



Calculate the Uncertainty Interval Based on Entropy and Dempster Shafer Theory of Evidence

E. Pasha^{*}, H. Mostafaei, M. Khalaj, F. Khalaj

Eainollah Pasha, Professor, Kharazmi University, Faculty of Mathematical and Computer Science

Hamidreza Mostafaei, Assistant Professor, The Islamic Azad University, North Tehran Branch, hmostafaei@yahoo.com

Mehran Khalaj, Phd Candidate on Engineering at Azad University, mehran5_k@yahoo.com

Fereshteh Khalaj, student the MA statistics, fereshteh_khalaj61@yahoo.com

Keywords

Epistemic uncertainty
Aleatory uncertainty
Dempster-Shafer theory
Shannon entropy

ABSTRACT

Dempster Shafer theory and entropy are two methods for representation and quantitative measurement of the uncertainty in information systems. Dempster Shafer theory, as introduced by Dempster using the concept of upper and lower probabilities, extended later by Shafer. Entropy is a measure of uncertainty as a basic concept in the information theory. Entropy can be applied as an uncertainty measurement of the systems in specific situation. In this paper, a new method has been proposed for measurement of the uncertainty upper and lower bound with the combination of mathematical models of entropy and Dempster Shafer theory. According to this analysis maximum and minimum of the uncertainty are calculated.

© 2013 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 24, No. 2, All Rights Reserved

^{*} **Corresponding author.** Eainollah Pasha
Email: Pasha@saba.tmu.ac.ir

محاسبه فاصله عدم قطعیت بر پایه آنتروپی شانون و تئوری دمپستر - شافر از شواهد

عین اله پاشا^{*}، حمیدرضا مصطفایی، مهران خلج و فرشته خلج

چکیده:

تئوری دمپستر شافر و آنتروپی دو روش مهم در اندازه‌گیری و به کمیت درآوردن عدم قطعیت سیستم‌های اطلاعاتی است. تئوری دمپستر شافر با استفاده از مفهوم احتمالات بالایی و پایینی توسط دمپستر پایه‌گذاری شد و سپس شافر آن را به عنوان یک نظریه ارائه داد. آنتروپی نیز مفهومی اساسی در تئوری اطلاعات به کار گرفته می‌شود. در این مقاله روشی جدید برای اندازه‌گیری کران‌های بالایی و پایینی عدم قطعیت با ترکیب دو معیار آنتروپی و تئوری دمپستر شافر ارائه شده است. بر اساس این روش، ماکزیمم و مینیمم عدم قطعیت محاسبه شده است.

کلمات کلیدی

عدم قطعیت epistemic^۱،
عدم قطعیت aleatory^۲،
تئوری دمپستر شافر،
آنتروپی شانون

۱. مقدمه

عدم قطعیت مفهومی است که تصمیم‌گیرنده همواره در فرایند تصمیم‌گیری با آن روبرو است. به علت وجود عدم قطعیت، جزئیاتی غیر قطعی در مسأله بیان می‌شود که به واسطه آن نمی‌توان پارامترهای سیستم را به درستی تعیین کرد. مدل‌های ریاضی متعددی برای بررسی عدم قطعیت سیستم‌ها و فرآیندها ارائه شده است و در آنها تلاش شده تا عدم قطعیت حتی الامکان کاهش پیدا کند و از طریق آن اطلاعات کیفی و کمی در مورد یک موضوع خاص کنترل شده و خروجی‌های مدل قابل ارزیابی و کنترل شوند.

تئوری عدم قطعیت به عنوان گرایشی در ریاضیات، به مطالعه عدم قطعیت در سیستم‌ها می‌پردازد [۱۰]. شکل‌های مختلفی از عدم قطعیت وجود دارد و خیلی ضروری است که قبل از هر نوع تصمیمی نوع آن بر اساس مقدار و صحت اطلاعات در دسترس شناخته و گروه‌بندی شود، به طور کلی انواع مختلف عدم قطعیت برخاسته از دو منبع متفاوت است که عموماً تحت عناوین عدم قطعیت epistemic و aleatory طبقه‌بندی می‌شوند [۱].

عدم قطعیت aleatory یا عدم قطعیت مربوط به تنوع طبیعی^۲، اشاره به تصادفی بودن مشاهدات در طبیعت دارد که مربوط به ذات طبیعت می‌باشد و با عناوین عدم قطعیت بیرونی، عدم قطعیت ذاتی، عدم قطعیت هدف، عدم قطعیت تصادفی، عدم قطعیت اتفاقی، عدم قطعیت غیر قابل تقلیل، عدم قطعیت بینادی، عدم قطعیت دنیای واقعی، شناخته می‌شود. عدم قطعیت epistemic یا عدم قطعیت دانش^۳، وضعیت دانش یک سیستم فیزیکی و توانایی در اندازه‌گیری و به مدل درآوردن عدم قطعیت را بررسی می‌کند. این نوع عدم قطعیت با عنوان‌های عدم قطعیت تابعی، عدم قطعیت داخلی، عدم قطعیت ذهنی،

تاریخ وصول: ۸۹/۷/۲۶

تاریخ تصویب: ۹۰/۱۲/۸

* نویسنده مسئول مقاله: دکتر عین اله پاشا، استاد، دانشگاه تربیت معلم

Pasha@saba.tmu.ac.ir

دکتر حمیدرضا مصطفایی، استادیار دانشگاه تربیت معلم،

harmostafaei@yahoo.com

مهران خلج، دانشجوی دکتری دانشگاه علوم تحقیقات

mehran5_k@yahoo.com

فرشته خلج، دانشجوی فوق لیسانس، fereshteh_khalaj61@yahoo.com

^۱ شناختیک

^۲ کتره ای

^۲ Natural variability

^۳ Knowledge uncertainty

بطوریکه ساختار باور تئوری شاهد به مدل احتمال کلاسیک مربوط می شود [۱۱]. از مفاهیم مقدماتی موجود در رابطه با شواهد، می توان به نکات زیر اشاره کرد:

۲-۱. چارچوب تشخیص

فرض کنید θ یک مجموعه متناهی از عناصر است، یک عنصر می تواند یک فرضیه، یک هدف، یا موردی از وضعیت یک سیستم باشد. θ را چارچوب تشخیص می نامیم. مجموعه توان θ ، به وسیله $\Omega(\theta)$ معین می شود. به عنوان مثال فرض کنید $\theta = \{a, b, c\}$

$$\Omega(\theta) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \quad (۱)$$

Φ مجموعه تهی که بر وضعیت سیستم بی نقص دلالت می کند. $A = \{a, b\}$ زیر مجموعه ای از θ است، یعنی $A \subset \theta$. نقص سیستم در a یا b را بیان می کند و θ نقص سیستم در a ، b یا c را بیان می کند.

۲-۲. تابع جرم، عناصر کانونی و عناصر هسته اصلی

تابع جرم را با m مشخص می کنند که به صورت زیر تعریف می شود:

$$m: \Omega(\theta) \rightarrow [0, 1] \quad (۲)$$

$$m(\Phi) = 0 \quad (۳)$$

$$\sum_{A \subset \Omega(\theta)} m(A) = 1 \quad (۴)$$

تابع جرم m را یک تابع تخصیص احتمال اولیه (bpa)^۱ می نامند. $m(A)$ بیانگر نسبت سهم مجموعه A از تمام شواهد مربوطه و در دسترس است و از ادعایی که در مورد عنصر خاصی از θ و متعلق به مجموعه A است، (متعلق به مجموعه A و نه به زیرمجموعه خاصی از A)، پشتیبانی می کند. در بررسی وضعیت دارای نقص سیستم، $m(A)$ می تواند به عنوان درجه باوری مطرح شود که توسط مشاهده مربوط به نقصی خاص، حاصل شده است. ممکن است اطلاعات و یا شواهد متفاوت، درجات متفاوتی از باور را نسبت به نقص داده شده، ایجاد کنند. هر زیر مجموعه A از θ یک عنصر کانونی نامیده می شود به

نامامت، شناخته می شود [۴]. غالباً از تئوری احتمال برای نمایش عدم قطعیت aleatory و epistemic استفاده می شود [۷-۵] و برای نمایش عدم قطعیت epistemic از تئوری احتمال، تئوری دمپستر شافر، تجزیه و تحلیل بازه ها، تئوری امکان و مجموعه های فازی استفاده می شود [۱۴].

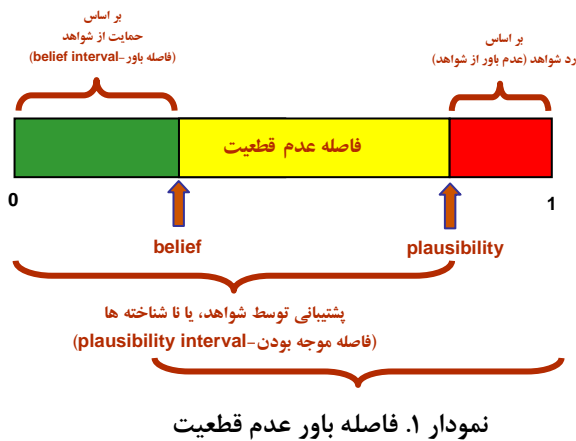
مزیت مهم تئوری دمپستر شافر این است که با استفاده از آن می توان عدم قطعیت epistemic را بررسی و کمی کرد. در این تئوری قوانینی برای ترکیب اطلاعات از منابع مختلف ارائه شده است که معروف ترین آنها قانون ترکیب دمپستر می باشد. با توجه به اینکه اطلاعات مورد استفاده در سیستم ها بر پایه تحلیل آماری است، می توان از مدل عدم قطعیت احتمالی برای مدیریت اطلاعات و نمایش ریاضی عدم قطعیت سیستم ها استفاده کرد. در این خصوص تئوری دمپستر شافر به عنوان ابزاری برای آنالیز عدم قطعیت در تئوری احتمالات نادقیق، استفاده می شود [۱۴]. همچنین تئوری مدل های آماری بازه ای [۸]، تئوری احتمالات بازه ای [۱۳] از جمله چارچوب هایی است که کران های احتمالات بالایی و پایینی را در احتمالات نادقیق مهیا می کنند. در بحث بررسی عدم قطعیت آنتروپی نیز کاربرد دارد، آنتروپی یک اندازه کمی از درجه عدم قطعیت ارائه می دهد. آنتروپی فازی با الهام گرفتن از آنتروپی شانون برای تعیین عدم قطعیت ناشی از کمبود اطلاعات و حل مشکلات تصمیم گیری پیشنهاد شده است [۲]. در این زمینه آنتروپی از سه دیدگاه آنتروپی ماکزیمم، آنتروپی مینیمم و مقدار کل آنتروپی در موارد متناهی و غیر متناهی مورد بررسی قرار می گیرد [۹].

این مقاله در پنج بخش ارائه می شود. در بخش اول مقدمه بیان شد، در بخش دوم تئوری دمپستر شافر با استفاده از مثالی کاربردی توضیح داده می شود. در بخش سوم آنتروپی به عنوان معیار بررسی عدم قطعیت در احتمالات کلاسیک توضیح داده می شود. در بخش چهارم با استفاده از یک روش ابتکاری دو معیار آنتروپی و تئوری دمپستر شافر با هم ترکیب و روشی جدید جهت بررسی عدم قطعیت پیشنهاد شده است. بخش پنجم مربوط به نتیجه گیری می شود.

۲. تئوری دمپستر شافر

نظریه ریاضی شواهد، توسط دمپستر (۱۹۶۷) معرفی شد [۳] و به وسیله شافر (۱۹۷۶) بسط داده شده است [۱۱]. این تئوری با بحث درباره باورهای موجود از یک وضعیت و یا سیستمی از وضعیت ها، حائز اهمیت می باشد. باورها در مورد پیشامدها یکسان نیستند اما به کمک این نظریه می توان شواهد موجود از وضعیت ها را در یک روش مشابه بررسی و ترکیب کرد. تئوری دمپستر شافر بر اساس باوری است که از شواهد نتیجه می شود

¹ Basic probability assignment



جدول ۱. بازه های باور و مفاهیم مرتبط به هر بازه

[0,0]	مطمئنا هیچ حمایتی از فرضیه نمی شود.
[1,1]	از فرضیه به طور مطلق پشتیبانی می کنیم.
[0,1]	اطلاعات مطلقا ناشناخته است و نمی توان استدلالی از شواهد داشت.
حمایت از فرضیه و تصمیم گیری	
[0,3,1]	متمایلیم از فرضیه حمایت کنیم.
[0,0,6]	حمایت از فرضیه، کاهش می یابد.

۲-۵. برخی از خواص توابع باور و موجه بودن:

$$\begin{cases} Bel(\Phi) = Pl(\Phi) = 0 \\ Bel(A) + Bel(\bar{A}) \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} Pl(A) \geq Bel(A) \\ Pl(A) + pl(\bar{A}) \geq 1 \end{cases} \quad (11)$$

اگر $A \subset B$ آنگاه:

$$\begin{cases} Pl(A) < Pl(B) \\ Bel(A) < Bel(B) \end{cases} \quad (12)$$

۲-۶. قوانین ترکیب شواهد

فرض کنید m_1 و m_2 دو تابع جرم به دست آمده از دو منبع اطلاعات متفاوت، بر اساس اطلاعات در دسترس باشد. چارچوب تشخیص θ برای هر دو منبع اطلاعاتی، یکسان است. مطابق با قانون متعامد دمپستر [۱۱] داریم؛

طوریکه $m(A) > 0$ ، همچنین $c = \bigcup_{m(A) \neq 0} A$ یک عنصر هسته ای

از تابع جرم در θ نامیده می شود.

۲-۳. توابع باور^۱ و موجه بودن^۲

تابع باور به صورت زیر تعریف می شود:

$$Bel: \Omega(\theta) \rightarrow [0,1] \quad (5)$$

$$Bel(A) = \sum_{B \subset A} m(B) \quad (6)$$

تابع موجه بودن به صورت زیر تعریف می شود:

$$Pl(A): \Omega(\theta) \rightarrow [0,1] \quad (7)$$

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}) = \sum_{B \cap A \neq \Phi} m(B) \quad (8)$$

تابع $Bel(A)$ مقدار کل احتمالی که باید در میان عناصری از A باشد را اندازه گیری می کند و به معنای حتمیت و معنی داری از باور A و به منزله حد پایینی روی احتمال A است.

تابع $pl(A)$ حداکثر مقدار احتمالی را که می تواند در میان عناصر A توزیع شود را اندازه گیری می کند. $pl(A)$ درجه باور کلی مربوط به A را توصیف می کند و به منزله تابع حد بالایی روی احتمال A است.

۲-۴. بازه باور^۳ $[Bel(A), Pl(A)]$

این فاصله، فاصله باور عدم قطعیت را منعکس می کند و اندازه فاصله $Pl(A) - Bel(A)$ نادانسته های مربوط به A را توصیف می کند. همانطور که در جدول (۱) به شرح ذیل ملاحظه می شود، بازه های باور متفاوت معنای متفاوتی را در بر خواهند داشت. تابع موجه بودن به واسطه تابعی به نام شک^۴، به تابع باور مرتبط شده و بر طبق رابطه زیر به صورت تعریفی از باور بیان می شود:

$$\begin{cases} Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}) \\ Pl(A) = 1 - Doubt(A) \end{cases} \quad (9)$$

1 belief
2 plausibility
3 Belief interval
4 Doubt

می‌باشد. با در نظر گرفتن سه قطعه تولید شده a, b, c توسط یک شرکت تولید قطعات خودرو، چارچوب تشخیص به صورت a, b, c در نظر گرفته می‌شود. چارچوب تشخیص θ شامل ۸ زیرمجموعه ϕ (مجموعه تهی)، $\{a\}$ و $\{b\}$ و $\{c\}$ و $\{a, b\}$ و $\{b, c\}$ و $\{a, c\}$ و $\{a, b, c\}$ می‌باشد. بنا به شواهد، احتمال نقص در کارکرد هر یک از این مجموعه‌ها، توسط کارشناسان به صورت گزارش شده است.

اطمینان از نقص قطعه a ، 70% و در نقص قطعه a یا b 20% است، بنابراین نادانسته ما 10% می‌باشد. عناصر کانونی فرضیه A به صورت، $m(A)_a = 0.7$ ، $m(A)_{a,b} = 0.2$ است. بنابراین $m_\theta(A) = 0.1$ زیرا $m(A)_a + m(A)_{a,b} + m(A)_\theta = 1$ می‌باشد. تابع تخصیص اولیه برای زیرمجموعه‌های دیگر صفر خواهد بود. توابع باور به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} bel(A)_a &= m(A)_a = 0.7 \\ bel(A)_b &= m(A)_b = 0.0 \\ bel(A)_c &= m(A)_c = 0.0 \\ bel(A)_{a,b} &= m(A)_a + m(A)_b + m(A)_{a,b} = \\ &0.7 + 0.0 + 0.2 = 0.9 \\ bel(A)_{a,c} &= m(A)_a + m(A)_c + m(A)_{a,c} = 0.7 \\ bel(A)_{a,b,c} &= m(A)_a + \dots + m(A)_{b,c} = 1.0 \\ bel(A)_{b,c} &= m(A)_b + m(A)_c + m(A)_{b,c} = 0.0 \end{aligned}$$

توابع موجه بودن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} pl(A)_a &= m(A)_a + m(A)_{a,b} + m(A)_{a,c} + m(A)_\theta = 1.0 \\ pl(A)_b &= m(A)_b + m(A)_{a,b} + m(A)_{b,c} + m(A)_\theta = 0.3 \\ pl(A)_c &= m(A)_c + m(A)_{a,c} + m(A)_{b,c} + m(A)_\theta = 0.1 \\ pl(A)_{a,b} &= m(A)_a + m(A)_b + m(A)_{a,b} + \\ &m(A)_{a,c} + m(A)_{b,c} + m(A)_\theta = 1.0 \\ pl(A)_{a,c} &= m(A)_a + m(A)_c + m(A)_{a,b} + \\ &m(A)_{a,c} + m(A)_{b,c} + m(A)_\theta = 1.0 \\ pl(A)_{b,c} &= m(A)_b + m(A)_c + m(A)_{a,b} + \\ &m(A)_{a,c} + m(A)_{b,c} + m(A)_\theta = 0.3 \end{aligned}$$

نتایج حاصل از بررسی احتمال نقص قطعات توسط دو کارشناس B و C به صورت زیر خلاصه شده است:

$$\begin{aligned} m_1(B)_a &= 0.7 & m_2(C)_b &= 0.4 \\ m_1(B)_{a,b} &= 0.2 & m_2(C)_{b,c} &= 0.2 \\ m_1(B)_\theta &= 0.1 & m_1(B)_\theta &= 0.4 \end{aligned}$$

$$m(\Phi) = 0 \quad (13)$$

$$m(A) = \frac{1}{1-k} \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

بطوریکه:

$$k = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C) > 0 \quad (14)$$

k جرم احتمال پایه مربوط ناسازگاری میان منابع شواهد را ارائه می‌دهد. طبق رابطه (۱۴)، k از مجموع ضرب توابع جرم تمام زیر مجموعه‌هایی که اشتراک آنها تهی است، به دست می‌آید. عموماً k را به عنوان اندازه ناسازگاری بین منابع اطلاعات تفسیر می‌کنند. مقدار بزرگتر k بیانگر ناسازگاری بیشتر منابع است. مخرج $1-k$ در تساوی (۱۲)، فاکتور نرمال کردن^۱ است. m نیز، تابع جرم در چارچوب تشخیص یکسان θ می‌باشد.

توجه کنید که جمع متعامد $m = m_1 \oplus m_2$ ، ترکیب m_1 و m_2 را نشان می‌دهد و اطلاعات مشترکی از دو منبع را در بردارد. در ترکیب شواهد روابط زیر برقرار است:

$$m_1 \oplus m_2 = m_2 \oplus m_1 \quad (15)$$

$$m_1 \oplus (m_2 \oplus m_3) = (m_1 \oplus m_2) \oplus m_3 \quad (16)$$

به طور کلی برای n تابع جرم m_1, m_2, \dots, m_n اندازه ناسازگاری k به صورت زیر داده می‌شود:

$$k = \sum_{\bigcap_{i=1}^n E_i = \Phi} m_1(E_1) \cdot m_2(E_2) \cdot \dots \cdot m_n(E_n) > 0 \quad (17)$$

پس ترکیب تابع جرم به صورت زیر است:

$$m(A) = (m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_n)(A) = \frac{1}{1-k} \sum_{\bigcap_{i=1}^n E_i = A} m_1(E_1) \cdot m_2(E_2) \cdot \dots \cdot m_n(E_n)$$

مثال ۱. نتایج به دست آمده از بررسی نقص فنی خودرو با توجه به سه قطعه اصلی به کار گرفته شد در خودرو به صورت زیر

¹ Normalization factor

جدول ۲. با استفاده از قانون ترکیب دمپستر شافر، از اطلاعات منابع B و C ، مقادیر جدول زیر به دست می آید

	$m_1(B)_a$	$m_1(B)_b$	$m_1(B)_c$	$m_1(B)_{a,b}$	$m_1(B)_{a,c}$	$m_1(B)_{b,c}$	$m_1(B)_\theta$
	0.7	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.1
$m_2(C)_a$ 0.0	{a} 0.0	{ ϕ } 0.0	{ ϕ } 0.0	{a} 0.0	{a} 0.0	{ ϕ } 0.0	{a} 0.0
$m_2(C)_b$ 0.4	{ ϕ } 0.28	{b} 0.0	{ ϕ } 0.0	{b} 0.08	{ ϕ } 0.0	{b} 0.0	{b} 0.04
$m_2(C)_c$ 0.0	{ ϕ } 0.0	{ ϕ } 0.0	{c} 0.0	{ ϕ } 0.0	{c} 0.0	{c} 0.0	{c} 0.0
$m_2(C)_{a,b}$ 0.0	{a} 0.0	{b} 0.0	{ ϕ } 0.0	{a,b} 0.0	{a} 0.0	{b} 0.0	{a,b} 0.0
$m_2(C)_{a,c}$ 0.0	{a} 0.0	{ ϕ } 0.0	{c} 0.0	{a} 0.0	{a,c} 0.0	{c} 0.0	{a,c} 0.0
$m_2(C)_{b,c}$ 0.2	{ ϕ } 0.14	{b} 0.0	{c} 0.0	{b} 0.04	{c} 0.0	{b,c} 0.0	{b,c} 0.02
$m_2(C)_\theta$ 0.4	{a} 0.28	{b} 0.0	{c} 0.0	{a,b} 0.08	{a,c} 0.0	{b,c} 0.0	$\theta = 0.04$

$$K = 0.28 + 0.14 = 0.42 \text{ درجه ناسازگاری}$$

$$1 - K = 0.58 \text{ عامل نرمال کردن}$$

$$m_{1-2}(A)_a = 0.28 / 0.58 = 0.48$$

$$m_{1-2}(A)_b = (0.08 + 0.04 + 0.04) / 0.58 = 0.27$$

$$m_{1-2}(A)_c = 0.0; \quad m_{1-2}(A)_{a,b} = 0.08 / 0.58 = 0.13; \quad m_{1-2}(A)_{a,c} = 0.0$$

$$m_{1-2}(A)_{b,c} = 0.02 / 0.58 = 0.03; \quad m_{1-2}(A)_\theta = 0.04 / 0.58 = 0.06$$

به طور مشابه، توابع باور و موجه بودن و فاصله عدم قطعیت حاصل از این توابع، به صورت جدول ذیل محاسبه می گردد:

جدول ۳. بازه های عدم قطعیت عناصر چارچوب تشخیص بر اساس دو منبع اطلاعات B و C

subsets	$m_{1-2}(A)$	$bel_{1-2}(A)$	$pl_{1-2}(A)$	$U_{1-2}(A)$
ϕ	0.0	0.0	1.0	[0.0, 1.0]
{a}	0.48	0.48	0.67	[0.48, 0.67]
{b}	0.27	0.27	0.49	[0.27, 0.49]
{c}	0.0	0.0	0.09	[0.0, 0.09]
{a,b}	0.13	0.88	0.97	[0.88, 0.97]
{a,c}	0.0	0.48	0.7	[0.48, 0.7]
{b,c}	0.03	0.3	0.49	[0.3, 0.49]
θ	0.06	1.0	1.0	[1.0, 1.0]

بر پایه شواهد از دو نمونه، می توان گفت که نقص فنی خودرو از قطعه a یا b است.

۳. آنتروپی شانون

شانون در [۱۲] نشان داد، آنتروپی به عنوان یک اندازه از سطح

عدم قطعیت اطلاعات و تابعی از توزیع احتمال است. فرض کنیم

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) \quad (19)$$

و در حالی که احتمالات مقدار فاصله ای هستند می توان رابطه (۱۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_i p_i^{\min} \leq 1 \leq \sum_i p_i^{\max} \quad (23)$$

به آسانی می توان نشان داد که رابطه (۱۸) حالت خاصی از (۱۹) می باشد وقتی $p_i^{\min} = p_i^{\max}$ در اینصورت مقادیر فاصله ای و کران های بالایی و پایینی برای احتمالات $[p_1^{\min}, p_1^{\max}], [p_2^{\min}, p_2^{\max}], \dots, [p_n^{\min}, p_n^{\max}]$ می باشند.

با فرض $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ به عنوان چارچوب تشخیص و در نظر گرفتن $m(x_i)$ به عنوان نقص سیستم در وضعیت i ام، $pl(x_i)$ و $bel(x_i)$ را به ترتیب به صورت جایگزینی برای p_i^{\min} و p_i^{\max} و به عنوان کران های بالایی و پایینی احتمال نقص در وضعیت i ام در نظر می گیریم. در این صورت بازه عدم قطعیت تعیین نقص وضعیت i ام بر پایه تکنیک نظریه دمپستر شافر و آنتروپی به صورت زیر به دست می آید؛ صورت عمومی شکل محاسبه می تواند به صورت زیر باشد: گیریم، $[bel_1, pl_1], [bel_2, pl_2], \dots, [bel_n, pl_n]$ احتمالات با مقادیر فاصله ای باشند، در این صورت کران های بالایی و پایینی عدم قطعیت را با توجه به شرایط زیر به دست می آوریم:

$$bel(x_i) \leq p(x_i) \leq pl(x_i) \quad i=1, \dots, n \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

$$\forall i : bel(x_i) \leq pl(x_i) \Rightarrow -bel(x_i) \log bel(x_i) \geq -pl(x_i) \log pl(x_i) \quad (25)$$

$$H^{\max} = -\sum_{i=1}^n bel(x_i) \log bel(x_i) \quad (26)$$

$$H^{\min} = -\sum_{i=1}^n pl(x_i) \log pl(x_i) \quad (27)$$

مثال ۲) فرض کنید مقدار توابع باور و موجه بودن قرار گیری سیستم در وضعیت a ، براساس bpa های به دست آمده از سه منبع اطلاعات به صورت زیر باشد. بر این اساس کران های بالایی و پایینی عدم قطعیت را محاسبه می کنیم:

از جمله خواص آنتروپی می توان به چند مورد زیر اشاره کرد: (۱): طبق قرارداد $0 \log 0 = 0$.

(۲): در آزمایشی با $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ اگر $p(x_i) = 1$ ، نتیجه $H(X) = 0$ ، در این حالت عدم قطعیتی وجود ندارد. اگر احتمال ها مساوی و به صورت $p(x_i) = \frac{1}{n}$ برای $i=1, \dots, n$ ، نظر گرفته شود، $H(X)$ ماکزیمم مقدار را خواهد داشت و $H(X)^{\max} = \log_2(n)$ می باشد. در این حالت مجموعه، ماکزیمم اندازه عدم قطعیت را خواهد داشت.

(۳) یکی دیگر از خواص مهم آنتروپی، برقراری رابطه زیر در بررسی عدم قطعیت هم زمان دو مقدار است $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ و تساوی زمانی برقرار است که X, Y مستقل اند.

۴. آنتروپی و مقادیر احتمال بازه ای و نادقیق

فرض کنید در سیستمی n وضعیت متفاوت S_1, S_2, \dots, S_n وجود دارد. بطوریکه سیستم می تواند در یکی از این وضعیت ها قرار داشته باشد. احتمال سیستم S در وضعیت S_i را با p_i مشخص می کنیم:

$$P(S \sim S_i) = p_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (20)$$

اگر تمام مقادیر p_i ها در رابطه فوق مشخص باشد، آنتروپی سیستم به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (21)$$

در صورت استقلال، محاسبه آنتروپی کلی توسط جمع تک تک آنتروپی های سیستم صورت می گیرد و برای تعریف آنتروپی کلی لازم است که خاصیت جمع پذیری حفظ گردد. فرض کنیم به جای دانستن احتمال دقیق یک سیستم با مقداری فاصله ای از مقادیر احتمال روبرو باشیم. در اینجا از روشی ابتکاری جهت محاسبه آنتروپی یک سیستم استفاده می کنیم. سپس به بررسی خاصیت جمع پذیری آن را برای دو سیستم مستقل می پردازیم. فرض کردیم یک سیستم می تواند در n وضعیت باشد اما احتمالی که سیستم در i امین وضعیت قرار دارد احتمالات تک مقداری نیستند و یک بازه به صورت $[p_i^{\min}, p_i^{\max}]$ می باشد با شرط:

$$\sum_i p_i = 1 \quad (22)$$

$$\begin{cases} bel(A)_a = 0.7 \\ pl(A)_a = 1.0 \end{cases} \quad \begin{cases} bel(B)_a = 0.6 \\ pl(B)_a = 1.0 \end{cases} \quad \begin{cases} bel(C)_a = 0.0 \\ pl(C)_a = 0.6 \end{cases}$$

$$H^{\min} = -(1.0 \times \text{Log } 1.0 + 1.0 \times \text{Log } 1.0 + 0.6 \times \text{Log } 0.6) = 0.13$$

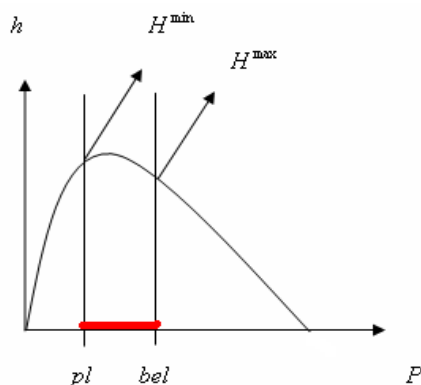
$$H^{\max} = -(0.7 \times \text{Log } 0.7 + 0.6 \times \text{Log } 0.6 + 0.0 \times \text{Log } 0.0) = 0.24$$

سیستمی که از تلفیق سیستم های X و Y به دست آمده باشد برابر است با مجموع آنتروپی های تک تک X و Y . به عبارت دیگر همانطور که بیان شد در صورت برقراری خاصیت جمع پذیری داریم:

$H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ با در نظر گرفتن دو سیستم X و Y با وضعیت هایی مطابق با $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $P(Y \sim y_i) = r_j, i=1, \dots, m$ و $P(X \sim x_i) = p_i, i=1, \dots, n$. و داریم:

$$\begin{aligned} H^{\min}(X, Y) &= - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m pl(x_i, y_j) \text{Log } pl(x_i, y_j) \right) \\ &= - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m pl(x_i, y_j) \text{Log } pl(x_i) pl(y_j | x_i) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m pl(x_i, y_j) \text{Log } pl(x_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m pl(x_i, y_j) \text{Log } pl(y_j | x_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n pl(x_i) \text{Log } pl(x_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m pl(x_i, y_j) \text{Log } pl(y_j) \\ &= - \sum_{i=1}^n pl(x_i) \text{Log } pl(x_i) - \sum_{j=1}^m pl(y_j) \text{Log } pl(y_j) \\ &= H^{\min}(X) + H^{\min}(Y) \end{aligned} \quad (28)$$

$$H^{\max}(X, Y) = - \left(\sum_{i=1}^n bel(x_i) \text{Log } bel(x_i) + \sum_{j=1}^m bel(y_j) \text{Log } bel(y_j) \right) = H^{\max}(X) + H^{\max}(Y) \quad (29)$$



نمودار ۲. کران های بالایی و پایینی $h = -p \log p$

بنابراین بازه عدم قطعیت در تعیین نقص وضعیت a ، در سیستم مورد بررسی $[0.13, 0.24]$ می باشد. در فرمول (۲۷) رابطه $H^{\min} \leq H^{\max}$ برقرار می باشد و $H = [H^{\min}, H^{\max}]$ فاصله عدم قطعیت را نشان می دهد. رابطه به دست آمده فوق با استفاده از تعریف سنتی آنتروپی یک سیستم با احتمالات تک مقداری است که به صورت بازه عدم قطعیت مقادیر فاصله ای بیان شد، هم اکنون خاصیت جمع پذیری را در تفسیری کلی از آنتروپی بررسی می کنیم. حفظ خاصیت جمع پذیری به معنای این است که اگر دو سیستم مستقل X و Y داشته باشیم آنتروپی

در نتیجه مقدار ماکزیمم و مینیمم عدم قطعیت براساس آنتروپی و دمپستر شافر، برای دو سیستم تلفیقی و مستقل تفاوت زیادی با میزان عدم قطعیت تک تک سیستم ها ندارد. در نتیجه حدود بالایی و پایینی ارزیابی شده برای عدم قطعیت برای دو سیستم مستقل محاسبه گردید. می توان فاصله عدم قطعیت، با در نظر گرفتن کران های بالایی و پایینی احتمال در نمودار $h = -p \log p$ ، را به صورت زیر نمایش داد.

- [4] Helton, J.C., *Uncertainty and Sensitivity Analysis in the Presence of Stochastic and Subjective Uncertainty*, J. Stat. Comput. Simul. 57, 1997.
- [5] Helton, J.C., Johnson, J.D., *Quantification of Margins and Uncertainties: Alternative Representations of Epistemic Uncertainty*, Reliability Engineering and System Safety 96, 2011, pp. 1034–1052
- [6] Helton, J.C., Johnson, J.D., Sallaberry, C.J., *Quantification of Margins and Uncertain-Ties: Example Analyses from Reactor Safety and Radioactive Waste Disposal Involving the Separation of Aleatory and Epistemic Uncertainty*. Reliability Engineering and System Safety; this issue. doi: 10.1016/j.res.2011.02.012.
- [7] Helton, J.C., *Quantification of Margins and Uncertainties: Conceptual and Computational Basis*. Reliability Engineering and System Safety; this issue. doi:10.1016/j.res.2011. 03.017.
- [8] Kuznetsov, V.P., *Interval Statistical Models*. Moscow: Radio and Communication; 1991, in Russian
- [9] Liu, B., *Asurvey of Entropy of Fuzzy Variables*, Journal of Uncertain Systems 1 (1), 2007, pp. 4–13.
- [10] Liu, B., *Uncertainty Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [11] Shafer, G., *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, NJ, 1976.
- [12] Shannon, C., Weaver, W., *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana: University of Illinois Press, 1949.
- [13] Weichselberger, K., *The Theory of Interval-Probability as a Unifying Concept for Uncertainty*. Int J Approx Reason 2000; 24: 149–70.
- [14] Zaman, K., Rangavajhala, S., McDonald, M.P., Mahadevan, S.A., *Probabilistic Approach for Representation of Interval Uncertainty*, Reliability Engineering and System Safety 96, 2011, pp. 117–130.

۵. نتیجه گیری

با توجه به ارتباط بین آنتروپی و تئوری دمپستر شافر شواهد در رابطه با موضوع بررسی عدم قطعیت، این مقاله با استفاده از ترکیب نظریه دمپستر شافر و آنتروپی، روشی جهت یافتن بازه عدم قطعیت برای وضعیت های متفاوت در سیستم ها پیشنهاد کرده است. از دلایل استفاده از روش دمپستر شافر می توان به توسعه نظری این روش در میان نظریه های غیر سنتی در بررسی عدم قطعیت اشاره کرد. همچنین وجود نمونه های کاربردی فراوان از آن در رویایی با عدم قطعیت epistemic در سیستم های مهندسی و قابلیت نمایش و ترکیب انواع متفاوت شواهد به دست آمده از منابع چندانگانه، از دیگر مزایای استفاده از این روش می باشد.

از سویی دیگر آنتروپی یکی از راه های معنی دار اندازه گیری مقدار عدم قطعیت در مجموعه متناهی از شواهد به وسیله تابع توزیع احتمال آنها بوده و می توان ناسازگاری میان توزیع های احتمال منابع شواهد را به وسیله آن بیان کرد. از اینرو انتظار می رود تلفیق این دو روش و استفاده از آن در کاهش عدم قطعیت در تعیین نقص سیستم ها موثر واقع شود. به همین منظور در این مقاله ابتدا محاسبه آنتروپی برای مقادیر احتمالات فاصله ای (بازه ای) با استفاده از کران های بالایی و پایینی احتمال بررسی شده سپس با تفسیری متناظر برای جفت های دوتایی از توابع (*plausibility* و *belief*)، که ناشی از ساختارهای باور است، نمایشی جدید از اندازه گیری حدود عدم قطعیت بالایی و پایینی آنتروپی شانون بر اساس شواهد در بررسی سیستم ها به نمایش گذاشته شد.

۶. تشکر و سپاسگزاری

در پایان لازم است که از داوران محترم مقاله که با نظرات بسیار ارزشمند خود باعث غنای مقاله و اصلاحات اساسی آن شدند تقدیر و تشکر می نمائیم.

مراجع

- [1] Croisarda, N., Vasilea. M., Kempleb, S., Radicea, G., *Preliminary Space Mission Design Under Uncertainty*, Acta Astronautica 66, 2010, pp. 654 - 664
- [2] Dai, W., Chen, X., *Entropy of Function of Uncertain Variables*, Mathematical and Computer Modelling 55, 2012, pp. 754–760
- [3] Dempster, A.P., *Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping*. Annals of Mathematical Statistics 38, 1967, pp. 325–339.

