

حل مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار با استفاده از روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های شبیه‌سازی تبریدی و ژنتیک

مسعود یقینی و جواد لسان

چکیده:

خوشه‌بندی ظرفیت‌دار یکی از مسائلی است که از کاربرد گسترده‌ای در داده کاوی برخوردار است. این مساله به دنبال افراز یک مجموعه n تایی از عناصر به p خوشه ظرفیت‌دار است به طوری که تمامی اعضای یک خوشه به نقطه‌ای که به عنوان مرکز ثقل آن خوشه تعیین می‌شود، تخصیص یابند. هدف از این مساله کمینه کردن عدم تشابه تمامی نقاط یک خوشه از مرکز ثقل خوشه با رعایت محدودیت ظرفیت در هر خوشه است، به طوری که هر عنصر تنها به یک خوشه تخصیص یابد. در این مقاله دو روش حل متفاوت جهت حل مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار ارائه شده است. روش نخست یک روش حل فرا ابتکاری مبتنی بر شبیه‌سازی تبریدی است که در سازوکار جستجوی جواب از ساختارهای مختلف همسایگی استفاده می‌کند. روش دوم مبتنی بر الگوریتم ژنتیک است که در آن از یک رویه ابتکاری جستجوی محلی استفاده شده است. روش‌های ارائه شده با استفاده از مسائل نمونه‌ای مختلف مورد آزمون قرار گرفته اند. نتایج محاسباتی حاکی از کارایی و توانمندی روش‌های حل پیشنهادی است.

کلمات کلیدی

مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار،
افراز مجموعه‌ای،
مساله p -median ظرفیت‌دار،
روش‌های فرا ابتکاری،
الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی،
الگوریتم ژنتیک.

۱. مقدمه

مسائل کاربردی بسیار زیادی در دنیای واقع مطرح است که به دنبال افراز یک مجموعه n عضوی به p دسته یا خوشه با رعایت معیارها و ضوابط مشخصی هستند که مکان‌یابی - تخصیص^۲ و داده کاوی از موارد برجسته آن می‌باشند. به طور مثال در داده کاوی یکی از مهمترین معیارها برای افراز یک مجموعه کمینه کردن مجموع عدم تشابهات (فواصل) نقاط در هر خوشه (از مرکز ثقل آن خوشه) می‌باشد. این قبیل مسائل در کلاس مسائل خوشه‌بندی

ظرفیت‌دار^۳ (CCP) قرار می‌گیرند که حالت خاصی از مساله خوشه‌بندی مرکزی ظرفیت‌دار^۴ (CCCP) هستند [۱]. در ادبیات موضوع از لحاظ تئوری و کاربردی این مساله از توجه بالایی برخوردار است. از جمله کاربردهای CCP می‌توان به مواردی مثل مسیر یابی وسایل نقلیه [۲] و [۳]، ناحیه بندی سیاسی [۴]، طراحی مناطق فروش در بازاریابی [۵] و تقسیم بندی بانک اطلاعاتی اشاره نمود.

بین مسائل خوشه‌بندی و مسائل مکان‌یابی ارتباط بسیار نزدیکی وجود دارد. این ارتباط و تشابه به این شرح است که هر دو بر دسته‌بندی بهینه مجموعه‌ای از نقاط تمرکز دارند، مسائل مکان‌یابی به دنبال کمینه کردن مجموع فواصل عناصر متقاضی از عناصری تحت عنوان مراکز استقرار تسهیلات (خدمات) بوده و مسائل خوشه‌بندی به دنبال کمینه کردن میزان عدم تشابهات عناصر یک خوشه از نقطه‌ای که به عنوان مرکز ثقل آن خوشه می‌باشند. در هر

تاریخ وصول: ۸۸/۱۲/۵

تاریخ تصویب: ۸۹/۳/۲۶

دکتر مسعود یقینی، استادیار، دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، yaghini@iust.ac.ir

جواد لسان، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی راه آهن، دانشگاه علم و صنعت ایران، javadlessan@rail.iust.ac.ir

³. Capacitated clustering problem (CCP)

⁴. Capacitated centered clustering problem (CCCP)

². Location-allocation

ترکیبی مبتنی بر روش جستجوی همسایگی مبتنی بر کران [۱۸] اشاره کرد.

احمدی^{۱۲} چندین رویکرد شامل، فرآیند جستجو در فضای جواب مسئله، فرآیند جستجوی آزمون تطبیق پذیر تصادفی^{۱۳} برای حل CCP ارائه نموده است [۱۹]. فرانکا^{۱۴} و همکاران از یک روش جستجوی ممنوعه تطبیقی استفاده نموده اند [۲۰]. شوئر^{۱۵} و وندولسکی^{۱۶} و همچنین دیاز^{۱۷} و فرناندز^{۱۸} در سال ۲۰۰۶ یک روش حل مبتنی بر جستجوی پراکنده برای حل CCP ارائه کرده اند [۲۱ و ۲۲]. موارد فوق تنها گوشه‌ای از کارهایی که در زمینه مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار انجام گرفته و بررسی دقیق در این زمینه، انجام یک مطالعه ادبیات موضوعی گسترده را می‌طلبد. لیست کاملی از روش‌های حل ارائه شده جهت حل CPMP و CCP در [۲۳] و [۲۴] ارائه شده است.

در ادامه مقاله، ابتدا در بخش ۲ به معرفی و نحوه مدلسازی CCP در قالب CPMP اشاره می‌شود، در بخش ۳ و ۴ به ترتیب، روش حل مبتنی بر شبیه‌سازی تبریدی و روش حل مبتنی بر الگوریتم ژنتیک تشریح می‌شود. در بخش ۵ اعتبارسنجی و مقایسات مربوط به نتایج حاصل از روش‌های پیشنهادی ارائه خواهد شد.

۲. مدل سازی مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار به صورت

مساله p -Median ظرفیت‌دار

همانطور که اشاره شد، مساله CPMP یکی از مدل‌های اصلی مسائل مکان‌یابی می‌باشد. به طور کلی در مسائل مکان‌یابی یک مجموعه از مشتریان در حوزه‌های مشخصی پراکنده اند و تقاضای برخی از کالاها یا خدمات را دارند.

تقاضای مشتریان باید توسط یک یا چند مرکز خدمت (تسهیلات مربوطه) تامین شود، این مراکز می‌توانند تعامل مشارکتی یا رقابتی با هم داشته باشند. با توجه به شرایط فوق و محدودیت‌ها و الزامات مشتریان (نقاط تقاضا) باید در مورد محل استقرار مراکز خدمات و نحوه تخصیص مشتریان به مراکز خدماتی بهترین تصمیم اتخاذ شود. به طور خاص مساله CPMP، به دنبال مکان‌یابی p تعداد تسهیلات از بین یک مجموعه نقاط کاندید است به صورتی که مجموع مسافت (عدم تشابه) بین نقاط تقاضا و نزدیکترین تجهیزاتی که به آنها تخصیص یافته اند حداقل گردد و مجموع تقاضای تخصیص داده شده به میانه‌ها (تجهیزات) بیشتر از ظرفیت آنها نشود.

دو مساله مقدار عناصر تخصیص داده شده به هر خوشه نباید از حد ظرفیت خوشه بیشتر باشد.

مساله p -median که از نخستین مدل‌های مکان‌یابی در فضای شبکه است، در سال ۱۹۶۴ توسط حکیمی^۱ ارائه شده است [۶]. در سال ۱۹۸۵ کلاستورین^۲ اثبات نمود که برای برخی از ساختارهای داده‌ای مدل خوشه‌بندی p -median هنگامی که مبنای مقایسه تشابه عناصر بر اساس فاصله اقلیدسی محاسبه شود می‌تواند به نتایج بهتری نسبت به سایر روش‌های خوشه‌بندی دست یابد [۷]. در ادبیات موضوع مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار در قالب مساله p -median ظرفیت‌دار^۳ (CPMP) مدل‌سازی شده است. در این مقاله با توجه به این موضوع دو روش جهت حل مساله مذکور ارائه گردیده است.

در ادبیات موضوع از روش‌های مختلفی جهت حل مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار استفاده شده است. برای اولین بار ملوی^۴ و بک^۵ با طرح این مساله یک روش ابتکاری جهت حل آن به کار گرفتند [۵]. همین طور در [۸] و [۹] هم از روش‌های ابتکاری برای حل این مساله استفاده شده است. از دیگر روش‌های به کار گرفته شده می‌توان به روش حلی که مبتنی بر ترکیب روش شاخه و کران و روش آزاد سازی لاگرانژی می‌باشد اشاره نمود که توسط پیکرل^۶ ارائه گردیده است [۱۰]. همچنین لورنا^۷ و سنه^۸ روشی با رویکرد جانشینی/ لاگرانژین همراه با جستجوی محلی را ارائه نموده اند [۱۱]. بالداکسی^۹ و همکاران یک از الگوریتم دقیق بر مبنای تقسیم بندی مجموعه‌ای (SPP) برای حل CCP استفاده کرده اند [۱۲]. بوسیکا^{۱۱} و همکاران نیز یک الگوریتم دقیق مبتنی بر روش شاخه و برش برای مساله p -median ظرفیت‌دار ارائه نموده اند [۱۳].

اثبات گردیده که مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار جز مسائل NP -*hard* می‌باشد [۱۴]. از طرفی چون روش‌های فرا ابتکاری برای حل مسائل بهینه سازی ترکیبی پیچیده، بسیار کارآمد می‌باشند موارد بسیاری وجود دارد که جهت حل مساله مذکور از روش‌های فرا ابتکاری بهره جسته اند. به طور نمونه می‌توان به [۱۵] اشاره نمود که از یک الگوریتم ترکیبی شبیه سازی تبریدی و جستجوی ممنوعه به همراه یک برنامه خنک سازی غیر یکنواخت برای حل مسائل با مقیاس کوچک مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار استفاده کرده‌اند. از دیگر کارهای که در اخیر در این زمینه انجام گرفته می‌توان به روش ترکیبی جستجوی خوشه‌بندی [۱۶] و [۱۷]، روش

1. Hakimi
2. Klasterin
3. Capacitated p -median problem (CPMP)
4. Mulvey
5. Beck
6. Pirkul
7. Lorena
8. Senne
9. Baldacci
10. Set partitioning problem (SPP)
11. Boccia

12. Ahmadi
13. Greedy randomized adaptive search procedure (GRASP)
14. Franca
15. Scheuerer
16. Wendolsky
17. Diaz
18. Fernandez

مدل فوق $[y_j]_{1 \times n}$, $j = \{1, \dots, p\}$ ماتریس عناصر کاندید می‌باشد به نحوی که $y_j = 1$ اگر عنصر j به عنوان میانه (یکی از اعضای مجموعه P) انتخاب گردد و در غیر این صورت $y_j = 0$. در نهایت q_i و Q_j به ترتیب نشانگر میزان تقاضا و ظرفیت عنصر i مربوط به خود می‌باشند.

مدل فوق مشابه مدل مساله p -median ظرفیت‌دار می‌باشد که در آن: تابع هدف (۱) به دنبال کمینه کردن مجموع عدم تشابهات نقاط یک خوشه از مرکز ثقل آن خوشه می‌باشد. مجموعه محدودیت (۲) تعیین می‌کند که هر عنصر از $(V - P)$ تنها به یکی از اعضای P (مجموعه نقاط میانه) تخصیص یابد. محدودیت‌های (۳) تضمین می‌کنند که هر نقطه از $(V - P)$ به نقطه‌ای تخصیص یابد که به عنوان میانه انتخاب گردیده است. در محدودیت (۴) شرط انتخاب p عنصر به عنوان میانه تضمین می‌گردد. عدم تخصیص مجموع تقاضای بیش از ظرفیت هر عنصر با محدودیت (۵) اعمال می‌گردد. در نهایت محدودیت (۶) به ترتیب شرایط تخصیص و انتخاب یک نقطه به عنوان میانه را نشان می‌دهد.

در این مقاله دو روش جهت حل کارا جهت مساله مذکور ارائه شده است. روش نخست یک روش فرا ابتکاری تک‌جوابی^۱ و روش دوم مبتنی بر فرا ابتکاری‌های جمعیتی^۲ است. همچنین جهت جستجوی کارا تر فضای جواب از روش‌های مختلف جستجو و ساخت همسایگی استفاده شده است. روش‌های ارائه شده با استفاده از مسائل مقیاس کوچک، بزرگ و بسیار بزرگ، در مقایسه با روش‌های مطرح در ادبیات موضوع قرار گرفته‌اند. همچنین با استفاده از حل مسائل مختلف نشان داده شده است که با افزایش اندازه مسائل روش‌های مبتنی بر جمعیت کارایی خود را از دست می‌دهند، و در نتیجه استفاده از روش‌های تک‌جوابی تنها گزینه ممکن در حل مسائل بسیار بزرگ است.

۳. حل CCP با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی

روش شبیه‌سازی تبریدی^۳ (SA) در دهه هشتاد میلادی در [۲۵] معرفی شد و تاکنون به دلیل سادگی و همچنین کارایی، تاثیر شگرفی در زمینه حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی گذاشته است. این روش مبتنی بر مکانیک‌های آماری است که در آن فرآیند خنک‌کاری به صورت حرارت‌دهی و سردسازی آهسته یک ماده به منظور دستیابی به یک ساختار کریستالی سخت و محکم انجام می‌شود.

الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی، تغییرات انرژی سیستم مذاب را با توجه به یک فرآیند خنک‌سازی، به منظور دستیابی به وضعیت تعادلی پایدار شبیه‌سازی می‌کنند. این الگوریتم یک الگوریتم

با توضیحات فوق می‌توان مساله CPMP را به این صورت بیان نمود که به دنبال انتخاب p عنصر از یک مجموعه n تایی به عنوان میانه (نقطه ثقل خوشه‌ها) جهت تخصیص $n-p$ عنصر باقی مانده به مراکز خوشه‌های منتخب می‌باشد. هدف انتخاب بهترین عناصر به عنوان مراکز خوشه و تخصیص نقاط انتخاب نشده به نزدیک‌ترین خوشه به طوری که مجموع عدم تشابه بین نقاط تخصیصی به عناصر میانه (میانه خوشه) کمترین مقدار ممکن باشد و محدودیت ظرفیت هر خوشه رعایت شود. مشابه بسیاری از مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی، اثبات شده است که CPMP از نوع NP-hard می‌باشد [۸]. مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار را می‌توان به صورت زیر در قالب CPMP مدل سازی و ارائه نمود:

فرض کنید که $V = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه کلیه عناصر باشد و هدف افراز مجموعه فوق به یک مجموعه p تایی از خوشه‌هایی هستیم که در آن هر خوشه دارای یک میانه به عنوان مرکز ثقل خوشه شود. برای این کار باید یک مجموعه p تایی $(P \subset V)$, $P = \{1, 2, \dots, p\}$ از عناصر V انتخاب شوند تا هر یک از $V-P$ عنصر باقی مانده را به یکی از عناصر مجموعه P تخصیص دهیم. در مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار هر عنصر دارای مقداری تقاضا و یک ظرفیت پاسخگویی به تقاضا (در صورتی که به عنوان میانه انتخاب گردد) هستند و باید محدودیت ظرفیت هر خوشه منتخب رعایت گردد. طبق توضیحات فوق مدل ریاضی مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار به صورت زیر خواهد بود:

$$(CCP) \quad v(P) = \text{Min} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$St: \sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i, j \in V \quad (3)$$

$$\sum_{j \in V} y_j = p \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} q_i x_{ij} \leq Q_j y_j \quad \forall j \in V \quad (5)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, j \in V \quad (6)$$

به طوری که $V = \{1, 2, \dots, n\}$ همان عناصر مورد نظر می‌باشند، $[d_{ij}]$ ماتریس فاصله (میزان تشابه/عدم تشابه) بین عناصر، $[x_{ij}]_{n \times n}$ ماتریس تخصیص با شرط $x_{ij} = 1$ اگر عنصر i از $(V - P)$ به خوشه j ($j \in P$) تخصیص یابد و در غیر این صورت $x_{ij} = 0$ در

۴. حل CCP با استفاده از الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک که بر اساس مفهوم "بقای سازگارترین‌ها" شکل گرفته، یک روش جستجوی تصادفی پرکاربردی است که توسط هالند^۱ در سال ۱۹۷۵ ارائه گردیده است. این روش بر دو پدیده انتخاب و ترکیب تصادفی عناصر (جواب‌های مورد نظر) تاکید دارد. هر نقطه از فضای جواب مساله به صورت یک کروموزوم در الگوریتم ژنتیک نمایش داده می‌شود. کیفیت یک کروموزوم (جواب) توسط تابع معروفی به نام تابع برازندگی ارزیابی می‌شود که معادل تابع هدف در مسائل بهینه‌سازی می‌باشد.

در الگوریتم ژنتیک در ابتدا جمعیتی از کروموزوم‌ها تولید می‌شوند و در هر تکرار برای ایجاد کروموزوم‌های جدید از دو اپراتور موسوم به برش و جهش استفاده می‌گردد. به علت اعمال مکانیزم هدایت کننده‌ای در تولید یک جمعیت جدید از جمعیت جواب قبلی، احتمال دستیابی به جواب‌های ارزنده‌تر در هر تکرار از روش الگوریتم ژنتیک وجود دارد به طوری که در تکرارهای متوالی، روش مذکور به سمت تولید عناصری با ارزندگی بالاتر تمایل خواهد داشت [۲۶]. شکل (۲) به طور خلاصه شبه کد روش حل پیشنهادی مبتنی بر الگوریتم ژنتیک را نمایش می‌دهد با این تغییر که در گام ۷ از یک روبه‌ابتکاری بهبود جواب استفاده شده است. روش پیشنهادی از نوع الگوریتم‌های دو سطحی است که به الگوریتم‌های ممتیک مشهور هستند [۲۷ و ۲۸]. در ادامه به تشریح نحوه حل مساله CCP با الگوریتم ژنتیک پرداخته شده است.

۴-۱. نمایش کروموزوم^۲

همانطور که در بند قبل اشاره شد، در الگوریتم ژنتیک هر کروموزوم معرف یک نقطه از فضای جواب می‌باشد. در الگوریتم پیشنهادی هر کروموزوم شامل یک رشته p تایی از عناصری است که هر یک به عنوان میانه هر خوشه انتخاب شده‌اند. در اینجا طول تمامی کروموزوم‌ها یک مقدار ثابت می‌باشد.

هر ژن در کروموزوم بیانگر عدد طبیعی منحصر بفردی است که معرف عنصر کاندید میانه می‌باشد. در این نوع نمایش ژنی تکرار یک ژن در کروموزوم مجاز نمی‌باشد و ترتیب و توالی ژن‌ها در کروموزوم اهمیت ندارد و جایجایی ژن‌ها تاثیری در جواب مساله ایجاد نمی‌کند.

ظرفیت نقاط انتخابی به عنوان میانه پارامتری است که در طول یک کروموزوم تاثیر می‌گذارد. هر چقدر نقاط میانه (ژن) از ظرفیت بالایی برخوردار باشد به طبع طول آن کروموزوم کمتر خواهد بود. بعد از انتخاب یک رشته p تایی از عناصر کاندید، هر یک از عناصر باقی مانده مجموعه $(V - P)$ به نزدیک‌ترین خوشه ممکن تخصیص می‌یابند. در اینجا محدودیت ظرفیت هر خوشه همواره مورد توجه

تصادفی است که توانایی پذیرش جواب‌های با کیفیت بدتر را دارد. هدف از این کار فرار از نقطه بهینه محلی و به تاخیر انداختن همگرایی زودرس است. با شروع از یک جواب آغازین تصادفی، SA به صورت متوالی، در هر تکرار به سراغ یک همسایگی (جواب) جدید می‌رود و از یک پارامتر کنترلی، به نام دما، به منظور تعیین احتمال پذیرش جواب‌های غیربهبود دهنده استفاده می‌کند. در این الگوریتم همواره جواب‌هایی که باعث بهبود در تابع هدف می‌شوند، پذیرفتنی هستند. در غیر این صورت، همسایه به دست آمده با احتمالی که به دمای فعلی و میزان تغییر در تابع هدف (ΔE) بستگی دارد، مورد پذیرش واقع خواهد شد. ΔE ، نشان دهنده تفاوت در تابع هدف (انرژی) بین جواب فعلی و جواب همسایه به دست آمده است. به هر میزان که الگوریتم ادامه می‌یابد، احتمال پذیرش چنین جایجایی‌هایی (بازگشت به عقب) کمتر می‌شود. شکل ۱ شبه کد الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی پیشنهادی را نمایش می‌دهد. در الگوریتم پیشنهادی در گام نخست یک جواب اولیه به صورت تصادفی و ابتکاری ساخته می‌شود. این جواب شامل یک رشته p -تایی به عنوان میانه‌های خوشه است به طوری که هر خوشه شامل مجموعه‌ای از نقاط وابسته است. در گام ده از شبه کد فوق، از روش تغییر تصادفی ساختار همسایگی به منظور جستجوی بهتر و کارا تر فضای جواب استفاده شده است. تغییر همسایگی‌ها به دو روش جایجایی نزدیک و جایجایی دور صورت می‌گیرد. در روش جایجایی نزدیک موقعیت یک مرکز خوشه منتخب با یکی از نقاط وابسته به آن جابجا می‌شود، در حالی که در روش جایجایی دور یک مرکز خوشه انتخاب شده با نقطه غیرمرکز خوشه‌ای که به خوشه‌های دیگر متعلق است، تعویض می‌شود. همچنین در گام ۱۹ به روز رسانی دما به بر اساس روش هندسی صورت می‌گیرد.

Simulated annealing algorithm (SA)

```

1:  $s := GenerateInitialSolution()$ ;
2:  $T := T_{max}$ ; /*Strating temperature*/
3:  $T_0 := T_{min}$ ; /*Final temperature */
4:  $\alpha := a$ ; /*Cooling rate*/
5:  $Itr := R$ ; /*Iterations*/
6:  $r := 0$ ; /*Reset iterations*/
7: while ( $T > T_0$ ) do
8:   while ( $r \leq Itr$ ) do
9:      $r := r + 1$ ;
10:     $s' := GenerateAtRandom\ s' \in N(s)^k$ 
11:     $\Delta E = f(s') - f(s)$ ;
12:    if  $\Delta E \leq 0$ 
13:       $s := s'$ ;
14:    else
15:      let  $x \in [0, 1]$ ;
16:      if ( $x < e^{-\Delta E/T}$ )
17:         $s := s'$ ;
18:    end while
19:  $T := T \times \alpha$ ;
20:  $r := 0$ ;
21: end while

```

شکل ۱. شبه کد الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی پیشنهادی

1. Haland

2. Chromosome representation

قرار می‌گیرد به طوری که اگر یک عنصر نتواند به نزدیک‌ترین خوشه تعلق بگیرد، به ترتیب به خوشه‌های با درجات نزدیکی (تشابه) پایین‌تر تخصیص خواهد یافت.

Genetic algorithm (GA)

```
1:  $t := 0$ ;
2:  $pop(t) := GenerateInitialPopulation()$ ; /* Initial population */
3:  $Evaluate(pop(t))$ ;
4: while TerminationCriterion( $pop(t)$ ) not met do
5:    $pop'(t) := Select(pop(t))$ ;
6:    $pop''(t) := Reproduce(pop'(t))$ ;
7:    $pop''(t) := Improve(pop''(t))$ ;
8:    $pop'(t+1) := Replace(pop(t), pop''(t))$ ;
9:    $t := t + 1$ ;
10: end while
```

شکل ۲. شبه کد الگوریتم ژنتیک پیشنهادی

۴-۲. تابع برازش^۱

برای ارزیابی کیفیت یک کروموزم در الگوریتم ژنتیک از تابع برازش استفاده می‌شود. در الگوریتم پیشنهادی برازندگی کروموزم با محاسبه جمع جبری مجموع فواصل (عدم تشابه) بین تمامی عناصر یک خوشه از میانه آن خوشه محاسبه گردد و در انتها جوابی با بهترین برازندگی (کمترین مجموع عدم تشابه) به عنوان جواب بهینه تعیین می‌گردد.

۴-۳. تولید جمعیت جدید از جواب‌ها

در الگوریتم ژنتیک بعد از تولید تصادفی جواب‌های جمعیت اولیه، جمعیت‌های بعدی با انتخاب کروموزم‌های جمعیت پیشین و بکارگیری اپراتورهای ترکیب و جهش تولید می‌شوند. فرآیندهای انتخاب، برش، ترکیب و جهش که می‌توانند منجر به تشکیل جواب‌های جدید گردند به روش‌های مختلفی می‌تواند صورت پذیرد.

۴-۴. عملگر انتخاب^۲

در فرآیندی موسوم به بازترکیبی، دو جواب والد انتخاب می‌شوند و تحت عملیات برش جهت تولید جواب‌های جدید مورد استفاده قرار می‌گیرند. انتخاب والد می‌تواند با یک مکانیزم هدایت شونده‌ای انجام گیرد تا همواره والدین انتخابی از تنوع مناسبی برخوردار باشند. در این مقاله از مکانیزم معروف به چرخ گردان^۳ جهت انتخاب والدین برای تولید جمعیت جدید استفاده شده است.

۴-۵. عملگر برش^۴ و ترکیب^۵

همانطور که گفته شد برش، اپراتور مورد استفاده در فرآیند تولید نسل جدید است که طی آن کروموزم‌های دو والد به دو بخش (یا بیشتر) تجزیه و سپس با عملیات بازترکیبی جواب‌های جدیدی تولید می‌شوند که ترکیبی از مشخصه‌های ژنتیکی هر دو والد را دارا می‌باشد. در این مقاله اپراتور باز ترکیبی ابتدا به محاسبه یک بردار جابجایی برای هر والد می‌پردازد، به این صورت که برای هر ژن (اندیس تجهیزات) به عنوان مثال در والد شماره یک، بررسی می‌کند که آیا ژن مفروض در کروموزم والد شماره دوم وجود دارد یا خیر، در صورتی که این ژن در کروموزم والد دوم نباشد در بردار جابجایی والد اول قرار می‌گیرد. این بدان معناست که ژن مفروض می‌تواند طی اپراتور بازترکیبی به جای یکی از ژن‌ها، به کروموزم والد دوم وارد شود. هنگامی که بردارهای جابجایی برای دو والد محاسبه شدند اپراتور بازترکیبی اعمال می‌شود و تعدادی از ژن‌های موجود در دو بردار جابجایی بصورت تصادفی در کروموزم‌های والد جابجا می‌شوند. لازم به ذکر است که هنگامی که دو کروموزم یکسان باشند بردار جابجایی دو کروموزم تهی خواهد بود که در این حالت یکی از کروموزم‌های والد برای جلوگیری از تکرار حذف شده و دیگری تحت عنوان فرزند جدید مورد قبول واقع شده به جمعیت جدید وارد می‌شود.

۴-۶. عملگر جهش^۶

اپراتور جهش یکی از مهمترین اپراتورهای مورد استفاده در الگوریتم ژنتیک جهت ایجاد تغییر در ساختار ژنی جواب تولید شده می‌باشد. این اپراتور به منظور جستجوی بیشتر فضای جواب و ایجاد تنوع در جمعیت جدید مورد استفاده قرار می‌گیرد. مکانیزم جهش مورد استفاده در این الگوریتم یک ژن را به طور تصادفی (اندیس یک میانه) از یک کروموزم انتخاب نموده و با یکی از عناصر $(V - P)$ که بعنوان میانه انتخاب نشده جابجا می‌نماید.

۴-۷. پذیرش

در این الگوریتم بعد از اینکه کروموزم یا فرزند جدیدی تحت اپراتورهای بازترکیبی و جهش تولید می‌شود در این مرحله در خصوص پذیرش یا عدم پذیرش این کروموزم در جمعیت جدید، تصمیم‌گیری صورت می‌گیرد. به طوری که کروموزم جدیدی که تحت اپراتورهای تولید مثل (بازترکیبی و جهش) تولید می‌شود، تنها در صورتی به جمعیت فعلی وارد می‌شود که مقدار برازندگی آن از

4. Crossover
5. Recombination
6. Mutation

1. Fitness function
2. Parent selection
3. Roulette wheel

جدول ۱. اطلاعات مجموعه مسائل مورد استفاده

مجموعه مسائل	شماره مسائل	p×n	ابعاد مدل ریاضی MIP	
			تعداد متغیر	حداقل تعداد محدودیت
A	۱۰ تا ۱۰	۵×۵۰	۲۲۵۰	۱۰۰
	۱	۱۰×۱۰۰	۱۰۱۰۰	۲۰۰
	۲	۱۵×۲۰۰	۴۰۲۰۰	۴۰۰
B	۳	۲۵×۳۰۰	۹۰۳۰۰	۶۰۰
	۴	۳۰×۳۰۰	۹۰۳۰۰	۶۰۰
	۵	۳۰×۴۰۲	۱۶۲۰۰۰	۸۰۰
C	۶	۴۰×۴۰۲	۱۶۲۰۰۰	۸۰۰
	۱	۶۰۰×۳۰۳۸	۹۰۳۲۰۴۸۲	۶۰۰۰
	۲	۷۰۰×۳۰۳۸	۹۰۳۲۰۴۸۲	۶۰۰۰
	۳	۸۰۰×۳۰۳۸	۹۰۳۲۰۴۸۲	۶۰۰۰
	۴	۹۰۰×۳۰۳۸	۹۰۳۲۰۴۸۲	۶۰۰۰
۵	۱۰۰۰×۳۰۳۸	۹۰۳۲۰۴۸۲	۶۰۰۰	

هر یک از مسائل مذکور ۱۰ بار توسط هر دو روش حل شده است. مقادیر بهترین جواب به دست آمده در ده تکرار و زمان دست‌یابی به نتیجه مورد نظر (برحسب ثانیه) به همراه درصد خطای نسبی در روش‌های پیشنهادی به ترتیب برای هر مجموعه در جدول‌های ۲ تا ۴ ارائه شده است.

جدول ۲ نتایج حاصل از روش‌های پیشنهادی را با توجه به حل مسائل مقیاس کوچک نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود هر دو روش توانایی دست‌یابی به جواب بهینه را دارند و به جز مساله شماره ۱۰ که به نظر می‌رسد به علت سخت بودن جستجو در فضای آن که هر دو روش نتوانسته‌اند به جواب بهینه برسند و جواب‌های ارائه شده در آن‌ها در فاصله یک درصدی از بهترین جواب قرار گرفته است. به علت کوچکی و سادگی این مسائل نمی‌توان با اطمینان درباره برتری یکی از دو روش پیشنهادی اظهار نظر نمود. جدول ۳ نتایج حاصل از الگوریتم‌های پیشنهادی را مسائل مقیاس بزرگ نشان می‌دهد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود روش حل مبتنی بر الگوریتم ژنتیک با صرف زمان بیشتر به نتایج بهتری دست یافته است، این از خصوصیات ذاتی روش‌های فرا ابتکاری جمعیتی است که در آنها با افزایش اندازه مساله زمان بیشتری صرف جستجوی فضای جواب می‌شود.

در جدول ۳ تنها در مساله شماره ۵، بین بهترین جواب‌های به دست آمده از دو روش اختلاف پایینی وجود دارد. برای بررسی معنی داری این اختلاف از آزمون فرض ناپارامتری من-ویتنی^۲ در سطح معنی‌داری $\alpha = 0.02$ ، در نرم افزار Minitab15، استفاده شده است، نتیجه آزمون به شرح زیر است:

درصدی از کروموزم‌های جمعیت قبلی بهتر شده باشد و همچنین در جمعیتی که قرار است وارد آن شود تکرار نشده باشد.

۴-۸. عملکرد ابتکاری جستجوی محلی

در الگوریتم پیشنهادی بعد از تولید و پذیرش هر کروموزوم، با اعمال یک رویه ابتکاری جستجو به روش جابجای نزدیک سعی می‌شود که ارزندگی کروموزوم تولید شده، افزایش یابد. به این ترتیب که یک ژن به همراه تقاضاهای تخصیص یافته (یک خوشه) به طور تصادفی انتخاب می‌شود و با تغییر مرکز خوشه به دنبال کاهش مجموع فواصل نقاط داخل خوشه از میانه آن خوشه هستیم. این فرایند تا هنگامی ادامه می‌یابد تا هیچ بهبودی بر روی کروموزوم مفروض مشاهده نشود.

۵. اعتبارسنجی روش‌ها، نتایج و مقایسه‌ها

الگوریتم‌های پیشنهادی پس از پیاده‌سازی با استفاده از مسائل استاندارد در ادبیات موضوع ارزیابی و تحلیل شده‌اند. در این بخش از سه مجموعه مختلف از مسائل نمونه‌ای استفاده شده است. مجموعه اول (A) شامل ده مساله با اندازه کوچک است که در [۱۵] ارائه شده است.

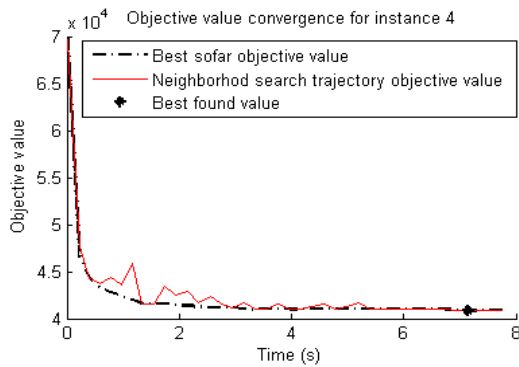
مجموعه دوم (B) شامل ۶ مساله با ابعاد بزرگ است [۲۹]. این دو مجموعه از طریق کتابخانه تحقیق در عملیات^۱ مسائل قابل دسترسی هستند [۳۰]. مجموعه سوم (C) شامل ۵ مساله با ابعاد بسیار بزرگ است [۲۹]. اطلاعات مسائل مورد استفاده به همراه ابعاد مدل ریاضی عدد صحیح جدول ۱ ارائه شده است.

کدنویسی الگوریتم‌ها در محیط برنامه نویسی Java، صورت گرفته و سیستم سخت افزار مورد استفاده جهت پیاده سازی الگوریتم‌ها، Pentium IV, CPU Dual-Core E5200 2GB RAM 2.50 GHz است.

همچنین پارامترهای الگوریتم‌های پیشنهادی با توجه به دامنه‌ای که به طور معمول که در ادبیات موضوع پیشنهاد شده و به روش سعی و خطا تنظیم شده‌اند [۳۱]. در الگوریتم شبیه‌سازی تبرییدی مقدار پارامتر دما برابر با ۲۰۰۰، مقدار پارامتر نرخ کاهش دما برابر ۰/۹۰ و تعداد تکرار در هر دما برابر ۱۲۰ در نظر گرفته شده است. همچنین در الگوریتم ژنتیک پارامتر اندازه جمعیت برابر ۱۵۰ و مقدار پارامتر احتمال اعمال اپراتور جهش برابر ۵۰٪ است. در نظر گرفته شده است. شرط خاتمه یکی از دو شرط حداکثر تعداد تکرارها برابر با ۵۰۰ تولید نسل یا همگرایی مقادیر ارزندگی بهترین و بدترین عضو هر جمعیت است.

2. Mann-Whitney

1. OR-library



شکل ۳. روند همگرایی تابع هدف مسائل بزرگ در روش شبیه‌سازی تبرییدی (مساله شماره ۴)

در جدول ۴ نتایج به دست آمده از حل مسائل مقیاس بسیار بزرگ ارائه شده است. این مسائل در ادبیات موضوع تنها یکبار به روش کران پایین و با تکنیک ابتکاری آزادسازی لاگرانژی/جانشینی^۱ حل شده است [۲۹]. به علت بزرگ بودن ابعاد این مسائل، الگوریتم ژنتیک علی‌رغم افزایش فضای محاسباتی باز هم با مشکل کمبود حافظه در دسترس مواجه گردید و نتوانست این مسائل را حل کند. اما از آنجا که روش شبیه‌سازی تبرییدی چون جز روش‌های تک‌جوابی است، با این مشکل مواجه نشده و توانسته این مسائل را حل نماید.

در اینجا نتایج حاصل از روش SA با مقادیر کران پایین ارائه شده برای هر مساله مقایسه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در سه مساله نخست میزان اختلاف از کران پایین کم است که این نشان دهنده این است که جواب‌های به دست آمده به جواب بهینه بسیار نزدیک هستند. در مسائل ۴ و ۵، میزان اختلاف از کران پایین کمی بیشتر است، که مقداری از این اختلاف می‌تواند از عواملی نظیر ضعیف بودن کران پایین مربوطه هم ناشی شود. به نظر ما در مسائلی با این مقیاس که بیش از نه میلیون متغیر وجود دارد، دستیابی به چنین جواب‌هایی بسیار نوید بخش و حاکی از توانمندی روش پیشنهادی است.

شکل ۵ نحوه خوشه بندی عناصر مساله شماره ۲ از مجموعه B را نمایش می‌دهد. در این مساله با استفاده از الگوریتم‌های پیشنهادی یک مجموعه ۲۰۰ عضوی به ۱۵ خوشه تقسیم بندی شده است. تا اینجا با توجه به تحلیل و مقایسه‌ها و همچنین آزمون‌های صورت گرفته می‌توان بیان کرد که روش‌های مبتنی بر جمعیت در مسائلی که فضای حل یا ابعاد مساله مورد نظر بزرگ نباشد (نظیر مسائل مقیاس کوچک و متوسط) از کارایی و ثبات قابل قبولی برخوردارند. اما در مسائل مقیاس بسیار بزرگ این روش‌ها با محدودیت فضای محاسباتی و عملیاتی مواجه هستند و توانمندی خود را از دست می‌دهد.

با توجه به داده‌های به دست آمده در مساله ۵، فاصله اطمینان ۹۸ درصد برای اختلاف مقادیر نتایج حاصل از روش حل مبتنی بر الگوریتم ژنتیک از روش حل مبتنی بر شبیه‌سازی تبرییدی برابر (۱۸۰،۸۰۰) است. در این آزمون با توجه به داده‌های مشاهده شده مقدار p -value برابر ۰/۰۰۰۷ به دست آمد. از آنجا که مقدار α بیشتر از p -value است، پس فرض صفر رد و در نتیجه فرض بهتر بودن نتایج حاصل از روش حل مبتنی بر الگوریتم ژنتیک، با داده‌های موجود سازگار است.

جدول ۲. نتایج روش‌های پیشنهادی در مسائل کوچک

#	بهترین جواب	نتایج روش‌های پیشنهادی			زمان (ثانیه)	خطای نسبی	جواب GA	خطای نسبی	زمان (ثانیه)
		جواب SA	خطای نسبی	جواب					
۱	۷۱۳	۷۱۳	۰/۰۰٪	۰/۰۴	۰/۰۰٪	۷۱۳	۰/۰۰٪	۰/۰۳	
۲	۷۴۰	۷۴۰	۰/۰۰٪	۰/۰۲	۰/۰۰٪	۷۴۰	۰/۰۰٪	۰/۰۳	
۳	۷۵۱	۷۵۱	۰/۰۰٪	۰/۰۵	۰/۰۰٪	۷۵۱	۰/۰۰٪	۰/۰۴	
۴	۶۵۱	۶۵۱	۰/۰۰٪	۰/۰۶	۰/۰۰٪	۶۵۱	۰/۰۰٪	۰/۰۷	
۵	۶۶۴	۶۶۴	۰/۰۰٪	۰/۱۱	۰/۰۰٪	۶۶۴	۰/۰۰٪	۰/۰۶	
۶	۷۷۸	۷۷۸	۰/۰۰٪	۰/۰۷	۰/۰۰٪	۷۷۸	۰/۰۰٪	۰/۱۱	
۷	۷۸۷	۷۸۷	۰/۰۰٪	۳/۸۹	۰/۰۰٪	۷۸۷	۰/۰۰٪	۰/۵۶	
۸	۸۲۰	۸۲۰	۰/۰۰٪	۲/۳۲	۰/۰۰٪	۸۲۰	۰/۰۰٪	۰/۸۹	
۹	۷۱۵	۷۱۵	۰/۰۰٪	۱/۱۲	۰/۰۰٪	۷۱۵	۰/۰۰٪	۰/۰۴	
۱۰	۸۲۹	۸۴۱	۱/۱۴	۳/۱۳	۰/۳۶٪	۸۳۲	۰/۳۶٪	۱/۲۱	

جدول ۳. نتایج روش‌های پیشنهادی در مسائل بزرگ

#	بهترین جواب	نتایج روش‌های پیشنهادی			زمان (ثانیه)	خطای نسبی	جواب GA	خطای نسبی	زمان (ثانیه)
		جواب SA	خطای نسبی	جواب					
۱	۱۷۲۸۹	۱۷۲۸۹	۰/۰۰٪	۲/۱۱	۰/۰۰٪	۱۷۲۸۹	۰/۰۰٪	۳/۶۷	
۲	۳۳۲۷۱	۳۳۲۷۱	۰/۰۰٪	۳/۰۸	۰/۰۰٪	۳۳۲۷۱	۰/۰۰٪	۸/۳۴	
۳	۴۵۳۳۵	۴۵۵۵۴	۰/۴۸٪	۴/۸۰	۰/۴۸٪	۴۵۳۷۰	۰/۰۷٪	۴۳/۳۰	
۴	۴۰۶۳۶	۴۰۸۴۱	۰/۵۰٪	۷/۲۳	۰/۵۰٪	۴۰۶۵۱	۰/۰۴٪	۹۵/۸۸	
۵	۶۱۹۲۵	۶۲۱۱۲	۰/۳۰٪	۶/۳۹	۰/۳۰٪	۶۰۰۷۳	۰/۲۰٪	۱۴۱/۱۰	
۶	۵۲۴۵۸	۵۲۵۹۰	۰/۲۵٪	۶/۷۱	۰/۲۵٪	۵۲۴۷۳	۰/۰۳٪	۴۸/۱۳۴	

در نمودار شکل ۳ نمونه‌ای از روند همگرایی تابع هدف مسائل مقیاس بزرگ برای مساله شماره ۴ از مجموعه B ارائه شده است. همچنین در شکل ۴ نمونه‌ای از روند بهبود و همگرایی مقادیر ارزندگی بهترین و بدترین جواب‌ها در جمعیت‌های متوالی از الگوریتم ژنتیک برای مساله شماره ۵ از مجموعه B نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر دو روش در مدت زمان بسیار کمی پس از دستیابی به بهترین جواب متوقف شده‌اند، این نشان دهنده این است که پارامترهای الگوریتم‌های پیشنهادی به طور مناسبی تنظیم شده‌اند.

پیشنهادی در این مقاله توانسته‌اند در اکثر موارد به نتایج بهتری دست یابند.

جدول ۵. مقایسه روش‌های پیشنهادی با روش مبتنی بر جستجوی همسایگی

درصد خطا در [۱۸] VNSLB	نتایج روش‌های پیشنهادی		#	مجموعه
	درصد خطا در GA	درصد خطا در SA		
۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۱	A
۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۲	
۰/۲۷٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۳	
۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۴	
۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۵	
۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۶	
۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۷	
۰/۲۴٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۸	
۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۹	
۰/۶۰٪	۰/۳۶٪	۱/۱۴٪	۱۰	
۰/۷۲٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۱	B
۰/۷۹٪	۰/۰۰٪	۰/۰۰٪	۲	
۰/۹۹٪	۰/۰۷٪	۰/۴۸٪	۳	
۰/۷۱٪	۰/۰۴٪	۰/۵۰٪	۴	
۰/۷۳٪	۰/۲۰٪	۰/۳۰٪	۵	
۰/۴۲٪	۰/۰۳٪	۰/۲۵٪	۶	
-	-	۳/۸۳٪	۱	C
-	-	۳/۵۷٪	۲	
-	-	۴/۴۸٪	۳	
-	-	۷/۲۷٪	۴	
-	-	۸/۴۸٪	۵	

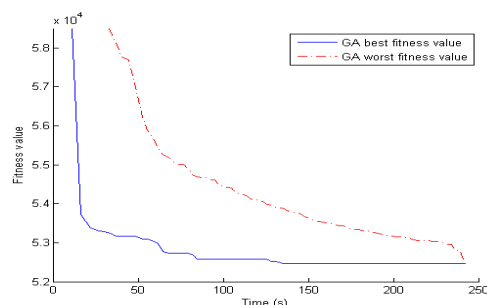
۶. نتیجه گیری

مساله خوشه‌بندی ظرفیت‌دار نسخه‌ای از مسائل خوشه‌بندی است که به دنبال افراز یک مجموعه n تایی از عناصر به p خوشه با رعایت

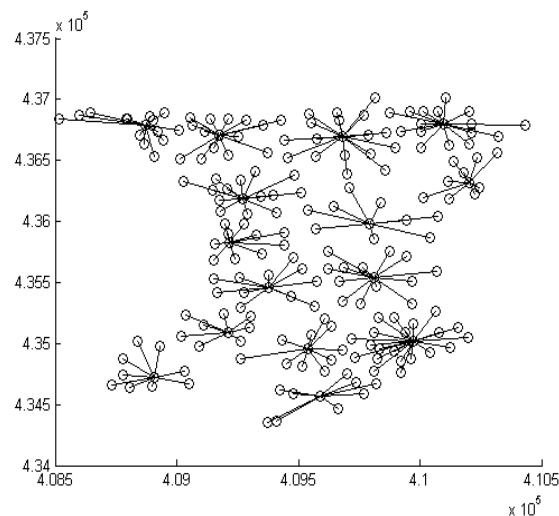
محدودیت ظرفیت هر خوشه است به طوری که مجموع کل عدم تشابهات درون تمامی خوشه‌ها حداقل مقدار ممکن باشد. در این مقاله نحوه مدل‌سازی مساله مذکور در قالب مساله p -median ظرفیت‌دار ارائه گردید و دو روش حل کارا جهت حل مساله مورد نظر ارائه شد. روش نخست مبتنی بر الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی است که در آن ساختارهای مختلف همسایگی استفاده شده است. روش دوم یک الگوریتم ژنتیک ترکیبی است که در آن از یک رویه ابتکاری جستجو محلی جهت جستجوی موثرتر فضای جواب استفاده شده است. در ادامه به منظور نشان دادن اعتبار و کارایی، روش‌های پیشنهادی بر روی چند نمونه مساله آزمون موجود در ادبیات موضوع اجرا گردید و نتایج حاصل از لحاظ زمان حل و کیفیت جواب حاصل مورد بررسی و مقایسه قرار گرفتند. در مقایسه دو روش ارائه شده نتیجه شد که هر چند روش حل مبتنی بر

جدول ۴. نتایج روش‌های پیشنهادی در مسائل بسیار بزرگ

#	کران پایین	نتایج روش‌های پیشنهادی		
		جواب SA	زمان (ثانیه)	خطای نسبی
۱	۱۲۲۰۲۱	۱۲۶۶۹۵	۴۵۲۵	۳/۸۳٪
۲	۱۰۸۶۸۶	۱۱۲۵۷۲	۸۱۹۳	۳/۵۷٪
۳	۹۸۵۳۱	۱۰۹۵۳	۱۰۰۵۶	۴/۴۸٪
۴	۹۰۲۴۰	۹۶۸۰۰	۶۹۵۰	۷/۲۷٪
۵	۸۲۲۳۳	۹۰۲۹۵	۶۵۰۰	۸/۴۸٪



شکل ۴. روند همگرایی ارزش‌های بهترین و بدترین جواب در الگوریتم ژنتیک برای مسائل بزرگ (مساله شماره ۵)



شکل ۵. افراز ۱۰۰ عنصر مجموعه مساله ۲ از مجموعه B. به خوشه ۱۵

در ادامه این بخش، نتایج روش‌های پیشنهادی با نتایج یکی از روش‌های که اخیراً به عنوان یک روش کارا در ادبیات موضوع ارائه شده، مورد مقایسه قرار گرفته است. روش حل مذکور یکی از کاراترین الگوریتم‌هایی که در سال ۲۰۰۸ ارائه گردیده است [۱۸]. در روش ارائه شده از کران‌های ابتکاری که از حل مسائل تخفیف یافته در نرم افزار CPLEX به دست می‌آید، در روش جستجوی همسایگی متغیر استفاده شده است. در جدول ۵ خلاصه مقایسه‌ها دو روش پیشنهادی با روش مذکور ارائه شده است. مقادیری که با حروف ضخیم نشان داده شده است، حاکی از آن است که روش‌های

- [13] Boccia, M., Sforza, A., Sterle, C., Vasilyev, I. "A Cut and Branch Approach for the Capacitated p -Median Problem Based on Fenchel Cutting Planes." J Math Model Algor, 7, 1, 2008, pp. 43-58.
- [14] Garey, M.R., Johnson, D.S., "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness", Freeman, San Francisco, 1979.
- [15] Osman, I.H., Christofides, N., "Capacitated Clustering Problems by Hybrid Simulated Annealing and Tabu Search", International Transactions in Operational Research, 1, 3, 1994, pp. 317-336.
- [16] Chaves, A.A., Lorena L.A.N., Clustering search heuristic for the capacitated p -median problem. Computers & Operations Research, 37, 2010, pp. 552-558.
- [17] Chaves, A.A., Lorena, L.A.N., Clustering search heuristic for the capacitated p -median problem. Springer Advances in Software Computing Series, 44, 136-43, 2007.
- [18] Fleszar, K., Hindi, K.S., "An Effective VNS for the Capacitated p -Median Problem", European Journal of Operation Research 191, 2008, pp. 612-622.
- [19] Ahmadi, S., "Metaheuristics for the Capacitated Clustering Problem", Dissertation at the University of Kent at Canterbury, 1998.
- [20] Francia, P.M., Sosa, N.M., Pureza, V., "An Adaptive Tabu Search Algorithm for the Capacitated Clustering Problem", International Transactions in Operational Research, 6, 6, 1999, pp. 665-678.
- [21] Scheuerer, S., Wendolsky, R., "A Scatter Search Heuristic for the Capacitated Clustering Problem". European Journal of Operational Research, 169, 2006, pp. 533-547.
- [22] Reese, J., "Solution Methods for the p -Median Problem: An Annotated Bibliography," Networks, 48, 3, 2006, pp. 125-142.
- [23] Mladenovic, N.J., Brimberg, P., Hansen, J.A., Moreno-Perez, "The p -Median Problem: A Survey of Metaheuristic Approaches", European Journal of Operational Research, 179, 2007, pp. 927-939.
- [24] Diaz, J.A., Fernandez, E., "Hybrid Scatter Search and Path Relinking for the Capacitated p -Median Problem." European Journal of Operational Research, 169, 2, 2006, pp. 570-585.
- [25] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., M. Vecchi, P. "Optimization by Simulated Annealing", Science 220, 671-680, 1983.
- [26] Holland J.H., "Adaptation in Natural and Artificial System", Ann Arbor, Michigan: The University of Michigan Press. 1975.
- [27] Blum, C., Aguilera, M.J.B., Roli, A., Sampels, M., Hybrid Metaheuristics: An Emerging Approach to Optimization. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

الگوریتم ژنتیک در مسائل کوچک تا متوسط نسبت به روش حل مبتنی بر شبیه‌سازی تیریدی کارآمدتر است. اما با افزایش ابعاد مسائل و پیچیدگی فضای جواب، به علت محدودیت فضای محاسباتی قادر به حل مسائل مقیاس بسیار بزرگ نیست. در آخر با توجه به یافته‌های به دست آمده نتیجه شد که هر یک از الگوریتم‌های پیشنهادی در حل دامنه‌ای از مسائل مورد توجه قابل قبول و توانمند هستند.

مراجع

- [1] Negreiros, M.J.N., Palhano, A.W.C., "The Capacitated Centered Clustering Problem", Computers and Operations Research, 33(6):1639-63, 2006.
- [2] Fisher, M., Jaikumar, R., "A Generalized Assignment Heuristic For The Vehicle Routing Problem", Networks, 11, 2, 1981, pp. 109-124.
- [3] Koskosidis, Y.A., Powell, W.B., "Clustering Algorithms For Consolidation Of Customer Orders Into Vehicle Shipments", Transportation Research B 26, 5, 1992, pp. 365-379.
- [4] Bozkaya, B., Erkut, E., Laporte, G., "A Tabu Search Heuristic and Adaptive Memory Procedure for Political Districting", European Journal of Operational Research, 144, 1, 2003, pp. 12-26.
- [5] Mulvey, J.M., Beck, M.P., "Solving Capacitated Clustering Problems", European Journal of Operational Research, 18, 3, 2003, pp. 339-348.
- [6] Hakimi, S.L., "Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of A Graph", Operations Research, 12, 1964, pp. 450-459.
- [7] Klastorin, T., "The P-Median Problem for Cluster Analysis: A Comparative Test Using the Mixture Model Approach", Management Science, 31, 84-95, 1985.
- [8] Cornuejols, G., Fisher, M.L., Nemhauser, G.L., "Location of Bank Accounts to Optimize Float: An Analytic Study of Exact and Approximate Algorithms", Management Science, 23, 1977, pp. 789-810.
- [9] Maniezzo, V., Mingozzi, A., Baldacci, R., "A Bionomic Approach to the Capacitated P-Median Problem", Journal of Heuristics, 4, 3, 1998, pp. 263-280.
- [10] Pirkul, H., "Efficient Algorithms for the Capacitated Concentrator Location Problem", Computers & Operations Research, 14, 3, 1987, pp. 197-208.
- [11] Lorena, L.A.N., Senne, E.L.F., "Local Search Heuristics for Capacitated P-Median Problems", Networks and Spatial Economics, 3, 4, 1987, pp. 407-419.
- [12] Baldacci, R., Hadjiconstantinou, E., Maniezzo, V., Mingozzi, A., "A New Method for Solving Capacitated Location Problems Based on a Set Partitioning Approach", Computers and Operations Research, 29, 2002, pp. 365-386.

- [28] Weise, T., *Global Optimization Algorithms – Theory and Application*, University of Kassel, Distributed Systems Group, Thomas Weise, 2007.
- [29] Lorena, L., Senne, E. “*A Column Generation Approach to Capacitated p -Median Problems*”, *Computers and Operations Research*, 31, 6, 2004, pp. 863–876.
- [30] Beasley, J.E., “*OR-Library: Distributing Test Problems by Electronic Mail*”, *Journal of the Operational Research Society*, 41, 1990, pp. 1069–1072.
- [31] Talbi, El.Gh, *Metaheuristics: from design to implementation*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2009.