



# Identification of Out of Control Variables Via Joint Standardization

F. Soleimani, M. Kheradmandnia\* & M. Alirezai

*Fateme Soleimani, MSc student of Statistics - Iran University of Isfahan*

*Manouchehr Kheradmandnia, Assistance professor of Statistics - Iran University of Isfahan*

*Mozhgan Alirezai, MSc student of Statistics - Iran University of Isfahan*

## Keywords

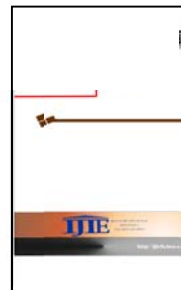
Joint standardization,  
multivariate control charts,  
interpretation of signals

## ABSTRACT

*The identification of the out of control variable, or variables, after a multivariate control chart signals, is an appealing subject for many researchers in the last years. In this paper we propose a new method for approaching this problem based on the maximum of absolute value of jointly standardized variables. Theoretical control limits are derived and numerical illustrations based on simulated data are given.*

© 2014 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 25, No.3, All Rights Reserved

\*  
**Corresponding author.** *Manouchehr Kheradmandnia*  
Email: [kheradmand@sci.ui.ac.ir](mailto:kheradmand@sci.ui.ac.ir)



## شناسایی متغیرهای خارج از کنترل از طریق استانداردسازی توأم

فاطمه سلیمانی، منوچهر خردمندنیا\* و مژگان علیرضایی

چکیده:

کلمات کلیدی

هنگامی که در یک نمودار کنترل فرایند آماری چندمتغیره هشدار خروج از کنترل ظاهر می‌شود یک سؤال طبیعی این است که کدام متغیر یا متغیرها این وضعیت را بوجود آورده‌اند؟ در واقع وضعیت خروج از کنترل فقط می‌تواند مربوط به یکی از متغیرها باشد و معقول نیست که وضعیت خروج از کنترل به همه متغیرها نسبت داده شود. در متون کنترل کیفیت آماری روش‌های مختلفی برای پاسخ به این سؤال پیشنهاد شده است. در مقاله حاضر روشی معرفی می‌شود که در آن آماره کنترل ماکسیمم قدرمطلق متغیرهای توأم استاندارد شده می‌باشد. اهمیت روش پیشنهادی، سادگی آن در مقایسه با روش‌های مشابه پیشنهادی موجود در متون کنترل فرایندهای چندمتغیره آماری می‌باشد.

نمودارهای کنترل چندمتغیره،  
تعبیر هشدار،  
استانداردسازی توأم

اطلاعاتی که در کوواریانس بین متغیرها نهفته است به حساب نمی‌آیند و لذا نتایجی ناصحیح و یا حداقل نادقیق حاصل می‌گردد. نادیده گرفتن همبستگی‌ها می‌تواند منجر به هشدارهای نادرست مبنی بر وجود یک وضعیت خارج از کنترل و یا عدم هشدار به مواردی که واقعا فرایند خارج از کنترل است، شود. محققین زیادی به بررسی شناسایی متغیرهای خارج از کنترل در حالت هشدار نمودارهای کنترل چندمتغیره پرداخته‌اند. آلت (۱۹۸۵) یکی از اولین محققانی بود که با استفاده از حدود بونفرونی این موضوع را بررسی کرد. هایتر و تسوئی (۱۹۹۴) حدود کنترل بونفرونی را گسترش داده و روشی مبتنی بر فواصل کنترل همزمان ارائه کردند. اسپولودا و ناکلاس (۱۹۹۷) نمودار کنترل مینیماکس را پیشنهاد کردند. این نمودار براساس بررسی ماکسیمم و مینیمم میانگین‌های نمونه‌ای استاندارد شده متغیرها می‌باشد. آلت (۱۹۸۵) و جکسون (۱۹۹۱) حدود کنترل بیضی‌گون را برای حالت دومتغیره معرفی کردند. گسترش حدود کنترل بیضی‌گون برای بیش از دو متغیر توسط چیو و موننگمری (۱۹۹۲) مطرح شد. یک روش جذاب و مفید برای تعبیر هشدار، روش تجزیه  $T^2$  هنتلینگ است که توسط میسون و همکاران (۱۹۹۵) معرفی شد. ایده اصلی در این روش تجزیه آماره  $T^2$  به قسمت‌های مستقلی است که هر قسمت نقش یک متغیر منفرد را دربردارد. تریسی و همکاران (۱۹۹۵) برای تعبیر هشدار روش مؤلفه‌های اصلی را به‌کار بردند. ماراولاکیس و همکاران (۲۰۰۲) یک روش ابتکاری تشریح کردند که براساس نسبت‌هایی از

### ۱. مقدمه

موضوع این مقاله شناسایی متغیرهای عامل هشدار خروج از کنترل در نمودارهای کنترل چندمتغیره است. در متون کنترل کیفیت چندمتغیره این موضوع را تحت عنوان "تعبیر هشدار" مورد بحث قرار می‌دهند. به‌طور کلی در یک مسأله‌ی کنترل کیفیت آماری چندمتغیره،  $p$  متغیر همبسته مطرح هستند و معمولاً فرض می‌شود که در شرایط کنترل دارای توزیع توأم نرمال  $p$  متغیره هستند. هنگامی که در یک نمودار کنترل فرایند آماری چندمتغیره هشدار خروج از کنترل ظاهر می‌شود یک دغدغه مهم یافتن متغیر یا متغیرهایی است که این وضعیت را بوجود آورده‌اند. اگر هر یک از متغیرها به‌طور جداگانه در چارچوب یک نمودار کنترل یک‌متغیره مورد بررسی قرار گیرد

تاریخ وصول: ۹۰/۱۱/۱۷

تاریخ تصویب: ۹۱/۰۸/۱۵

فاطمه سلیمانی، دانشجوی ارشد دانشگاه اصفهان - اصفهان، دروازه شیراز،  
دانشگاه اصفهان، دانشکده علوم، گروه آمار  
soleymani\_stat@yahoo.com  
\*نویسنده مسئول مقاله: دکتر منوچهر خردمندنیا، استادیار گروه آمار  
دانشگاه اصفهان - اصفهان، دروازه شیراز، دانشگاه اصفهان، دانشکده علوم،  
گروه آمار kheradmand@sci.ui.ac.ir  
مژگان علیرضایی، فارغ التحصیل ارشد دانشگاه اصفهان - اصفهان، دروازه  
شیراز، دانشگاه اصفهان، دانشکده علوم، گروه آمار  
alirezaei\_1363@yahoo.com

مؤلفه‌های اصلی می‌باشد. ماراوالاکیس و برسیموس (۲۰۰۹) روش جدیدی برای تعبیر هشدار معرفی کردند که مبتنی بر استفاده از منحنی آندرو می‌باشد. نمودار کنترلی که ما در مقاله حاضر معرفی کرده‌ایم با الهام از ایده کالگوندا و کولکارنی (۲۰۰۴) شکل گرفته است. آن‌ها برای فرایندهای خودهمبسته نمودار کنترلی پیشنهاد کردند که علاوه بر شناسایی وضعیت خروج از کنترل، به تعبیر هشدار نیز کمک می‌کند. این نمودار براساس ماکسیم قدرمطلق متغیرهای استاندارد شده یکی در هر بار می‌باشد و لذا حد بالای کنترل فقط از طریق شبیه‌سازی قابل حصول است. ما نمودار کنترل جدیدی معرفی می‌کنیم که بر پایه استانداردسازی توأم مشاهدات استوار است و این نمودار را  $\max Z$  می‌نامیم.

استانداردسازی توأم به جای استانداردسازی یکی در هر بار باعث می‌شود که حد بالای کنترل بدون نیاز به شبیه‌سازی قابل حصول باشد و همبستگی بین متغیرها نیز به حساب می‌آیند. در نتیجه نمودار کنترل را از لحاظ اجرایی، کاربردی و دقت ارتقاء می‌بخشند. ایده اولیه محاسبه حد بالای کنترل در نمودار  $\max Z$  در پایان‌نامه علیرضایی (۱۳۸۸) ارائه شده است. وی از این ایده برای کنترل فرایندهای آماری چندمتغیره خودهمبسته استفاده نمود. در پایان‌نامه کارشناسی ارشد سلیمانی (۱۳۹۰) روش‌های مهم موجود در متون آماری که مربوط به تعبیر هشدار هستند مرور شده است و برنامه‌هایی با نرم‌افزار MATLAB برای جنبه‌های محاسباتی ارائه گردیده است. در این پایان‌نامه از طریق مثال‌ها و مطالعات شبیه‌سازی قابلیت روش‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲. انواع استانداردسازی داده‌های چندمتغیره

فرض کنید بردار تصادفی  $\underline{X}$  دارای توزیع  $p$  متغیره با بردار میانگین  $\underline{\mu}$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  باشد. در این بخش دو تبدیل به فرم  $\underline{Y} = A(\underline{X} - \underline{b})$  معرفی می‌شود که در تحلیل‌های چندمتغیره اهمیت زیادی دارند. در تبدیل‌هایی که معرفی می‌شود  $A$  ماتریسی  $p \times p$  است.

### ۲-۱. تبدیل استاندارد کننده توأم

فرض کنید  $\underline{X}$  یک بردار تصادفی با بردار میانگین  $\underline{\mu}$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  است. تبدیل زیر را تبدیل استاندارد کننده توأم می‌نامند.

$$\underline{Z} = \Sigma^{-1/2} (\underline{X} - \underline{\mu}) \quad (۱)$$

به سهولت می‌توان نشان داد که  $E(\underline{Z}) = \underline{0}$  و  $Var(\underline{Z}) = I$ . ملاحظه می‌شود که درایه‌های  $\underline{Z}$  دوبدو ناهمبسته‌اند و هر یک دارای میانگین صفر و انحراف استاندارد یک هستند. یعنی برای

۲-۲. تبدیل استاندارد کننده یکی در هر بار  
تبدیل  $\underline{U} = D^{-1/2} (\underline{X} - \underline{\mu})$  را در نظر بگیرید که در آن  $D = diag(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{pp})$  به سهولت می‌توان نشان داد

$$\underline{U} = (U_1, U_2, \dots, U_p)^T = \left( \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{X_p - \mu_p}{\sigma_p} \right)^T \quad (۲)$$

واضح است که  $E(\underline{U}) = \underline{0}$  و  $Var(\underline{U}) = \rho_{\underline{X}}$ . ملاحظه می‌شود که هر چند درایه‌های بردار  $\underline{U}$  متغیرهای تصادفی استاندارد هستند ولی دوبدو ناهمبسته نمی‌باشند. یعنی داریم

$$Cov(U_i, U_j) = Cov\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}, \frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j}\right) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} Cov(X_i, X_j) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \rho_{ij}, \quad \forall i \neq j \quad (۳)$$

در حالت خاص اگر  $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$  آنگاه  $\underline{U} \sim N_p(\underline{0}, \rho_{\underline{X}})$  و درایه‌های بردار  $\underline{U}$  متغیرهای نرمال استاندارد هستند ولی مستقل نمی‌باشند.

### ۳. نمودار کنترل $\max Z$ بر پایه مشاهدات تکی

فرض کنید  $\underline{X}_t = (X_{t1}, \dots, X_{tp})^T$  بردار نمونه  $t$ -ام از زمان شروع پیگیری کنترل فرایند است که در شرایط کنترل دارای توزیع نرمال  $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$  می‌باشد. تبدیل  $\underline{Z}_t = \Sigma^{-1/2} (\underline{X}_t - \underline{\mu})$  را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت

$$\underline{Z}_t = \Sigma^{-1/2} (\underline{X}_t - \underline{\mu}) = (Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tp})^T \sim N_p(\underline{0}, I) \quad (۴)$$

واضح است که  $Z_{ti}$  ها مستقل هستند و از توزیع نرمال استاندارد پیروی می‌کنند. آماره کنترل در نمودار کنترل  $\max Z$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\{M_t = \max\{|Z_{t1}|, |Z_{t2}|, \dots, |Z_{tp}|\} \quad (۵)$$

که در آن  $Z_{ti}$  درایه  $i$ -ام بردار  $\underline{Z}_t$  است. اگر  $\underline{\mu}$  و  $\Sigma$  نامعلوم باشند، برآوردهای متناظرشان در فاز اول به جای آن‌ها قرار می‌گیرند. فرایند تولید خارج از کنترل تلقی می‌شود اگر  $M_t \geq c_{\alpha}$ ، که در آن  $c_{\alpha}$  عددی است که در شرایط کنترل در تساوی زیر صدق می‌کند

$$c_\alpha P(|Z_{t2}| < c_\alpha) \cdots P(|Z_{tp}| < c_\alpha) = [P(|Z_{t1}| < c_\alpha)]^p = (2\Phi(c_\alpha) - 1)^p$$

بنابراین مقدار  $c_\alpha = \Phi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)^{1/p}+1}{2}\right)$  بدست می‌آید که  $\Phi(\cdot)$  تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. بطوری که  $Z \sim N(0,1)$  و  $P(Z \leq z) = \Phi(z)$  بر این اساس حد بالای کنترل برای نمودار کنترل  $\max Z$  به صورت زیر می‌باشد

$$UCL = \Phi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)^{1/p}+1}{2}\right) \quad (۹)$$

در جدول زیر برای مقادیر مختلف  $p$  و  $\alpha$  مقادیر  $ARL_0$  و  $UCL$  ارائه شده‌اند.

جدول ۱. مقادیر  $ARL_0 = 1/\alpha$  و  $UCL$  برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $p$

UCL					
$\alpha$	$ARL_0$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$	$P = 5$
0.05	20	2.2365	2.3877	2.4909	2.5688
0.01	100	2.8062	2.9342	3.0222	3.0890
0.005	200	3.0230	3.1435	3.2267	3.2900
0.0025	400	3.2270	3.3412	3.4203	3.4805

(۱۲)

$$M_t = \max\{|Z_{t1}|, |Z_{t2}|, \dots, |Z_{tp}|\}$$

فرایند تولید خارج از کنترل تلقی می‌شود اگر  $M_t \geq c_\alpha$ . عددی است که در شرایط کنترل در تساوی زیر صدق می‌کند

$$P(M_t < c_\alpha) = 1 - \alpha \quad (۱۳)$$

مقدار  $c_\alpha$  را طوری تعیین می‌کنند که  $ARL_0 = 1/\alpha$  دارای مقدار مطلوبی باشد. مشابه حالت مشاهدات تکی مقدار  $c_\alpha = \Phi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)^{1/p}+1}{2}\right)$  به‌عنوان حد بالای کنترل بدست می‌آید.

#### ۵. شناسایی متغیرهای عامل هشدار خروج از کنترل

##### در نمودار $\max Z$

وقتی که  $M_t$  از  $c_\alpha$  عبور کند هشدار خروج از کنترل ظاهر می‌شود و لذا بردار مشاهده شده  $X_t$  خارج از کنترل تلقی می‌شود. در اینجا به سهولت می‌توان تشخیص داد که کدامیک از  $p$  متغیر  $X_{t1}, X_{t2}, \dots$  یا  $X_{tp}$  متناظر با ماکسیمم است. پیشنهاد ما این است که به همراه نمودار کنترل  $\max Z$  که

$$P(M_t < c_\alpha) = 1 - \alpha \quad (۶)$$

مقدار  $c_\alpha$  را طوری تعیین می‌کنند که  $ARL_0 = 1/\alpha$  دارای مقدار مطلوبی باشد که  $ARL_0$  متوسط طول دنباله تا اولین هشدار در شرایط کنترل می‌باشد. برای یک نمودار خوب انتظار می‌رود که  $ARL_0$  حتی الامکان بزرگ باشد. از آنجایی که  $Z_{ti}$  ها مستقل هستند و دو گزاره زیر معادل یکدیگرند

$$\max\{|Z_{t1}|, |Z_{t2}|, \dots, |Z_{tp}|\} < c_\alpha \text{ و } \{ |Z_{t1}| < c_\alpha \text{ و } |Z_{t2}| < c_\alpha \text{ و } \dots \text{ و } |Z_{tp}| < c_\alpha \} \quad (۷)$$

می‌توان نوشت:

$$P(M_t < c_\alpha) = P(|Z_{t1}| < c_\alpha, |Z_{t2}| < c_\alpha, \dots, |Z_{tp}| < c_\alpha) = P(|Z_{t1}| < c_\alpha, \dots, |Z_{tp}| < c_\alpha) \quad (۸)$$

#### ۴. نمودار کنترل $\max Z$ بر پایه مشاهدات گروهی

فرض کنید  $\bar{X}_t = (\bar{X}_{t1}, \bar{X}_{t2}, \dots, \bar{X}_{tp})^T$  بردار میانگین  $t$ -امین زیر نمونه  $n$  تایی از  $X$  از زمان شروع پیگیری کنترل فرایند است و همچنین فرض کنید  $\bar{X}$  در شرایط کنترل از توزیع  $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$  پیروی می‌کند. در این صورت واضح است که  $\bar{X}_t$  در شرایط کنترل دارای توزیع  $N_p(\underline{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma)$  می‌باشد. قرار دهید

$$Z_t = \left(\frac{1}{n}\Sigma\right)^{-1/2} (\bar{X}_t - \underline{\mu}) = (Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tp})^T \quad (۱۰)$$

اگر  $\underline{\mu}$  و  $\Sigma$  معلوم نباشند، برآوردهای متناظرشان در فاز اول به جای آن‌ها قرار می‌گیرند. واضح است که در شرایط کنترل داریم

$$Z_t \sim N_p(0, I) \quad (۱۱)$$

در اینجا نیز درایه‌های بردار  $Z_t$  مستقل و هم‌توزیع  $N(0,1)$  هستند. آماره کنترل در نمودار کنترل  $\max Z$  بر پایه مشاهدات گروهی به صورت زیر تعریف می‌شود:

قرار داده شده است. در واقع میانگین متغیر دوم را به اندازه ۱/۵ برابر انحراف معیار افزایش داده‌ایم. در جدول (۲) داده‌های تولید شده ۱۰ نمونه تحت کنترل و نیز ۱۰ نمونه خارج از کنترل ملاحظه می‌شوند. در شکل (۱) نمودار ۲۰ نمونه سه‌متغیره تولید شده، نمودار کنترل maxZ و نمودار اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم آورده شده است. حد بالای کنترل برای  $ARL_0 = 100$  ( $\alpha = 0.01$ ) از جدول (۱)، مقدار  $c_\alpha = 2.9342$  می‌باشد. همانطور که در شکل (۱) ملاحظه می‌شود در نمودار کنترل maxZ برای ۱۰ نمونه اول که تحت کنترل هستند هیچ هشدار خروج از کنترلی دیده نمی‌شود اما برای ۱۰ نمونه دوم که میانگین آن‌ها آلوده شده است، هشدار خروج از کنترل به وضوح مشخص است. در این نمودار ملاحظه می‌شود که تعداد ۸ مورد از ۱۰ مورد مشاهده‌های آلوده سه‌متغیره خارج کنترل هستند (مورد ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ و ۱۹). براساس نمودار-index Plot در شکل (۱) ملاحظه می‌شود که در هر ۸ مورد که هشدار خروج از کنترل وجود دارد، متغیر دوم به‌عنوان عامل خروج از کنترل شناسایی شده است و در هیچ موردی متغیرهای اول و سوم به‌عنوان عامل خروج از کنترل شناسایی نشده‌اند. به عبارت دیگر تعداد دفعاتی که متغیر دوم به‌عنوان عامل خروج از کنترل شناسایی شده برابر ۸ و تعداد دفعاتی که متغیر اول و متغیر سوم به‌عنوان عامل خروج از کنترل شناسایی شده‌اند برابر صفر می‌باشد. این فراوانی‌ها در جدول (۳) ارائه شده‌اند. نتیجه می‌گیریم که متغیر دوم، متغیر عامل خروج از کنترل بوده است. لازم به ذکر است که با حذف متغیر دوم دیگر هشدار خروج از کنترل در نمودار کنترل maxZ وجود ندارد و همه نقاط در ناحیه کنترل قرار می‌گیرند.

براساس آماره کنترل  $M_t$  استوار است، نمودار مکملی رسم شود که در آن اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم (یکی از اندیس‌های ۱، ۲، ۳ یا  $p$ ) مشخص می‌شود. در این صورت هنگامی که هشدار خروج از کنترل ظاهر شود، می‌توان دریافت که این هشدار مربوط به کدامیک از  $p$  متغیر بوده است. پیشنهاد دیگر این است که از زمانی که پیگیری کنترل فرایند آغاز می‌شود می‌توان یک جدول فراوانی تهیه کرد که در آن تعداد مواردی که هر یک از  $p$  متغیر عامل خروج از کنترل بوده‌اند، مشخص شود. در این صورت متغیری که دارای بیشترین فراوانی است به‌عنوان محتمل‌ترین متغیر عامل هشدار خروج از کنترل شناسایی می‌گردد. مثال‌های عددی بخش بعد روشنگر ایده‌های اساسی می‌باشند. در مواردی که بیش از یک متغیر عامل خروج از کنترل باشد می‌توان پس از شناسایی اولین متغیری که وضعیت خروج از کنترل را بوجود آورده، آن را از تحلیل حذف کرده و اگر همچنان هشدار خروج از کنترل وجود داشته باشد دومین متغیر را شناسایی کرد. سپس با حذف دومین متغیر نیز می‌توان متغیر سوم را شناسایی و از تحلیل حذف کرد. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم که دیگر هشدار خروج از کنترل وجود نداشته باشد.

#### ۶. مثال‌ها

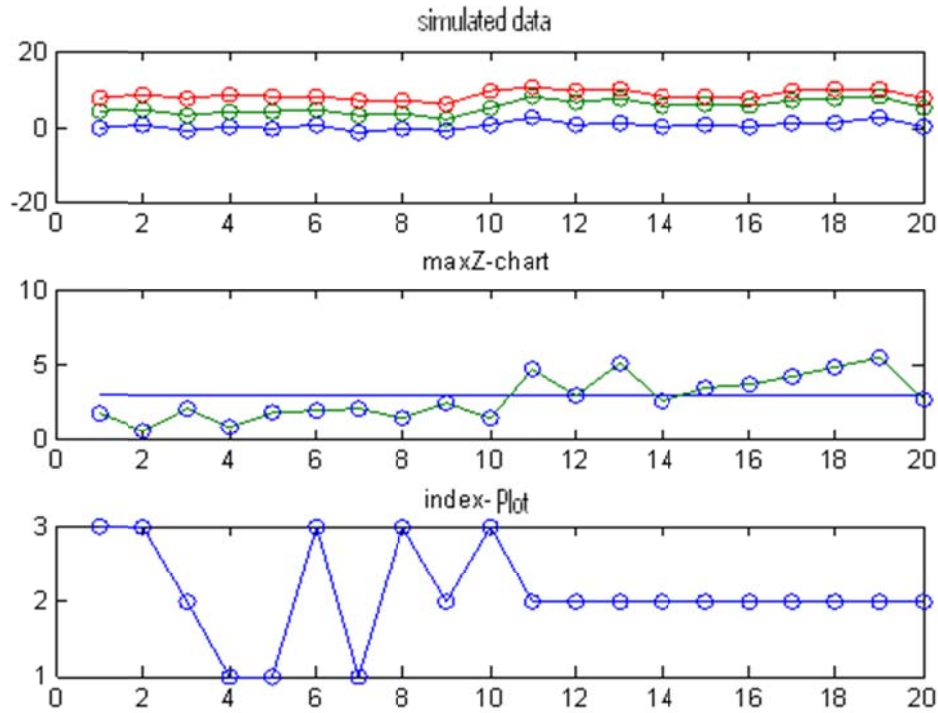
**مثال ۱:** فرض کنید  $X_t = (X_{t1}, X_{t2}, X_{t3})^T$  بردار تصادفی  $t$ -ام از زمان شروع پیگیری کنترل فرایند است که در شرایط کنترل دارای بردار میانگین و ماتریس کوواریانس زیر است

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

تعداد ۲۰ نمونه تولید و برای ۱۰ نمونه اولی میانگین فرایند یعنی  $\underline{\mu}$  را بدون تغییر قرار داده و برای ۱۰ نمونه آخر میانگین فرایند برابر:  $\underline{\mu}_{out} = \underline{\mu} + (0 \ 1.5 \ 0)^T$

جدول ۲. داده‌های سه‌متغیره تولید شده

۱۰ نمونه تحت کنترل			۱۰ نمونه خارج کنترل		
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
-0.09	4.34	7.61	2.55	8.27	10.82
0.96	4.68	8.61	1.00	6.51	9.71
-0.53	3.04	7.64	1.45	7.81	10.27
0.43	4.48	8.92	0.49	5.63	8.21
-0.28	4.18	8.43	0.70	6.06	8.16
0.75	4.83	8.03	0.27	5.93	7.97
-1.13	3.28	7.31	1.01	7.06	9.62
-0.44	3.72	7.36	1.46	7.69	10.12
-0.64	2.38	6.46	2.67	8.40	10.10
0.97	5.24	9.71	0.14	5.45	7.96



شکل ۱. نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و نمودار اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم

جدول ۳. تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر

متغیر ۱	متغیر ۲	متغیر ۳
0	8	0

قرار داده شده است. در واقع میانگین متغیر دوم را  $1/5$  برابر انحراف معیار کاهش و میانگین متغیر سوم را به اندازه  $1/5$  برابر انحراف معیار افزایش داده‌ایم. داده‌های تولید شده در جدول (۴) ملاحظه می‌شوند. برای بررسی اینکه کدام یک از پنج متغیر  $X_1, X_2, \dots, X_5$  وضعیت خروج از کنترل را بوجود آورده‌اند، در شکل (۲) نمودار ۲۰ نمونه تولید شده، نمودار کنترل maxZ و نمودار اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم آورده شده است.

حد بالای کنترل برای  $ARL_0 = 100$  ( $\alpha = 0.01$ ) از جدول (۱) مقدار  $c_\alpha = 3.089$  می‌باشد. در نمودار کنترل maxZ در شکل (۲) برای ۱۰ نمونه اول که تحت کنترل هستند هیچ هشدار خروج از کنترلی مشاهده نمی‌شود اما برای ۱۰ نمونه دوم در همه موارد هشدار خروج از کنترل وجود دارد. در جدول (۵) فراوانی متغیرهایی که به‌عنوان عامل خروج از کنترل شناسایی شده‌اند، ملاحظه می‌شود.

در این جدول برای ۸ مورد از ۱۰ مورد، متغیر سوم به‌عنوان عامل خروج از کنترل شناسایی شده است. با توجه به اینکه در جدول (۵) متغیر سوم بیشترین فراوانی را دارد، این متغیر را به‌عنوان عامل هشدار خروج از کنترل تلقی می‌کنیم.

نتایج تکرارهای زیاد از مطالعه شبیه‌سازی فوق حاکی از آن است که با خطای ناچیزی، روش پیشنهادی به‌درستی به تعبیر هشدار می‌انجامد.

**مثال ۲:** فرض کنید  $X_t = (X_{t1}, X_{t2}, X_{t3}, X_{t4}, X_{t5})^T$  بردار تصادفی  $t$ -ام یک فرایند پنج‌متغیره است. فرض کنید  $X_t$  در شرایط کنترل دارای بردار میانگین و ماتریس کوواریانس زیر باشد

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \\ 0.7 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 0.75 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 & 0.75 & 1 \end{bmatrix}$$

تعداد ۲۰ نمونه تولید و برای ۱۰ نمونه اول میانگین فرایند یعنی  $\underline{\mu}$  بدون تغییر قرار داده و برای ۱۰ نمونه آخر میانگین فرایند

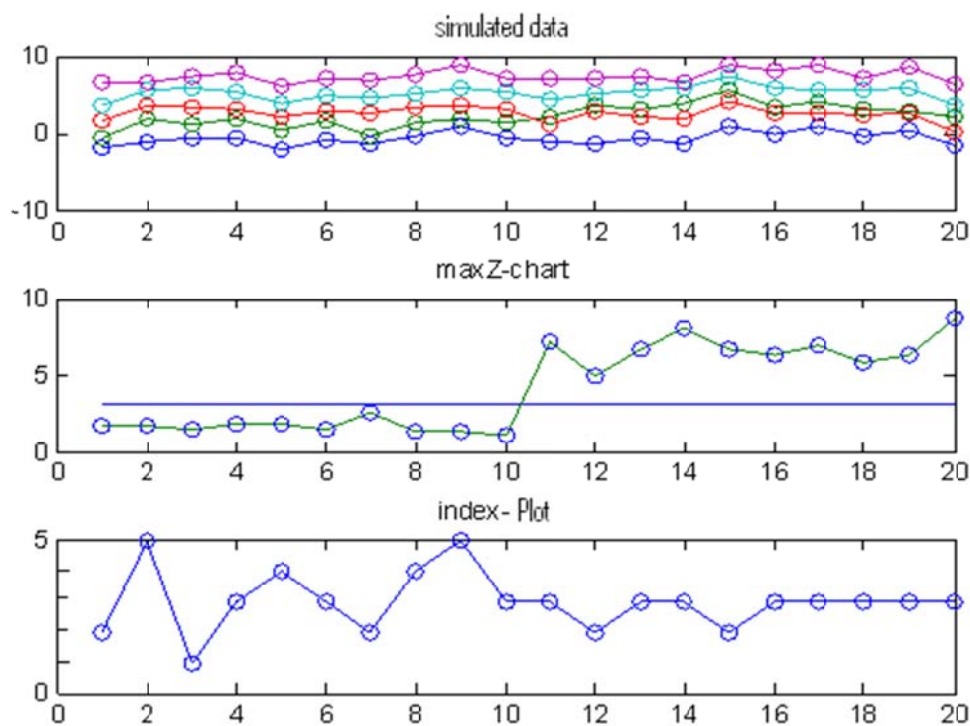
$$\underline{\mu}_{out} = \underline{\mu} + (0 \quad -1.5 \quad 1.5 \quad 0 \quad 0)^T$$

(۲) به دست آمده است.

توجه کنید که جدول (۵) براساس نمودار index-Plot در شکل

جدول ۴. داده‌های پنج‌متغیره تولید شده

۱۰ نمونه تحت کنترل					۱۰ نمونه خارج کنترل				
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
-1.86	-0.57	1.51	3.60	6.50	-1.18	2.14	1.15	4.47	7.20
-1.13	1.20	3.65	5.74	6.62	-1.36	3.62	2.76	5.11	7.16
-0.71	1.20	3.27	5.84	7.37	-0.53	3.21	2.03	5.54	7.32
-0.51	1.92	3.18	5.40	7.77	-1.43	3.83	1.85	5.89	6.52
-2.00	0.41	2.12	3.77	6.18	0.77	5.54	4.10	7.32	8.93
-0.83	1.69	2.87	4.82	7.23	-0.16	3.35	2.57	5.93	8.17
-1.40	-0.31	2.51	4.62	6.87	0.76	4.03	2.56	5.57	8.98
-0.40	1.27	3.36	5.05	7.66	-0.45	3.20	2.27	5.71	7.07
0.85	1.79	3.66	5.80	8.96	0.30	2.95	2.51	5.91	8.70
-0.73	1.36	3.04	5.34	7.11	-1.56	2.14	0.18	3.73	6.43



شکل ۲. نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و نمودار اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم

جدول ۵. تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر

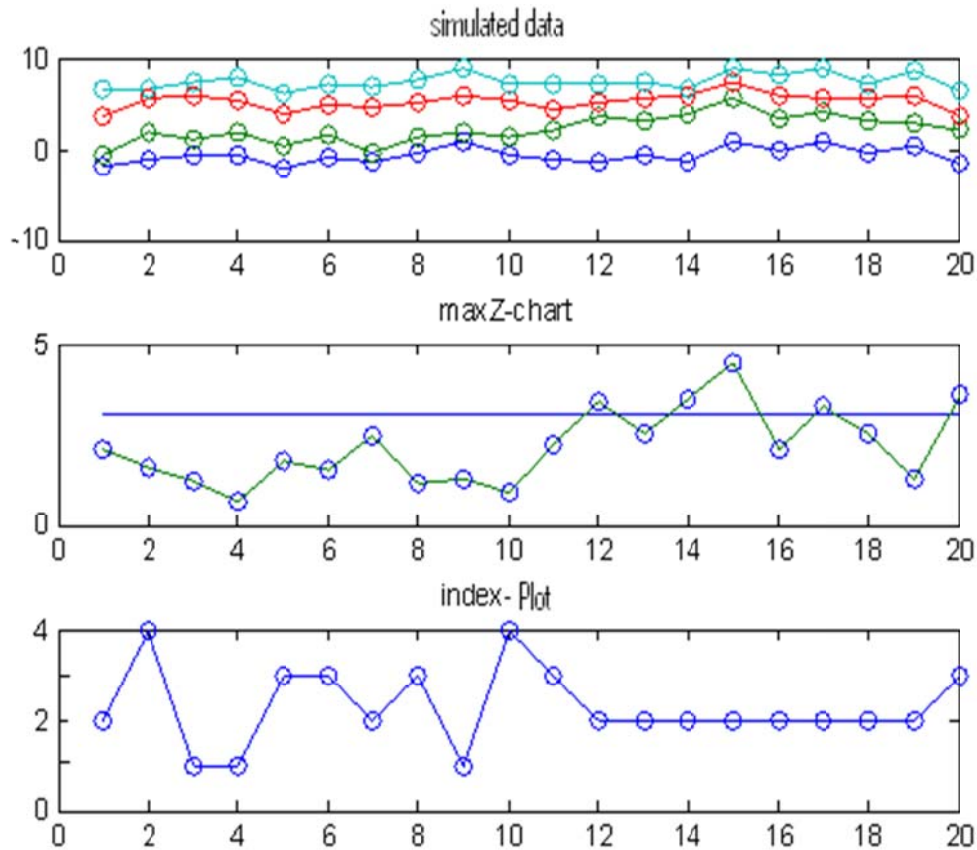
متغیر ۱	متغیر ۲	متغیر ۳	متغیر ۴	متغیر ۵
0	2	8	0	0

شبه‌سازی شده متغیر سوم را از داده‌های اولیه حذف می‌کنیم و با استفاده از ۲۰ داده تولید شده چهارمتغیره در نمودار کنترل

متغیر سوم به‌عنوان اولین عامل برای هشدار خروج از کنترل شناسایی شد. برای شناسایی دومین متغیر خارج از کنترل مقادیر

وجود دارد. در نمودار index-Plot در شکل (۳) ملاحظه می‌شود که در ۴ مورد عامل هشدار متغیر دوم و در ۱ مورد متغیر چهارم بوده است. این فراوانی‌ها در جدول (۶) ارائه شده‌اند. توجه کنید که در محور عمودی نمودار index-Plot در شکل (۳) اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ بترتیب متناظر با متغیرهای  $X_1$ ،  $X_2$ ،  $X_4$  و  $X_5$  هستند. در واقع متغیر سوم در مرحله قبلی حذف شده است.

maxZمسأله تعبیر هشدار را ادامه می‌دهیم. در شکل (۳) نمودار ۲۰ نمونه تولید شده، نمودار کنترل maxZ و نمودار اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم آورده شده است. حد بالای کنترل برای  $\alpha = 0.01$  و  $p = 4$  از جدول (۱)، مقدار  $c_\alpha = 3.0222$  می‌باشد. در نمودار کنترل maxZ در شکل (۳) در ۵ مورد از ۱۰ مورد (یعنی موارد ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۷ و ۲۰) هشدار خروج از کنترل



شکل ۳. نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و نمودار اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم

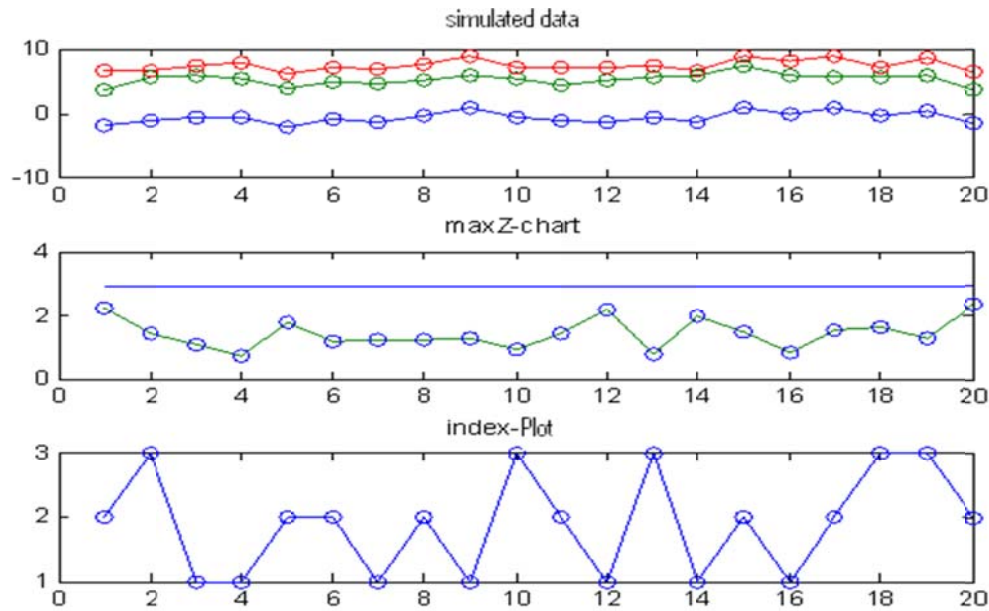
جدول ۶. تعداد دفعات خروج از کنترل برای هر متغیر

متغیر ۱	متغیر ۲	متغیر ۴	متغیر ۵
0	4	1	0

مقدار  $c_\alpha = 2.9342$  می‌باشد. در این نمودار دیگر هشدار خروج از کنترل وجود ندارد و همه نقاط بین حدود کنترل قرار می‌گیرند و لذا جستجو هم متوقف می‌شود. به این ترتیب متغیرهای خارج از کنترل متغیر دوم و سوم هستند.

اکنون متغیر دوم را هم از محاسبات حذف کرده و نمودار کنترل maxZ را با استفاده از ۲۰ داده اولیه سه‌متغیره رسم می‌کنیم. در شکل (۴) نمودار ۲۰ نمونه تولید شده، نمودار کنترل maxZ و نمودار اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم آورده شده است. حد بالای کنترل برای  $ARL_0 = 100$  و  $p = 3$  از جدول (۱)،





شکل ۴: نمودار داده‌های تولید شده، نمودار کنترل maxZ و نمودار اندیس متغیر متناظر با ماکسیمم

و از طرف دیگر تأثیر تغییر اندازه نمونه، تغییر میزان آلودگی و تغییر سطح معنی‌داری آشکار می‌گردد. در همه جداولی که در بخش حاضر ارائه شده اعداد متناظر با نمودار Andrew از مقاله ماراوالاکیس و برسیموس (۲۰۰۹) برداشت شده ولی اعداد متناظر با نمودار maxZ حاصل مطالعات شبیه‌سازی خودمان است. در جدول (۷) با فرض  $\mu_{out} = (0 \ 1.5 \ 0)^T$  و  $\alpha = 0.05$  خلاصه نتایج ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی برای اندازه‌های نمونه ۱، ۳، ۶، ۹ و ۱۲ ارائه شده است. به عبارت دیگر در اینجا میانگین متغیر دوم به اندازه  $\delta = 1.5$  برابر انحراف معیار آلوده شده و سطح معنی‌داری  $\alpha = 0.05$  در نظر گرفته شده است. در جدول (۷) در واقع تأثیر تغییر اندازه نمونه بررسی شده است. به‌عنوان مثال در این جدول سطرهای متناظر با  $n = 1$  را در نظر بگیرید. عدد ۸۰/۱۵ نشان می‌دهد که نمودار maxZ در ۸۰/۱۵ درصد از ۱۰۰۰۰ مورد هشدار خروج از کنترل داده است. این نمودار در ۰/۵۹ درصد موارد متغیر اول، در ۶۶/۰۸ درصد موارد متغیر دوم و در ۱۳/۴۸ درصد موارد متغیر سوم را به‌عنوان متغیر آلوده معرفی کرده است. عدد ۵۸/۸ نشان می‌دهد که نمودار Andrew در ۵۸/۸ درصد از ۱۰۰۰۰ مورد هشدار خروج از کنترل داده است. این نمودار در ۱۰/۲۸ درصد موارد متغیر اول، در ۴۴/۹۴ درصد موارد متغیر دوم و در ۳/۵۸ درصد موارد متغیر سوم را به‌عنوان متغیر آلوده شناسایی کرده است. در این جدول واضح است که با افزایش اندازه نمونه عملکرد هر دو نمودار در تشخیص متغیر دوم به‌عنوان متغیر آلوده به‌سرعت بهبود می‌یابد.

تجارب تکرارهای زیاد این مطالعه شبیه‌سازی حاکی از آن است که باخطای ناچیزی، نمودار کنترل maxZ به درستی تعبیر هشدار را بررسی می‌کند.

#### ۷. مطالعات شبیه‌سازی مقایسه‌ای

یکی از جدیدترین روش‌های تعبیر هشدار در نمودارهای کنترل چندمتغیره روشی مبتنی بر استفاده از نمودار آندرو می‌باشد که توسط ماراوالاکیس و برسیموس (۲۰۰۹) معرفی شده است. ما این نمودار را نمودار Andrew می‌نامیم. یک روش مشهور دیگر، روش مبتنی بر تجزیه آماره  $T^2$  هتلینگ است که توسط میسون و همکاران (۱۹۹۵) معرفی گردیده است. ماراوالاکیس و برسیموس (۲۰۰۹) از طریق چند مطالعه شبیه‌سازی روش پیشنهادی خویش را با روش تجزیه  $T^2$  مقایسه کرده و نشان داده‌اند که نمودار Andrew دارای عملکرد بهتری می‌باشد. ماراوالاکیس و برسیموس (۲۰۰۹) در یک مثال فرض کرده‌اند که بردار میانگین و ماتریس کوواریانس در شرایط کنترل عبارتند از

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -0.7 & -0.8 \\ -0.7 & 1 & 0.9 \\ -0.8 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

در این بخش با به‌کار بردن همین آرایه‌ها و با استفاده از شبیه‌سازی، چند مطالعه مقایسه‌ای ارائه می‌شود. در این مطالعات از یک طرف نمودار Andrew با نمودار maxZ مقایسه می‌شود

جدول ۷. مقایسه دو نمودار و تأثیر اندازه نمونه ( $\alpha = 0.05$  و  $\delta = 1.5$ )

n	Chart	متغیر ۱	متغیر ۲	متغیر ۳	درصد هشدار
1	maxZ	0.59	66.08	13.48	80.15
	Andrew	10.28	44.94	3.58	58.8
3	maxZ	0	93.36	6.60	99.96
	Andrew	3.91	89.62	3.90	97.43
6	maxZ	0	98.07	1.93	100
	Andrew	0.75	97.51	2.07	100
9	maxZ	0	99.58	0.42	100
	Andrew	0.40	98.48	1.12	100
12	maxZ	0	99.90	0.10	100
	Andrew	0.13	99.29	0.58	100

و در ۴/۱۳ درصد موارد متغیر سوم را به‌عنوان متغیر آلوده شناسایی کرده است. در جدول (۸) ملاحظه می‌شود که با افزایش میزان آلودگی عملکرد هر دو نمودار بهتر می‌شود و همچنین عملکرد هر دو نمودار برای آلودگی‌های کوچک (نظیر  $\delta = 0.5$ ) ضعیف می‌باشد. لازم به توضیح است که محور اصلی مقاله حاضر و نیز مقاله ماراوالاکیس و برسیموس (۲۰۰۹) تعبیر هشدار می‌باشد و شناسایی تغییرات کوچک محوریت ندارد. در اغلب نمودارها و از جمله در نمودار maxZ امکان استفاده از ایده میانگین موزون متحرک نمایی (EWMA) برای افزایش حساسیت نمودار نسبت به تغییرات کوچک وجود دارد ولی تعبیر هشدار مرحله بعد از تشخیص وجود هشدار می‌باشد.

در جدول (۸) با فرض  $\alpha = 0.05$  و  $n = 3$  و  $\mu_{out} = (0 \quad \delta \quad 0)^T$  برای مقادیر مختلف  $\delta$  خلاصه نتایج ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی ارائه شده است. در این جدول در واقع تأثیر افزایش میزان آلودگی در متغیر دوم بررسی شده است. به‌عنوان مثال سطر متناظر با  $\delta = 0.5$  را در نظر بگیرید. عدد ۳۲/۲۲ نشان می‌دهد که نمودار maxZ در ۳۲/۲۲ درصد از ۱۰۰۰۰ مورد، هشدار خروج از کنترل داده است. این نمودار در ۱/۴۱ درصد موارد متغیر اول، در ۲۳/۵۶ درصد موارد متغیر دوم و در ۷/۲۵ درصد موارد متغیر سوم را به‌عنوان متغیر آلوده تعیین کرده است. عدد ۴۳/۹۶ نشان می‌دهد که نمودار Andrew در ۴۳/۹۶ درصد از ۱۰۰۰۰ مورد، هشدار خروج از کنترل داده است. این نمودار در ۱۴/۱۹ درصد موارد متغیر اول، در ۲۵/۶۴ درصد موارد متغیر دوم

جدول ۸. مقایسه دو نمودار و تأثیر تغییر میزان آلودگی ( $\alpha = 0.05$  و  $n = 3$ )

$\delta$	Chart	متغیر ۱	متغیر ۲	متغیر ۳	درصد هشدار
0.5	maxZ	1.41	23.56	7.25	32.22
	Andrew	14.19	25.64	4.13	43.96
1	maxZ	0.51	76.57	13.48	90.56
	Andrew	8.84	56.38	3.91	69.13
1.5	maxZ	0.02	93.06	6.84	99.92
	Andrew	3.91	89.62	3.90	97.43
2	maxZ	0	97.45	2.55	100
	Andrew	0.91	97.06	2.07	100
2.5	maxZ	0	99.22	0.78	100
	Andrew	0.16	98.89	0.95	100
3	maxZ	0	99.87	0.1	100
	Andrew	0.03	99.66	0.31	100

این است که آن نمونه از توزیع  $N_3(\underline{\mu}, \Sigma)$  تولید شده است. افزایش احتمال خطای نوع اول باعث کاهش احتمال خطای نوع دوم (به اشتباه قبول کردن فرض صفر) می‌باشد. نمودارهای maxZ و Andrew هر دو از نوع شوهارت هستند و لذا می‌توان نوشت  $ARL_0 = 1/\alpha$ . بنابراین مطالعه شبیه‌سازی این بخش را می‌توان به‌عنوان بررسی اثر کاهش  $ARL_0$  تفسیر نمود.

در جدول (۹) با فرض  $n = 3$  و  $\mu_{out} = (0 \quad 1.5 \quad 0)^T$  برای مقادیر مختلف  $\alpha$  خلاصه نتایج ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی ارائه شده است. احتمال خطای نوع اول ( $\alpha$ ) در واقع احتمال به اشتباه رد کردن فرض صفر است. برای هر نمونه جدید فرض صفر این است که نمونه تحت کنترل قرار دارد. به عبارت دیگر فرض صفر

در جدول (۹) به عنوان مثال در سطر متناظر با  $\alpha = 0.05$ ، عدد ۹۹/۹ به این معناست که در نمودار maxZ در ۹۹/۹ درصد موارد هشدار خروج از کنترل وجود دارد و ۹۳/۱۴ درصد موارد متغیر دوم که متغیر آلوده است را به درستی شناسایی کرده است. عدد

در جدول (۹) به این معنی است که در نمودار Andrew در ۹۷/۴۵ درصد موارد هشدار خروج از کنترل وجود داشته و در ۸۹/۶۹ درصد موارد متغیر دوم به درستی شناسایی شده است.

جدول ۹. مقایسه دو نمودار و تأثیر تغییر سطح معنی داری ( $n = 3$  و  $\delta = 1.5$ )

$\alpha$	Chart	متغیر ۱	متغیر ۲	متغیر ۳	درصد هشدار
0.025	maxZ	0	92.83	6.99	99.82
	Andrew	3.84	87.02	3.22	94.08
0.05	maxZ	0.02	93.14	6.74	99.90
	Andrew	3.71	89.69	4.05	97.45
0.085	maxZ	0.02	93.22	6.73	99.97
	Andrew	3.88	91.33	3.66	98.87
0.1	maxZ	0.04	93.31	6.63	99.98
	Andrew	3.51	91.58	4.87	99.96

شبیه سازی قابل حصول است. ایده مهم دیگر در مقاله حاضر این است که نیازی به رسم  $p$  نمودار کنترل مجزا نیست. بلکه فقط کافی است یک نمودار کنترل بر اساس ماکسیمم قدرمطلق متغیرهای توأم استاندارد شده رسم شود.

در بحث تعبیر هشدار، روش تجزیه  $T^2$  یکی از مشهورترین روش هاست. روش نمودار Andrew نیز یکی از جدیدترین روش ها می باشد. ماراوالاکیس و برسیموس (۲۰۰۹) با مطالعه شبیه سازی به این نتیجه رسیدند که روش نمودار Andrew در مقایسه با روش تجزیه  $T^2$  دارای عملکرد بهتری است. براساس مطالعات شبیه سازی بخش ۷، به نظر می رسد که نمودار maxZ در مقایسه با نمودار Andrew، هم در بحث سرعت تشخیص وضعیت غیرعادی و هم در بحث تعبیر هشدار از عملکرد بهتری برخوردار است و بدون شک از لحاظ سادگی نسبت به دو نمودار دیگر برتری دارد.

### ۹. تقدیر و تشکر

بدین وسیله از ااوران محترم به دلیل نظرات هوشمندانه و مفیدی که باعث ارتقاء کیفی مقاله شد تقدیر و تشکر می نمایم.

### مراجع

- [1] Alt, F.B., "Multivariate quality control, Encyclopedia of Statistical Sciences". Kotz, S., Johson, N.L., Read CR (eds), John Wiley, New York, 1985
- [2] Hayter, A.J., Tsui, K.L., "Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems", Journal of Quality Technology, Vol. 26, 1994, PP. 197-208.

در ستون آخر جداول (۷)، (۸) و (۹) ملاحظه می شود که به استثناء سطر متناظر با  $\delta = 0.5$  در جدول (۸)، در همه موارد درصد هشدار درست در نمودار maxZ بزرگ تر یا مساوی درصد متناظر در نمودار Andrew می باشد. در این جدول در ستون مربوط به متغیر دوم که متغیر آلوده است، به استثناء سطر متناظر با  $\delta = 0.5$  در جدول (۸)، در همه موارد، درصد مواردی که نمودار maxZ متغیر دوم را به درستی به عنوان متغیر آلوده شناسایی کرده بیش از درصدی است که نمودار Andrew تشخیص داده است.

با توجه به مطالعه شبیه سازی فوق و با توجه به اینکه نمودار maxZ از لحاظ نظری، محاسباتی و اجرایی بسیار ساده تر از نمودار Andrew است، به نظر می رسد که در بحث تعبیر هشدار نمودار maxZ را باید بهتر از نمودار Andrew و در نتیجه بهتر از تجزیه آماره  $T^2$  هتلینگ تلقی نماییم.

توضیحات مفصل راجع به زیربناهای نظری نمودارهای Andrew، تجزیه  $T^2$  و چند نمودار دیگر، همراه با برنامه های MATLAB برای جنبه های محاسباتی در پایان نامه سلیمانی (۱۳۹۰) موجود می باشد.

### ۸. نتیجه گیری

در این مقاله نشان دادیم که اگر هدف شناسایی متغیرهای عامل خروج از کنترل باشد، در استاندارد سازی متغیرها بهتر است از ایده استانداردسازی توأم و نه از ایده استانداردسازی یکی در هر بار، استفاده کنیم. در استانداردسازی متغیرهای توأم نرمال، استقلال حاصل می شود و باعث می شود که حد بالای کنترل بدون نیاز به شبیه سازی به دست آید. این در حالی است که در استانداردسازی یکی در هر بار، حد بالای کنترل فقط از طریق

- [۱۲] علیرضایی، مژگان، «روشهای spc برای کنترل فرایندهای آماری خودهمبسته»، پایان نامه کارشناسی ارشد آمار، گروه آمار دانشگاه اصفهان، ۱۳۸۸.
- [3] Sepulveda, A., Nachlas, J.A., "A Simulation Approach to Multivariate Quality Control", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 33, 1997, PP. 113-116.
- [4] Jackson, J.E., "A User Guide to Principal Components", John Wiley, 1991.
- [5] Chua, M.K., Montgomery, D.C., "Investigation and Characterization of the Control Scheme for Multivariate Quality Control", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 8, 1992, PP. 37-44.
- [6] Mason, R.L., Tracy, N.D., Young, J.C., "Decomposition of  $T^2$  for Multivariate Control Chart Interpretation", *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, 1995, PP. 99-108.
- [7] Tracy, N.D., Young, J.C., Mason, R.L., "A Bivariate Control Chart for Paired Measurements", *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, 1995, PP. 370-376.
- [8] Maravelakis, P., Bersimis, S., Panaretos, J., Psarakis, S., "Identifying the out-of-Control Variable in a Multivariate Control Chart", *Communications in Statistics, Theory and Methods*, Vol. 3, 2002, PP. 2391-2408.
- [9] Maravelakis, P., Bersimis, S., "The Use of Andrews Curves for Detecting the Out-of-Control Variables When a Multivariate Control Chart Signals", *Statistical Papers*, Vol. 50, 2009, PP. 51- 65.
- [10] Kalgonda, A.A., Kulkarni, S.R., "Multivariate Quality Control Chart for Autocorrelated Processes", *Journal of Applied Statistics*, Vol. 31, No. 3, 2004, PP. 31-327
- [۱۱] سلیمانی، فاطمه، «مروری بر تعبیر هشدار در نمودارهای کنترل چندمتغیره»، پایان نامه کارشناسی ارشد آمار، گروه آمار، دانشگاه اصفهان، ۱۳۹۰.