ابتدا فرآیند روی مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح دو هدفه و سپس بر روی مسأله سه‌هدفه بررسی شده و از این طریق به مسأله برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه کلی تعمیم داده می‌شود.

در فرآیند پیشنهادی، برای یافتن تمام راه‌حل‌های مؤثر، همان طور که در ادامه ثابت خواهد شد، یک محدوده از مقادیر $\mu_i$ که منجر به راه‌حل مؤثر می‌شوند، بستگی به $f_i^L$ و $f_i^U$ دارند که به‌ترتیب حدود بالایی و پائینی روی $f_i$ از هر حل شدنی هستند. از طرفی در این فرآیند، $s_i$ مقداردهی می‌شود تا حد بالا تولید شود و سپس مقدار $s_i$ به‌طور مرتب کاهش می‌یابد تا جایی‌که $s_i$ به حد پائینی $f_i$ برسد.

توجه شود که بدون از دست دادن کلیت مطلب، می‌توان فرض کرد که محدودیت زیر از مسأله (۳):

---

1 The Weighted Sum Method
2 The ε-Constraint Method
3 Elastic Constraints Method
4 Haimes
5 Chankong
6 Ehrgott & Ryan

معادل است با:

$$c_k x + l_k - s_k = \varepsilon_k$$
$$c_k x - s_k \le \varepsilon_k$$

زیرا $l_k$ متغیرکمکی مسأله می‌باشد و می‌توان آن را تحت متغیر کمبود مسأله فرض کرد.

### ۱-۳. مسأله برنامه‌ریزی عدد صحیح دو هدفه[1] (*BOIP*)

روش قیود ارتجاعی را روی مسأله *BOIP* پیاده سازی کرده و سپس روی کارایی‌اش بحث می‌شود.

$$\begin{aligned} &Min\ \ f_1(x) + \mu_2 s_2 \\ &s.t.\ \ f_2(x) - s_2 \le \varepsilon_2 \\ &x \in X. \end{aligned} \tag{۴}$$

راه‌حل بهینه مسأله (۴)، راه‌حل مؤثر مسأله دوهدفه می‌باشد. در این مسأله مقدار $s_2$، محدودیت را نقض کرده و جریمه این نقض را $\mu_2$ می‌پردازد.

قضیه زیر یک خصوصیت از حد بالایی روی $f_i(x)$ از تمام راه‌حل‌های مؤثر دوهدفه ارائه می‌دهد، مشروط به اینکه مقدار $f_i(x)$ بیشتر از $s_i$ نباشد.

**قضیه (۱):** یک راه‌حل مؤثر دو هدفه که حد بالایی روی $f_i(x)$ فراهم می‌کند، به‌ازای مقدار مشخصی از $s_i$، حد پائینی روی هدف دیگر $f_j(x)$ می‌دهد.

**اثبات:** فرض کنید $x' \in X$ راه‌حل مؤثر دو هدفه باشد که حد بالایی روی $f_i(x)$ فراهم می کند، لذا برای تمام $x \in X$ داریم: $f_i(x) \le f_i(x')$ از این رو $x'$ در هدف *i* غیرمسلط نیست.

از تعریف مؤثر بودن چنین برمی‌آید که، یک راه‌حل مؤثر حداقل یک هدف غیرمسلط توسط هر راه‌حل مؤثر دیگری دارد. بنابراین راه‌حل محدود شده مفروض توسط تمام راه‌حل‌ها در هدف دیگر $f_j(x)$ بایستی غیرمسلط باشد. یعنی حد پائینی روی هدف $f_j(x)$ ارائه دهد.■

با استفاده از این حدود، قضیه (۲) به‌ازای مقدار مشخصی از $s_2$ در مدل (۴)، محدوده مقادیری از $\mu_2$ را بیان می‌کند که یک راه‌حل مؤثر برمی‌گردانند.

**قضیه (۲):** راه‌حل مسأله (۴) با $\mu_2 = \frac{1}{f_2^U - f_2^L + n}$، به‌ازای مقدار مشخصی از $s_2$ و $n \in \mathbb{Z}$، $n \ge 1$، حد بالایی روی مقادیر $f_2$ از تمام راه‌حل‌های مؤثر فراهم می‌کند.

**اثبات:** در حل مسأله زیر مقدار مشخصی از $s_2$ در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\ \ f_1(x) + \mu_2 s_2 \\ &\mathrm{s.t.}\ \ f_2(x) - s_2 \le \varepsilon_2 \\ &x \in X. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه (۱)، راه‌حل‌های مؤثر دو هدفه دارای حد بالایی روی $f_2(x)$، حد پائینی روی هدف دیگر $f_1(x)$ فراهم می کند. با تعریف مناسب $\mu_2$، بیشترین کاهش در $f_2$ (که سهمی در تابع هدف ندارد) به میزان کمترین افزایش در $f_1$ می‌باشد.

بیشترین کاهش در $f_2$ از $f_2^U - f_2^L$ بیشتر نیست. از طرفی از آنجا که $\mu_2 < 1$، پس:

$$\mu_2(f_2^U - f_2^L) < 1$$

بطور معادل:

$$\mu_2 < \frac{1}{f_2^U - f_2^L}$$

از طرفی:

$$\frac{1}{f_2^U - f_2^L + n} < \frac{1}{f_2^U - f_2^L}$$

لذا در مسأله (۴) به‌ازای مقدار مشخصی از $s_2$، $\mu_2$ با $\frac{1}{f_2^U - f_2^L + n}$، حد بالایی روی $f_2$ از راه‌حل‌های مؤثر دوهدفه فراهم می کند.■

### ۲-۳. مسأله برنامه ریزی عدد صحیح سه هدفه[2] *TOIP*

روش قیود ارتجاعی را روی مسأله *TOIP* پیاده سازی کرده و سپس روی کارایی‌اش بحث می‌گردد.

$$\begin{aligned} &Min\ \ f_1(x) + \mu_2 s_2 + \mu_3 s_3 \\ &s.t.\ \ f_2(x) - s_2 \le \varepsilon_2 \\ &f_3(x) - s_3 \le \varepsilon_3 \end{aligned} \tag{۵}$$

قضیه زیرخاصیتی از یک حد بالا روی مقدار $f_i(x)$ از تمام راه‌حل‌های مؤثر سه‌هدفه ارائه می‌دهد، در صورتیکه مقدار $f_i(x)$ بیشتر از $s_i$ نباشد.

**قضیه (۳):** یک راه‌حل مؤثر سه‌هدفه که حد بالایی روی هدف $f_i(x)$ فراهم می‌کند، به‌ازای مقدار مشخصی از $s_i$، مؤثر دوهدفه نسبت به دو هدف دیگر است.

**اثبات:** فرض کنید که $x' \in X$ یک راه حل مؤثر سه هدفه باشد که حد بالایی روی $f_i(x)$ فراهم می‌کند، لذا برای تمام $x \in X$ داریم: $f_i(x) \le f_i(x')$، از این رو $x'$ در هدف *i* غیرمسلط نیست.

از تعریف مؤثر بودن چنین برمی‌آید که، یک راه‌حل مؤثر حداقل یک هدف غیرمسلط توسط هر راه‌حل مؤثر دیگری دارد. بنابراین به منظور داشتن حداقل یک هدف غیرمسلط، راه‌حل محدود شده

[1] *Bi-Objective Integer Programming*

[2] *Tri-Objective Integer Programming*

مفروض توسط تمام راه‌حل ها در یک هدف، بایستی در دو هدف دیگر، مؤثر دو هدفه باشد.■

قضیه زیر یک محدوده برای $\mu_3$ مشخص می‌کند که یافتن راه‌حل‌های غیرمسلط سه هدفه را تضمین کرده و از طرفی این راه‌حل‌ها بهازای مقدار مشخصی از $s_3$ حد بالایی روی $f_3(x)$ فراهم می‌کنند.

**قضیه (۴):** راه‌حل مسأله (۵) با $\mu_3 = \frac{1}{(f_2^U - f_2^L + k)(f_3^U - f_3^L + k)}$، بهازای مقدار مشخصی از $s_3$، و $n \in \mathbb{Z}$، $n \geq 1$ از تمام راه‌حل‌های مؤثر سه هدفه، حد بالایی روی مقدار $f_3(x)$ فراهم می‌کند.

**اثبات:** بهازای مقدار مشخصی از $s_3$، برای حل مسأله محدود شده زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Min } f_1(x) + \frac{1}{f_2^U - f_2^L + n} s_2 + \mu_3 s_3 \\ &\text{s.t. } f_2(x) - s_2 \leq \varepsilon_2 \\ &\quad f_3(x) - s_3 \leq \varepsilon_3 \\ &x \in X \end{aligned}$$

از قضیه (۳) مشخص است که راه‌حل‌های مؤثر سه هدفه با حداکثر مقدار $f_3(x)$، بایستی مؤثر دو هدفه نسبت به $f_1$ و $f_2$ باشند، که این امر، مؤثر بودن دو هدفه و مینیمم کردن $f_3(x)$ روی مجموعه دو هدفه غیرمسلط را تضمین می‌کند. به‌جای این فرآیند سلسله مراتبی دو مرحله‌ای، برای یافتن راه‌حل‌های غیرمسلط دوهدفه که هم‌چنین غیرمسلط سه‌هدفه هستند، از یک هدف تکی در مسأله بالا استفاده می‌شود.

در مسأله بالا اگر $\mu_3$ چنان تعریف شود که بیشترین کاهش در $f_3$ به میزان کمترین افزایش در $f_1$ و $f_2$ باشد آنگاه یک مجموعه دو هدفه غیرمسلط با حداکثر مقدار $f_3$ فراهم می‌آید. چون بطور سلسله‌ای $f_1$ و سپس $f_2$ را بهینه می‌شود لذا سهم $f_2$ همواره کمتر از $f_1$ است، بنابراین می‌توان به‌جای بررسی هر دو هدف فقط سهم $f_2$ را بررسی کرد. بیشترین کاهش در $f_3$ از $f_3^U - f_3^L$ بیشتر نیست. کمترین افزایش در $f_2$ کمتر از $\frac{1}{f_2^U - f_2^L + n}$ نیست.

با توجه به اینکه بیشترین کاهش در $f_3$ از کمترین افزایش در $f_2$ بیشتر نیست، پس:

$$f_3^U - f_3^L < \frac{1}{f_2^U - f_2^L + n}$$

چون $\mu_3 < 1$ پس

$$\mu_3(f_3^U - f_3^L) < f_3^U - f_3^L$$

در نتیجه

$$\mu_3(f_3^U - f_3^L) < \frac{1}{f_2^U - f_2^L + n}$$

بطور معادل:

$$\mu_3 < \frac{1}{(f_2^U - f_2^L + n)(f_3^U - f_3^L)}$$

از طرفی

$$\frac{1}{(f_2^U - f_2^L + n)(f_3^U - f_3^L + n)} < \frac{1}{(f_2^U - f_2^L + n)(f_3^U - f_3^L)}$$

لذا مسأله بالا بهازای مقدار مشخصی از $s_3$ با $\mu_3 = \frac{1}{(f_2^U - f_2^L + n)(f_3^U - f_3^L + n)}$، حد بالایی روی $f_3$ از راه‌حل‌های مؤثر سه‌هدفه فراهم می کند.■

### ۳-۳. مسأله برنامه‌ریزی عددصحیح *k* هدفه (چندهدفه) *MOIP*

روش قیود ارتجاعی را روی مسأله *MOIP* پیاده‌سازی کرده و سپس روی کارایی‌اش بحث می‌شود.

$$\begin{aligned} &\text{Min } f_j(x) + \textstyle\sum_{k \neq j} \mu_k s_k \\ &\text{s.t. } f_k(x) - s_k \leq \varepsilon_k \qquad k \neq j \\ &x \in X. \end{aligned} \tag{۶}$$

قضیه زیر یک خصوصیت از حد بالایی روی $f_i(x)$ از تمام راه‌حل‌های مؤثر *k* هدفه ارائه می‌دهد مشروط به اینکه مقدار $f_i(x)$ بیشتر از $s_i$ نباشد.

**قضیه (۵):** یک راه‌حل مؤثر *k* هدفه که حد بالایی روی هدف $f_i(x)$ فراهم می‌کند، بهازای مقدار مشخصی از $s_i$، مؤثر *(k-1)* هدفه نسبت به *(k-1)* هدف دیگر است.

**اثبات:** فرض کنید که $x' \in X$ یک راه حل مؤثر سه هدفه باشد که حد بالایی روی $f_i(x)$ فراهم می کند، لذا برای تمام $x \in X$ داریم: $f_i(x) \leq f_i(x')$، از این رو $x'$ در هدف *i* غیرمسلط نیست.

از تعریف مؤثر بودن چنین برمی‌آید که، یک راه‌حل مؤثر حداقل یک هدف غیرمسلط توسط هر راه‌حل مؤثر دیگری دارد. بنابراین به منظور داشتن حداقل یک هدف غیرمسلط، راه‌حل محدود شده مفروض توسط تمام راه‌حل ها در یک هدف، بایستی در *(k-1)* هدف دیگر، مؤثر *(k-1)* هدفه باشد.■

قضیه زیر یک محدوده برای $\mu_k$ مشخص می‌کند که یافتن راه‌حل‌های غیرمسلط *k* هدفه را تضمین کرده و از طرفی این راه‌حل‌ها بهازای مقدار مشخصی از $s_k$ حد بالایی روی $f_k(x)$ فراهم می‌کنند.

**قضیه (۶):** راه‌حل مسأله (۶) با $\mu_k = \frac{1}{(f_2^U - f_2^L + n)(f_3^U - f_3^L + n)\ldots(f_k^U - f_k^L + n)}$ بهازای

مقدار مشخصی از $s_k$ و $n \in \mathbb{Z}$ ،$n \geq 1$ از تمام راه‌حل‌های مؤثر $k$ هدفه، حد بالایی روی مقدار $f_k(x)$ فراهم می‌کند.

**اثبات:** به‌ازای مقدار مشخصی از $s_k$، از مسأله محدود شده زیر برای حل استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} Min\ f_1(x) &+ \frac{1}{f_2{}^U - f_2{}^L + n} s_2 + \frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n)} s_3 + \cdots \\ &+ \frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_{k-1}{}^U - f_{k-1}{}^L + n)} s_{k-1} + \mu_k s_k \\ s.t.\ \ & f_2(x) - s_2 \leq k_2 \\ & f_3(x) - s_3 \leq k_3 \\ & \cdots \\ & f_k(x) - s_k \leq k_k \\ & x \in X. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه (۵)، راه‌حل‌های مؤثر k هدفه با حداکثر مقدار $f_k(x)$ بایستی مؤثر (k-1) هدفه برای (k-1)هدف دیگر باشند، جهت یافتن حد بالا روی مقادیر $f_k(x)$ از راه‌حل‌های مؤثر k هدفه، می توان راه‌حل‌های غیرمسلط (k-1) هدفه نسبت به اهداف $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ پیدا کرد، که این امر، مؤثر بودن (k-1) هدفه و مینیمم کردن $f_k(x)$ روی مجموعه (k-1) هدفه غیرمسلط را تضمین می‌کند. به‌جای این فرآیند سلسله مراتبی دو مرحله‌ای، برای یافتن راه‌حل‌های غیرمسلط (k-1) هدفه که هم‌چنین غیرمسلط k هدفه هستند، از یک هدف تکی در مسأله بالا استفاده می‌شود.

در مسأله بالا اگر $\mu_k$ چنان تعریف شود که بیشترین کاهش در $f_k$ به میزان کمترین افزایش در هر یک از اهداف $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ باشد آنگاه یک مجموعه (k-1) هدفه غیرمسلط با حداکثر مقدار $f_k$ فراهم می‌آید.

چون بطور مرتب $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ بهینه می‌شوند لذا سهم $f_{k-1}$ همواره کمتر از $f_1, f_2, \ldots, f_{k-2}$ است، بنابراین می‌توان فقط سهم $f_{k-1}$ را بررسی کرد. بیشترین کاهش در $f_k$ از $f_k{}^U - f_k{}^L$ بیشتر نیست. کمترین افزایش در $f_{k-1}$ کمتر از $\frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_{k-1}{}^U - f_{k-1}{}^L + n)}$ نیست.

با توجه به اینکه بیشترین کاهش در $f_k$ از کمترین افزایش در $f_{k-1}$ بیشتر نیست، پس:

$$f_k{}^U - f_k{}^L < \frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_{k-1}{}^U - f_{k-1}{}^L + n)}$$

چون $\mu_k < 1$ پس: $\mu_k(f_k{}^U - f_k{}^L) < f_k{}^U - f_k{}^L$

درنتیجه

$$\mu_k(f_k{}^U - f_k{}^L) < \frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_{k-1}{}^U - f_{k-1}{}^L + n)}$$

بطور معادل:

$$\mu_k < \frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_{k-1}{}^U - f_{k-1}{}^L + n)(f_k{}^U - f_k{}^L)}$$

از طرفی

$$\frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_k{}^U - f_k{}^L + n)} < \frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_k{}^U - f_k{}^L)}$$

لذا مسأله بالا به‌ازای مقدار مشخصی از $s_k$ با مقدار $\mu_k = \frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_k{}^U - f_k{}^L + n)}$، حد بالایی روی $f_k$ از راه‌حل‌های مؤثر k هدفه فراهم می‌کند.■

**فرآیند** : یافتن تمام راه‌حل‌های غیرمسلط از یک مسأله k هدفه با روش قیود ارتجاعی

۱) قرار دهید

$$\mu_j = \frac{1}{(f_2{}^U - f_2{}^L + n)(f_3{}^U - f_3{}^L + n) \ldots (f_k{}^U - f_k{}^L + n)} \quad j = 2, \ldots, k$$

۲) قرار دهید $s_2 = f_2^U$

۳) قرار دهید $s_j = f_j^U \quad j = 3, \ldots, k$

۴) مسأله ۶ را با $s_j$ $j = 2, \ldots, k$ حل کنید. اگر حل نشدنی بود به مرحله ۷ بروید، در غیراینصورت به مرحله ۵ بروید.

۵) راه‌حل بهینه را $x^*$ قرار دهید.

$$E = E \cup (f_1(x^*), f_2(x^*), \ldots, f_k(x^*))$$

$s_k := s_k - 1$

۶) به مرحله ۳ بروید.

۷) در ازای $j = (k-1), \dots, 3, 2$، اگر $s_j \ge f_j^L$ آنگاه $s_{j+1} = f_{j+1}^U$ و $s_j = s_j - 1$.
درغیر اینصورت توقف کنید.

**جدول ۱. حدود بالایی و پائینی توابع هدف به همراه جایگشت هر یک**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1^U$ =۳۳۸ | ۱ | ۵ | ۳ | ۴ | ۲ |
| $F_1^L$ =۱۲۷ | ۲ | ۴ | ۱ | ۵ | ۳ |
| $F_2^U$ =۳۹۵ | ۲ | ۱ | ۴ | ۳ | ۵ |
| $F_2^L$ =۱۳۷ | ۵ | ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| $F_3^U$ =۴۲۱ | ۴ | ۲ | ۱ | ۳ | ۵ |
| $F_3^L$ =۱۱۶ | ۱ | ۳ | ۴ | ۵ | ۲ |

**جدول ۲. ضرایب تابع هدف برای مثال مسأله تخصیص سه‌هدفه**

| $c^1$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۳۵ | ۳۶ | ۲۹ | ۸ | ۱۳ |
| ۲ | ۲۰ | ۸۴ | ۷۶ | ۶ | ۵۷ |
| ۳ | ۲۶ | ۵۹ | ۷۶ | ۵۴ | ۴۷ |
| ۴ | ۶۲ | ۵۵ | ۳۹ | ۷۸ | ۲ |
| ۵ | ۴۸ | ۹۲ | ۵۷ | ۹۴ | ۳۴ |

| $c^2$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۷۶ | ۷۱ | ۸۳ | ۴۴ | ۴۹ |
| ۲ | ۷۵ | ۴ | ۷۰ | ۳۹ | ۴۵ |
| ۳ | ۴۰ | ۲۸ | ۳۲ | ۷۷ | ۶۵ |
| ۴ | ۶۶ | ۵ | ۹۶ | ۸۰ | ۷۱ |
| ۵ | ۱۸ | ۱۰ | ۴ | ۱۹ | ۷۶ |

| $c^3$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲۸ | ۵۰ | ۷۶ | ۹۶ | ۸۵ |
| ۲ | ۶۸ | ۹۶ | ۲۶ | ۵۵ | ۲۶ |
| ۳ | ۶۶ | ۳۵ | ۵۱ | ۱۴ | ۸۲ |
| ۴ | ۱۷ | ۵۹ | ۷۰ | ۱۵ | ۲۵ |
| ۵ | ۱۲ | ۲۳ | ۹۰ | ۲۶ | ۹۳ |

در مجموع، ۱۲۸ مسأله برای شناسایی ۳۱ راه‌حل مؤثر از مسأله تخصیص سه‌هدفه، حل شده‌است. توجه شود که در این مثال در تعیین $\mu$ مسأله عددی سازی مربوطه فرض شده که $n = 1$. راه حل های مؤثر به دست آمده از این مسأله به صورت جدول (۳) می‌باشد. در ادامه به تحلیل مسأله تخصیص سه‌هدفه با روش قیود ارتجاعی و مقایسه آن با عملکردهای روش‌های جمع وزنی و $\varepsilon$- محدودیت در تخصیص سه‌هدفه پرداخته می‌شود.

## ۴. مثال عددی

به منظور ارزیابی عملکرد فرآیند حل روش قیود ارتجاعی، مسأله تخصیص سه‌هدفه درنظر گرفته می‌شود. این مسأله در فرآیند مذکور حل شده و مسأله تحلیل می‌گردد، سپس دو روش جمع وزنی و $\varepsilon$- محدودیت در حل مسأله به همراه تحلیل عملکرد هر روش ارائه می‌شود و مشکلات اصلی پیش‌رو هر روش در مسأله تخصیص سه‌هدفه مطرح می‌گردد.

مسأله تخصیص با p هدف (pAP[1]) بررسی می‌شود:

$$\min\left(Z_1(X), \dots, Z_p(X)\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{k} x_{ij} \qquad k = 1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i,j = 1, \dots, n$$

بطوریکه تمام ضرایب تابع هدف $c_{ij}^k$ عدد صحیح غیر منفی هستند و $X = (X_{11}, \dots, X_{nn})$ ماتریس متغیرهای تصمیم می‌باشد. مسأله تخصیص سه‌هدفه در نظر گرفته می‌شود. ضرایب تابع هدف به صورت رندوم از توزیع یکنواخت گسسته بین ۱ تا ۱۰۰ تولید می‌شوند. در جدول (۲) شامل ضرایب سه تابع هدف برای تخصیص هر سطر به هر ستون است. هر راه‌حل توسط یک جایگشت از مقادیر شاخص ستون، تخصیص یافته به سطرهای ۱ تا ۵، ارائه می‌شود. برای شناسایی حدود بالایی و پائینی کلی، بایستی مسائل تخصیص تک هدفه بطور انفرادی حل شوند. لذا با راه‌حل‌های تخصیص تک‌هدفه، می‌توان حدود بالایی و پائینی کلی را روی تک تک اهداف شناسایی کرد.

[1] *p- objective Assignment Problem*

**جدول ۳. راه‌حل‌های موثر مساله**

| F۱ | F۲ | F۳ | | R۱ | R۲ | R۳ | R۴ | R۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۲۷ | ۲۲۵ | ۲۸۶ | | ۲ | ۴ | ۱ | ۵ | ۳ |
| ۱۴۴ | ۲۳۹ | ۲۰۳ | | ۳ | ۴ | ۲ | ۵ | ۱ |
| ۱۴۶ | ۲۲۲ | ۳۱۴ | | ۴ | ۱ | ۲ | ۵ | ۳ |
| ۱۵۵ | ۲۴۳ | ۲۴۵ | | ۳ | ۴ | ۱ | ۵ | ۲ |
| ۱۵۷ | ۱۳۷ | ۳۵۵ | | ۵ | ۴ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۱۵۹ | ۲۱۸ | ۲۳۳ | | ۱ | ۴ | ۲ | ۵ | ۳ |
| ۱۶۸ | ۲۳۱ | ۱۹۳ | | ۲ | ۴ | ۳ | ۵ | ۱ |
| ۱۷۷ | ۱۶۳ | ۳۷۳ | | ۴ | ۲ | ۱ | ۵ | ۳ |
| ۱۸۵ | ۲۱۰ | ۲۸۴ | | ۳ | ۴ | ۵ | ۲ | ۱ |
| ۱۸۷ | ۱۹۳ | ۳۹۵ | | ۴ | ۱ | ۵ | ۲ | ۳ |
| ۱۹۰ | ۲۹۲ | ۲۷۶ | | ۳ | ۴ | ۲ | ۱ | ۵ |
| ۱۹۳ | ۲۳۱ | ۱۹۴ | | ۴ | ۳ | ۲ | ۵ | ۱ |
| ۱۹۷ | ۱۸۶ | ۲۸۲ | | ۵ | ۴ | ۲ | ۱ | ۳ |
| ۱۹۸ | ۱۴۳ | ۲۶۲ | | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲۰۳ | ۱۳۸ | ۳۳۷ | | ۴ | ۵ | ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲۰۴ | ۲۳۵ | ۲۳۶ | | ۴ | ۳ | ۱ | ۵ | ۲ |
| ۲۰۶ | ۲۲۸ | ۲۸۶ | | ۱ | ۴ | ۳ | ۲ | ۵ |
| ۲۱۱ | ۲۲۸ | ۱۸۲ | | ۱ | ۴ | ۳ | ۵ | ۲ |
| ۲۱۸ | ۱۶۸ | ۲۸۰ | | ۴ | ۲ | ۳ | ۵ | ۱ |
| ۲۱۹ | ۲۸۶ | ۲۵۸ | | ۱ | ۴ | ۵ | ۳ | ۲ |
| F۱ | F۲ | F۳ | | R۱ | R۲ | R۳ | R۴ | R۵ |
| ۲۲۸ | ۲۶۸ | ۲۲۰ | | ۲ | ۱ | ۳ | ۵ | ۴ |
| ۲۳۲ | ۲۳۲ | ۲۵۳ | | ۱ | ۲ | ۴ | ۵ | ۳ |
| ۲۳۴ | ۲۷۱ | ۱۹۳ | | ۲ | ۳ | ۱ | ۵ | ۴ |
| ۲۳۵ | ۲۱۷ | ۲۸۶ | | ۳ | ۲ | ۱ | ۵ | ۴ |
| ۲۳۶ | ۲۶۳ | ۲۵۳ | | ۳ | ۴ | ۵ | ۱ | ۲ |
| ۲۴۳ | ۲۲۸ | ۱۸۷ | | ۳ | ۵ | ۴ | ۲ | ۱ |
| ۲۴۶ | ۲۱۹ | ۱۹۶ | | ۵ | ۳ | ۴ | ۲ | ۱ |
| ۲۴۹ | ۱۹۶ | ۲۳۱ | | ۵ | ۴ | ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲۵۸ | ۱۸۰ | ۲۸۹ | | ۵ | ۱ | ۳ | ۲ | ۴ |
| ۲۵۹ | ۳۰۴ | ۱۱۶ | | ۱ | ۳ | ۴ | ۵ | ۲ |

مسأله تخصیص سه‌هدفه با روش قیود ارتجاعی به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\begin{aligned} Min \quad & Z_1(X) + \mu_2 s_2 + \mu_3 s_3 \\ & Z_2(X) - s_2 \leq \varepsilon_2 \\ & Z_3(X) - s_3 \leq \varepsilon_3 \\ & s_k \geq 0 \quad k = 2,3 \\ & x \in X \end{aligned}$$

در روش قیود ارتجاعی، زمان‌های محاسباتی شدیداً بستگی به مقدار $\mu$ دارند: با $\mu$ کوچکتر، مسأله سریعتر حل می‌شود. توجه شود که با انتخاب مقادیر بزرگتر از $\mu$، مشکلات محاسباتی روش $\varepsilon$- محدودیت حاصل می‌شود. مقدار $\mu$، نقض محدودیت را کنترل می‌کند و در حکم جریمه نقض می‌باشد. مقدار جریمه کمتر، اجازه می‌دهد نقض‌ها بزرگتر شوند، در حالی که مقدار جریمه بیشتر، نقض‌های کوچکتری را سبب می‌شود. بنابراین مقدار خیلی بزرگ از $\mu$، اثر یکسانی تحت محدودیت سخت خواهد داشت، در حالی که مقادیر خیلی کوچک $\mu$، محدودیت را نادید خواهد گرفت و اجازه می‌دهد تا مسأله سریعاً حل شود.

لذا با توجه به مقدار پیشنهاد شده برای $\mu$ در فرآیند حل قیود ارتجاعی، یعنی مقدار زیر:

$$\mu_k = \frac{1}{\left(f_2^{U} - f_2^{L} + n\right)\left(f_3^{U} - f_3^{L} + n\right) \dots \left(f_k^{U} - f_k^{L} + n\right)}$$

با افزایش n، $n \in \mathbb{Z}$ و $n \geq 1$، مقدار $\mu$ کاهش یافته و باعث تسریع در حل مسأله می‌شود. مسأله تخصیص سه‌هدفه با روش جمع وزنی به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\min \ \lambda_1 Z_1(x) + \lambda_2 Z_2(x) + \lambda_3 Z_3(x)$$
$$x \in X.$$

با حل مسأله تخصیص سه‌هدفه با روش جمع وزنی با تعداد زیادی از راه‌حل‌ها مواجه می‌شویم، همچنین در برخی راه‌حل‌ها، فواصل پارامتر $\lambda$ خیلی کوچک‌اند. این نشان می‌دهد، راه‌حل‌ها خیلی حساس به تغییرات کوچک $\lambda$ هستند، که این عملاً مناسب نیست. توجه شود که در روش جمع وزنی هیچ شرط کافی برای وجود راه‌حل‌های مؤثر ارائه نشده‌است. اگرچه وزن‌های مثبت همواره راه‌حل‌های بطورمناسب مؤثر را نتیجه می‌دهند، برخی وزن‌های صفر منجر به کسب راه‌حل‌های مؤثر با معاوضات بیکران می‌شوند. اگرچه بردارهای وزن $\lambda \geq 0$ ممکن است نقاط بطور ضعیف مؤثر را موجب شود، از طرفی امکان ارائه توصیفی از راه‌حل‌های مؤثر وجود ندارد. لذا روش جمع وزنی تمام راه‌حل‌های مؤثر مسأله را پیدا نمی‌کند. مسأله تخصیص سه‌هدفه با روش $\varepsilon$- محدودیت به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \quad Z_1(X) \\ \text{s.t:} \quad &Z_2(X) \leq \varepsilon_2 \\ &Z_3(X) \leq \varepsilon_3 \\ &x \in X. \end{aligned}$$

روش $\varepsilon$- محدودیت نیازمند زمان‌های محاسباتی غیرمعقول می‌باشد. برای راه‌حل مؤثر $x^*$ در روش $\varepsilon$- محدودیت، در اثبات اینکه وجود دراد برخی $\varepsilon$ ها بطوریکه $x^*$ بهینه است، بایستی فقط $\varepsilon_k = f_k(x^*)$ انتخاب شود. اما در عمل، این مقدار ناشناخته است چرا که هنوز $x^*$ مجهول است. بنابراین روش $\varepsilon$ - محدودیت برای بررسی اینکه آیا $x^*$ مؤثر است یا نه، مناسب است.

برای یک $\varepsilon$ مفروض، اگر مسأله $\varepsilon$- محدودیت شدنی باشد، آنگاه راه‌حل بهینه بطور ضعیف مؤثر است. تمام راه‌حل‌های مؤثر، راه‌حل‌های بهینه از مسائل $\varepsilon$- محدودیت با انتخاب مناسب از $\varepsilon$ هستند. اما از طرفی به دلیل تغییر تطبیقی از $\varepsilon$ با سه‌هدف، زمان برای پیدا کردن تمام نقاط مؤثر، پیش‌رونده مستقیم است.

لازم است که به این نکته هم توجه شود که روش قیود ارتجاعی در رابطه با مسأله پیچیده وابسته به روش‌های حل نوع تک‌هدفه MOIP، دارای قدرت اعمال بهتری است. در زمان حل مسأله برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه کلی، محدودیت‌های روی اهداف، فقط مجموعه دیگری از محدودیت‌ها هستند و سود اندکی در استفاده قیود ارتجاعی نسبت به قیود سخت وجود دارد. حقیقتاً، نکته اینجا است که روش قیود ارتجاعی در حد امکان، باعث سودمندی ساختار مسأله تک‌هدفه می‌شود، در حالیکه روش $\varepsilon$- محدودیت آن را تخریب می‌کند.

## ۵. بحث و نتیجه‌گیری

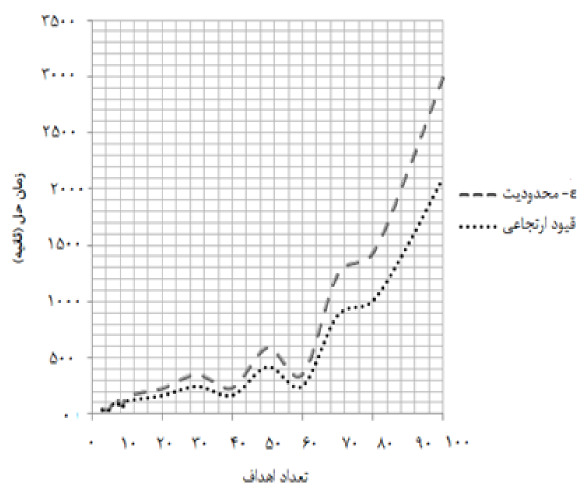
در این مقاله، نشان داده شد که روش‌های عددی‌سازی رایج برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح چندهدفه قادر به پیدا کردن تمام راه‌حل‌های مؤثر نیستند و همچنین به‌کارگیری آنها در حل کاربردهای جهان واقعی، به‌شدت مشکل است. از جمله روش‌های عددی‌سازی رایج، روش جمع وزنی و روش $\varepsilon$- محدودیت می‌باشد، که هرکدام دارای مزایا و معایبی بودند که استفاده از هر یک به‌تنهایی، ما را به هدف غایی خود که همانا پیدا کردن تمام راه‌حل‌های مؤثر و حتی‌الامکان به روش ساده، نمی‌رساند.

سپس تکنیک جدید عددی‌سازی، روش قیود ارتجاعی را معرفی شد که این روش ویژگی‌های مفید روش‌های $\varepsilon$- محدودیت و جمع وزنی را ترکیب کرده و از برخی مشکلات آنها اجتناب می‌ورزد. بعد از آن فرآیندی را روی روش قیود ارتجاعی پیاده‌سازی گردید تا عملاً یافتن راه‌حل‌های مؤثر، محسوس‌تر شوند. روش قیود ارتجاعی از طریق این فرآیند، روی مسائل برنامه‌ریزی عددصحیح دوهدفه،سه‌هدفه و چندهدفه پیاده‌سازی شده‌است. با حل مسأله تخصیص سه‌هدفه از طریق فرآیند مذکور، نشان داده شد که روش قیود ارتجاعی دارای توانایی بالقوه‌ای در پیدا کردن راه‌حل‌های مؤثر نسبت به دیگر روش‌های رایج عددی‌سازی می باشد. در روش قیود ارتجاعی تمام راه‌حل‌های مؤثر مسأله برنامه‌ریزی عددصحیح چندهدفه پیدا می‌شود و اگر به‌طور مناسبی بکار رود باعث کاهش تلاش محاسباتی مورد نیاز برای حل مسأله عددی‌سازی شده می‌گردد.

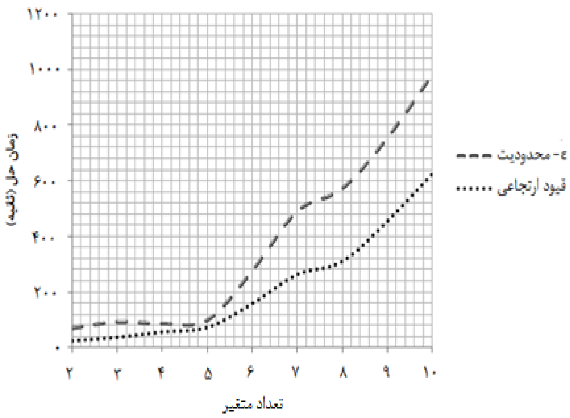
در زیر تحلیل‌های زمانی روی دو روش قیود ارتجاعی و $\varepsilon$- محدودیت بررسی می‌شوند. برای این تحلیل‌ها، از حل مساله تخصیص چندهدفه با استفاده از نرم افزار مطلب کمک گرفته شده‌است. همانطور که قبلاً هم اشاره شد، روش قیود ارتجاعی

حاصل اشتراک دو روش $\varepsilon$- محدودیت و جمع وزنی می‌باشد، اما این روش، شباهت بیشتری به روش $\varepsilon$- محدودیت و بالطبع تفاوت بیشتری با روش جمع وزنی دارد، زیرا در هر دو روش عددی سازی، قیود ارتجاعی و $\varepsilon$- محدودیت، یکی از اهداف در تابع هدف قرار گرفته و بقیه اهداف به محدودیت‌ها منتقل می‌شوند. ولی در روش جمع وزنی، تمامی اهداف به‌صورت جمع وزنی در تابع هدف قرار می‌گیرند، بدون اینکه محدودیتی به فضای شدنی اضافه شود. با اندکی تامل، پیچیدگی حل روش جمع وزنی، کاملاً محرز است.

زیرا از طرفی، وزن‌دهی مناسب هر هدف بایستی توسط تصمیم‌گیرنده صورت گیرد و از طرف دیگر، راه‌حل‌ها بسیار به تغییرات وزن‌ها، حساس هستند. از این‌رو، افزایش تعداد اهداف، باعث افزایش مهار نشدنی زمان حل مسأله می‌گردد. در شکل (۱)، دو روش قیود ارتجاعی و $\varepsilon$- محدودیت از نظر زمان اجرا (حل) با افزایش تعداد اهداف، مقایسه شده‌اند. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود، با افزایش تعداد اهداف، زمان حل هر دو روش نیز افزایش می‌یابد. میزان اختلاف زمانی دو روش مقایسه، تا حدود ۶۰ هدف کم و قابل مهار می‌باشد، اما از آن به‌بعد، اختلاف زمانی دو روش، افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد. در شکل (۲)، تحلیل زمانی دو روش مذکور، با افزایش تعداد متغیرها بررسی شده‌اند. در اینجا نیز با افزایش تعداد متغیرها، زمان حل هر دو روش افزایش می‌یابد. میزان اختلاف زمانی دو روش مقایسه، تا حدود ۶ متغیر جزیی است، اما از آن به‌بعد، اختلاف زمانی دو روش افزایش می‌یابد. برتری روش قیود ارتجاعی در این مقایسات کاملاً محسوس است




**شکل ۱. مقایسه دو روش $\varepsilon$– محدودیت و قیود ارتجاعی با افزایش تعداد اهداف**




**شکل ۲. مقایسه دو روش $\varepsilon$– محدودیت و قیود ارتجاعی با افزایش تعداد متغیرها**

روش قیود ارتجاعی به استفاده از شکلهای فوق با روش ε- محدودیت کقایسه گردید. در این قسمت می‌خواهیم این روش را با معتبر دیگری به نام روش ۲ فازی مقایسه نماییم. جهت مقایسه روش پیشنهادی با روش دو فازی، مسأله دیگری با سه تابع هدف به صورت زیر درنظر بگیرید.

**جدول ۴. ضرایب تابع هدف برای مسأله تخصیص سه‌هدفه**

| $c^1$ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|
| ۱ | 5 | 4 | 7 |
| ۲ | 3 | 5 | 7 |
| ۳ | 8 | 4 | 2 |
| ۴ | 5 | 2 | 5 |

| $c^2$ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|
| ۱ | 3 | 6 | 2 |
| ۲ | 3 | 7 | 3 |
| ۳ | 2 | 7 | 4 |
| ۴ | 6 | 3 | 5 |

| $c^3$ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|
| ۱ | 2 | 5 | 3 |
| ۲ | 3 | 4 | 3 |
| ۳ | 3 | 5 | 2 |
| ۴ | 4 | 7 | 3 |

باید توجه داشت بیشتر روش‌های دقیق منتشر شده برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی چندهدفه بطور ضمنی از نوع دوهدفه استفاده می‌کنند و نمی‌توانند به‌سادگی برای بیشتر از دوهدف سازمان‌دهی شوند. مقالاتی که بطور صریح در ارتباط با سه (یا بیشتر) هدف باشند نسبتاً نادر هستند.

هر راه‌حل توسط یک جایگشت از مقادیر شاخص ستون، تخصیص یافته به سطرهای ۱ تا ۴، ارائه می‌شود.

جدول زیر شامل حدود بالایی و پائینی کلی هر سه هدف می باشد.

**جدول ۵. حدود بالایی و پائینی توابع هدف**

| | | |
|---|---|---|
| $f_1^U=26$ | $f_2^U=21$ | $f_3^U=18$ |
| $f_1^L=9$ | $f_2^L=11$ | $f_3^L=13$ |

جزئیات تکرار فرایند پیشنهادی در جدول (۶) ارائه شده است که شامل تعداد مسائل حل شده و مقادیر $b_2$ و $b_3$ می باشد و جدول (۷) راه حل های موثر را لیست می کند.

**جدول ۶. مراحل اجرای فرایند حل مثال تخصیص سه هدفه**

| $b_3\le18$ | f1 | f2 | f3 | $b_2\le$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 13 | 16 | 21 |
| 2 | 19 | 11 | 17 | 12 |
| 3 | infeasible | | | 10 |
| | max(f3)= 17 | | | |

| $b_3\le16$ | f1 | f2 | f3 | $b_2\le$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 13 | 16 | 21 |
| 5 | infeasible | | | 12 |
| | max(f3)= 16 | | | |

| $b_3\le15$ | f1 | f2 | f3 | $b_2\le$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 14 | 20 | 14 | 21 |
| 7 | 14 | 18 | 15 | 19 |
| 8 | 20 | 17 | 14 | 17 |
| 9 | infeasible | | | 16 |
| | max(f3)= 15 | | | |

| $b_3\le14$ | f1 | f2 | f3 | $b_2\le$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 14 | 20 | 14 | 21 |
| 11 | 18 | 18 | 14 | 19 |
| 12 | 20 | 17 | 14 | 17 |
| 13 | infeasible | | | 16 |
| | max(f3)= 14 | | | |

| $b_3\le13$ | f1 | f2 | f3 | $b_2\le$ |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 18 | 20 | 13 | 21 |
| 15 | infeasible | | | 19 |
| | max(f3)= 13 | | | |

| $b_3\le12$ | f1 | f2 | f3 | $b_2\le$ |
|---|---|---|---|---|
| 16 | infeasible | | | 21 |

در مجموع، ۱۶ مسأله برای شناسایی ۷ راه‌حل مؤثر از مسأله تخصیص سه‌هدفه، حل شده‌است.

توجه شود که در این مثال در تعیین $\mu$ مسأله عددی سازی مربوطه فرض شده که $\pi=1$.

**جدول ۷. راه‌حل‌های موثر مساله تخصیص سه هدفه**

| F۱ | F۲ | F۳ |
|---|---|---|
| ۱۹ | ۱۱ | ۱۷ |
| ۹ | ۱۳ | ۱۶ |
| ۱۴ | ۱۸ | ۱۵ |
| ۱۴ | ۲۰ | ۱۴ |
| ۲۰ | ۱۷ | ۱۴ |
| ۱۸ | ۲۰ | ۱۳ |
| ۱۸ | ۱۸ | ۱۴ |

روش ۲- فازی یکی از روش‌های دقیق حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی چندهدفه، می‌باشد [۱۵]. الگوریتم حل این روش با پیدا کردن تمام راه‌حل‌های مؤثر برای مسأله با K-1 هدف به منظور محاسبه نقطه سمت‌القدم از مسأله با K هدف شروع می‌شود. سپس زیرفضاها توسط این راه‌حل‌ها مشخص می‌شوند. برای هر زیرفضا محوری از تحقیق محاسبه‌شده و یک مسأله تک‌هدفه حل می‌شود. بعد از آن راه‌حل جدیدی پیدا شده، فضای جستجو تقسیم می‌شود و برخی جستجوهای جدید شروع می‌شوند. این روش زمانی متوقف می‌شود که تمام فضای جستجو امتحان شود و هیچ راه‌حل جدیدی یافت نشود. با این روش، فضای جستجو به منظور رسیدن به زیرفضای مناسب تقسیم می‌شود و جستجوی تک‌هدفه برای هر راه‌حل موثر مورد نیاز است. بنابراین با توجه به اینکه برای یک مسأله مفروض، جستجوهای تک‌هدفه زمان‌بر هستند، زمان زیادی برای حل نمونه‌هایی از این مسأله مورد نیاز است.

با حل مسأله ۲ فازی و با توجه به توضیحات فوق با توجه به اینکه برای مسأله تک تک زیرفضاهای مسأله تک هدفه را پیدا کرده و راه حل مؤثر را می‌یابد، زمان حل و یافتن راه حل های مؤثر در این روش در مقایسه با روش قیود ارتجاعی که که برای یافتن راه حل های مؤثر فقط ۱۶ مسأله را حل نمود، تقریباً $\binom{3}{2}\binom{2}{1}$ یعنی در این مثال حدود ۶ برابر است. البته از مزایای روش ۲ فازی اینست که پس از حل کامل مدل راه حلهای مؤثر شناسایی شده را تماماً بازیابی می کند در حالیکه روش قیود ارتجاعی ممکن است هنوز دارای راه حلهای مؤثری باشد که تاکنون شناسایی نشده است.

## مراجع


[1] Ehrgott, M., Gandibleux, X., *Bound Sets for Biobjective Combinatorial Optimization Problems*, Computers & Operations Research, September 2007,Vol. 34, Issue 9, pp. 2674-2694.

[2] Przybylski. A., Gandibleux. X., Ehrgott. M., *The Biobjective Integer Minimum Cost Flow Problem—Incorrectness of Sedeño-Noda and Gonzàlez-Martin's Algorithm*, Computers & Operations Research, May 2006, Vol. 33, Issue 5, pp. 1459-1463.

[3] Klein, D., Hannan, E., *An Algorithm for the Multiple Objective Integer Linear Programming Problem,* European Journal of Operational Research, 1982, 9, 378–385.

[4] Sylva, J., Crema, A., *A Method for Finding the Set of Non-Dominated Vectors for Multiple Objective Integer Linear Programs,* European Journal of Operational Research, 2004, 158, pp. 46–55.

[5] Laumanns, M., Thiele, L., Zitzler, E., *An Efficient Adaptive Parameter Variation Scheme for Metaheuristics Based on the Epsilon-Constraint Method.* European Journal of Operational Research, 2006, 169, pp. 932–942.

[6] Guu, S.M., Huang, N.J., *Scalarization Approaches for Set-Valued Vector Optimization Problems and Vector Variational Inequalities,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 15 August 2009,Volume 356, Issue 2, pp. 564-576.

[7] Ehrgott, M., *A Discussion of Scalarization Techniques for Multiple Objective Integer Programming*, Ann Oper Res, 2006, 147:343–360.

[8] Jiménez, B., Novo, V., Sama, M., *Scalarization and Optimality Conditions for Strict Minimizers in Multi Objective Optimization Via Contingent Epiderivatives,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 15 April 2009, Volume 352, Issue 2, Pages 788-798.

[9] Hernández, E., Rodríguez-Marín, L., *Nonconvex Scalarization in Set Optimization with Set-Valued Maps* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1 January 2007, Volume 325, Issue 1, Pages 1-18.

[10] Gutiérrez, C., Jiménez, B., Novo, V., *Optimality Conditions Via Scalarization for a New ε-Efficiency Concept in Vector Optimization Problems,* European Journal of Operational Research, 16 February 2010,Volume 201, Issue 1, Pages 11-22.

[11] Geoffrion, A.M., *Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 22:618–630.

[12] Chankong, Haimes, Y.Y., *Multi objective Decision Making Theory and Methodology*, Elsevier Science, New York, 1983.

[13] Ehrgott, M., Ryan, D.M., *Constructing Robust Crew Schedules with Bi Criteria Optimization*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 2002, 11(3): 139–150.

[14] Ehrgott, M., Gandibleux, X., *A Survey and Annotated Bibliography of Multi Objective Combinatorial Optimization*, OR Spektrum, 2000, 22: 425–460.

[15] Przybylski, A., Gandibleux, X., Ehrgott, M., *A Two Phase Method for Multi-Objective Integer Programming and its Application to the Assignment Problem with Three Objectives*, Discrete Optimization, 2010, Vol. 7, pp. 149_165.