



The Effect of Estimation Error on the Performance of non-Parametric Control Chart Based on Sign Statistic

M. Nojavan^{*}, N. Ghafari & M. Karbasian

Majid Nojavan, Assistant Professor, Industrial Engineering Faculty, Islamic Azad University, South Tehran Branch, mnojavan@azad.ac.ir

Nafiseh Ghaffari, Ms., Engineering Faculty, Islamic Azad University, Najaf-Abad Branch, Ngh_575@yahoo.com

Mahdi Karbasian, Assistant Professor, Industrial Engineering Faculty, Maleke-Ashtar University, mkarbasi@mut-es.ac.ir

Keywords

Non-Parametric Control Chart,
Sign Control Chart,
Estimation Error,
Sample Size

ABSTRACT

In this paper, the effect of estimation error on the performance of Sign non-parametric control chart is considered. A simulation program has been prepared that calculate ARLs and cumulative distribution functions in sign chart for Normal, Uniform, Laplace and Cauchy processes. The simulations results show effects of estimation error in heavy-tailed distributions is greater than light-tailed distributions. Also, the effect of sample size on the estimation error is considered. The results specify the heavy-tailed distributions need to more samples than light-tailed distributions. In this paper, the effect of estimation error on the performance of Sign non-parametric control chart is considered. A simulation program has been prepared that calculate ARLs and cumulative distribution functions in sign chart for Normal, Uniform, Laplace and Cauchy processes. The simulations results show effects of estimation error in heavy-tailed distributions is greater than light-tailed distributions. Also, the effect of sample size on the estimation error is considered. The results specify the heavy-tailed distributions need to more samples than light-tailed distributions.

^{*} **Corresponding author.** Majid Nojavan
Email: mnojavan@azad.ac.ir

بررسی اثر خطای تخمین بر عملکرد نمودار کنترل ناپارامتری علامت

مجید نوجوان*، نفیسه غفاری و مهدی کرباسیان

چکیده:

کلمات کلیدی

برای کنترل پارامترهای فرایند در حالتی که توزیع داده‌ها نامعلوم یا غیر نرمال هستند از نمودارهای ناپارامتری استفاده می‌شود. نمودار علامت یکی از نمودارهای ناپارامتری است که برای کنترل مرکزیت فرایند بکار رفته و برای این کار از مقایسه مشاهدات نمونه با مقدار هدف (میانگین یا میانگین) استفاده می‌شود. در این مقاله تاثیر خطای تخمین پارامتر بر عملکرد نمودار علامت یکطرفه مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور یک برنامه شبیه‌سازی تهیه شده و با استفاده از آن تابع توزیع تجمعی و میانگین طول دنباله مربوط به نمودار علامت با پارامتر برآورد شده نسبت به زمانی که پارامتر معلوم است برای چهار توزیع مختلف بررسی شده است. همچنین تعداد نمونه‌های مورد نیاز برای رسیدن به سطح مطلوبی از احتمال هشدار اشتباه برای توزیع‌های مختلف مشخص شده است. نتایج نشان می‌دهد خطای تخمین با توجه به این که باعث کاهش یا افزایش پارامتر مکان نسبت به مقدار واقعی شود می‌تواند بر روی عملکرد نمودار علامت اثر مثبت یا منفی داشته باشد و برای کاهش اثرات آن باید یک اندازه نمونه مناسب تهیه نمود.

نمودارهای ناپارامتری،
نمودار علامت،
خطای تخمین،
اندازه نمونه.

۱. مقدمه

نمودارهای ناپارامتری برای کنترل فرایندهایی که دارای توزیع نرمال نیستند استفاده می‌شوند. پارت [۱] و رینولدز [۲] نمودارهای کنترلی را بر اساس رتبه‌های ترتیبی علامت مشاهدات ایجاد کرده‌اند. مک‌گیلکریست و وودیر [۳] روش توزیع آزاد جمع تجمعی (CUSUM) را برای بکارگیری در نظارت بر میزان بارش، پیشنهاد کردند. باکیر [۴] و باکیر و رینولدز [۵] نمودار کنترل ناپارامتری جمع تجمعی (CUSUM) را با استفاده از آماره رتبه علامت ویلکاکسون شکل دادند. پارک [۶] استفاده از نمودار کنترل ناپارامتری با توزیع نامتقارن را پیشنهاد و نمودار شوهارتی

علامت و نمودار رتبه علامت‌دار را در مطالعات خود بررسی نمود. پارک و رینولدز [۷] نمودارهای ناپارامتری شوهارت و جمع تجمعی را بر اساس آماره جایابی خطی ایجاد کردند. امین و سیرسی [۸] رفتار نمودار میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) را با استفاده از آماره رتبه علامت دار ویلکاکسون مورد مطالعه قرار دادند. هکل و لدالتز [۹]، [۱۰] نیز نمودار کنترل ناپارامتری مبتنی بر رتبه‌ها و یک نمودار ناپارامتری جدید پیشنهاد کردند. امین و همکاران [۱۱] و آرنولد [۱۲] نمودار کنترل ناپارامتری شوهارت و CUSUM را برای داده‌های گروه‌بندی شده مبتنی بر آماره آزمون علامت تهیه کردند. چاکرابورتی و همکاران [۱۳] نیز نمودار ناپارامتری علامت مبتنی بر آماره من-ویتنی را معرفی کردند.

در بسیاری از موارد پارامتر فرایند مجهول بوده و باید آن را در فاز طراحی نمودار و با استفاده از نمونه‌های گرفته شده از فرایند تحت کنترل تخمین زد. در این حالت ممکن است مقدار واقعی پارامتر و تخمین آن با هم اختلاف داشته باشند. وودال و موننگومری [۱۴] اثر خطای تخمین در نمودارهای کنترلی را بدین صورت توصیف کرده‌اند: "تاثیر تخمین بر عملکرد نمودار

تاریخ وصول: ۹۱/۹/۱۰

تاریخ تصویب: ۹۲/۱۲/۱

*نویسنده مسئول مقاله: دکتر مجید نوجوان، استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، mnojavan@azad.ac.ir
نفیسه غفاری، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نجف آباد، Ngh_575@yahoo.com
دکتر مهدی کرباسیان، استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه مالک اشتر، mkarbasi@mut-es.ac.ir

بر اساس توزیع X^2 تحقیقاتی انجام داده‌اند. اندازه نمونه پیشنهادی توسط آن‌ها بسیار بزرگتر از اندازه نمونه پیشنهادی توسط لوری و مونتگومری [۳۲] بوده و این اندازه نمونه با کاهش تعداد مشخصه‌های کیفی که پایش می‌شوند کاهش می‌یابد.

ژنگ و چن [۳۳] وابستگی ARL خارج از کنترل نمودار EWMA در شیفت‌های مختلف را بررسی و نشان داده‌اند در شرایطی که واریانس تخمین زده می‌شود ARL ناریب بوده و هنگامی که میانگین تخمین زده می‌شود ARL اریب می‌باشد. آلبرت و کالبرگ [۳۴] ضمن بررسی شرایط استفاده از نمودارهای ناپارامتری، اثر تخمین پارامتر را بر عملکرد نمودار ناپارامتری تجربی بررسی کرده و برای بهبود عملکرد این نمودار در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل پیشنهاداتی داده‌اند.

در این مقاله اثر خطای تخمین بر نمودار ناپارامتری علامت بررسی و عملکرد این نمودار با در نظر گرفتن خطای تخمین بررسی شده است. ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم نمودار علامت و نحوه استفاده از آن و همچنین روش ارزیابی عملکرد این نمودار تشریح شده است. در بخش سوم اثر خطای تخمین در عملکرد نمودار علامت بررسی شده است. در بخش چهارم اثر تعداد نمونه در عملکرد نمودار بررسی و تعداد نمونه مورد نیاز جهت کاهش اثر خطای تخمین مشخص شده است. در نهایت نتیجه‌گیری در بخش آخر بیان شده است.

۲. نمودار کنترلی علامت

نمودار علامت مطرح شده در این مقاله برای نظارت بر میانگین (یا میانه) فرآیند استفاده شده و در آن تمام مشاهدات یک نمونه با مقدار هدف مقایسه می‌شوند. اگر مشاهده بیش از مقدار هدف باشد، یک علامت (+) و در غیر این صورت یک علامت (-) برای مشاهده در نظر گرفته می‌شود. سپس تعداد مشاهدات بالا و پایین هدف (تعداد علامتهای + و -) برای هر نمونه مشخص می‌شود. فرضیات مورد نیاز برای استفاده از نمودار علامت، استقلال مشاهدات و پیوسته بودن توزیع احتمال بوده و برای استفاده از آن نیازی به متقارن بودن توزیع نیست. یکی از آماره‌های مورد استفاده در نمودار علامت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{Sign}(X_{ij} - \mu_0) \quad (1)$$

که در آن، μ_0 مقدار هدف پارامتر مکان (میانه، میانگین یا صدکی از توزیع فرآیند) است که مورد پایش و نظارت قرار می‌گیرد، X_{ij} مشاهده j ام ($j=1,2,\dots,n$) در نمونه i ام و SN_i مجموع علامت

کنترلی در برخی مقالات مورد بررسی قرار گرفته است اما تنها برای تعداد کمی از نمودارها این تاثیر بررسی شده است. برخی از محققان از جمله گوش و همکاران [۱۵]، نگ و کیس [۱۶]، کیوزنبری [۱۷]، دل کاستیلو [۱۸]، [۱۹] و بروگس و همکاران [۲۰]، [۲۱] تاثیر تخمین پارامتر را بر ARL نمودار کنترل شوهرت بررسی کرده‌اند. باگشو و جانسون [۲۲] تاثیر تخمین واریانس را بر میانگین طول دنباله (ARL) نمودار جمع تجمعی (CUSUM) مورد بررسی قرار داده‌اند. ینگ [۲۳] تاثیر تخمین میانگین را بر عملکرد نمودار CUSUM مطالعه کرده است. لو و رینولد [۲۴] اثر تخمین پارامتر در نمودار EWMA را در حالی که فرآیند خود همبسته است بررسی کرده‌اند. محققان زیادی از جمله گوش و همکاران [۱۵]، کیوزنبری [۱۷] و چن [۲۵] نشان داده‌اند که با استفاده از نمونه مرجع بزرگ معمولاً تخمین میانگین و واریانس به اندازه کافی خوب خواهد بود اما این روش عملکرد نمودارها را در هر دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل تحت تاثیر قرار می‌دهد.

آنها مقادیر میانگین و انحراف معیار توزیع طول دنباله در شرایطی که مقدار میانگین و خطای استاندارد برآورد شده اند را با استفاده از شبیه‌سازی و محاسبات عددی بررسی کرده و برای افزایش دقت پیشنهاد کردند که برای تخمین پارامتر حداقل ۳۰۰ مشاهده مورد نیاز است. لو و رینولدز [۲۴]، [۲۶] از نمودارهای کنترلی برای نظارت بر میانگین و واریانس فرآیندهای خود همبسته استفاده کرده و نشان دادند هنگامی که فرآیند با استفاده از یک مدل سری زمانی مدلسازی می‌شود برای تخمین پارامترها به مجموعه‌ی بزرگتری از داده‌های اولیه نیاز است. آلبرت و کالبرگ [۲۷] اثر تخمین پارامترها بر نمودارهای شوهرت را بررسی و با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده‌اند هنگامی که از برآورد پارامترها جهت تعیین دقیق حدود نمودارهای کنترلی استفاده می‌شود به حجم خیلی بزرگی از نمونه‌ها نیاز است. آنها نمودارهای کنترلی را اصلاح و نشان دادند که در این نمودارها اندازه مشاهدات مورد نیاز به شدت کاهش می‌یابد.

جونز و همکاران [۲۸] توزیع طول دنباله نمودار EWMA را در حالتیکه پارامترها تخمین زده شده اند بررسی و در مورد تاثیر این تخمین بر عملکرد نمودار تحقیقاتی انجام داده‌اند. جونز [۲۹] طراحی نمودار کنترل EWMA در فاز II را در حالی که پارامترها نامعلوم اند بررسی کرده و روشی را پیشنهاد کرده‌اند که از هشدارهای زود هنگام و کاهش قدرت نمودار برای تشخیص تغییر در فرآیند جلوگیری شده است. چمپ و همکاران [۳۰] نشان داده‌اند که توزیع طول دنباله در حالت تحت کنترل به پارامترهای نامعلوم فرآیند وابسته نیست. ندومان و پیگناتیلو [۳۱] در مورد تخمین پارامترها در نمودار کنترل T^2 چند متغیره با حدود کنترل

تایی آن را برآورد نمود. در این حالت ممکن است مقدار واقعی پارامتر و مقدار تخمینی متفاوت باشند و چون از مقدار تخمینی برای ارزیابی فرایند استفاده می‌شود عملکرد نمودار علامت تغییر خواهد کرد. برای بررسی اثر خطای تخمین بر عملکرد نمودار علامت، توزیع تجمعی طول دنباله این نمودار با پارامترهای تخمین زده شده و در دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل بررسی شده است. برای این کار خطای تخمین در چهار توزیع متقارن مختلف شامل: توزیع یکنواخت (به عنوان توزیع دنباله نازک)، توزیع نرمال (به عنوان توزیع متداول) و توزیعی لاپلاس و کوشی (به عنوان توزیعی دنباله پهن) در نظر گرفته شده است. روابط ۳ تا ۵ به ترتیب تابع چگالی یکنواخت با مرکز θ (میانگین=میانه) و پارامتر مقیاس λ ، تابع چگالی لاپلاس با مرکز θ (میانگین=میانه) و پارامتر λ و تابع چگالی کوشی با مرکز θ (میانگین و میانه ندارد) و پارامتر λ را نشان می‌دهند.

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}, \text{ برای } \theta - \lambda < x < \theta + \lambda, \lambda > 0 \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x-\theta|/\lambda}, \text{ برای } -\infty < x < \infty, \lambda > 0 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi[\lambda^2 + (x-\theta)^2]}, \text{ برای } -\infty < x < \infty, \lambda > 0 \quad (5)$$

برای دستیابی به یک انحراف معیار برابر با مقدار ۱ در همه توزیعیها و رسیدن به احتمال ۰/۰۵ بالاتر از ۱/۶۴۵ + θ ، (مشابه توزیع نرمال با میانگین θ و انحراف استاندارد ۱)، در توزیع یکنواخت مقدار پارامتر $\lambda = \sqrt{3}$ ، در توزیع لاپلاس $\lambda = 1/\sqrt{2}$ و در توزیع کوشی $\lambda = 0/۲۶۰۵$ در نظر گرفته شده است. در کلیه جداول و نمودارهای ارائه شده در این مقاله، در نمودار یکطرفه حد کنترل بالا به صورت $UCL=10$ در نظر گرفته شده است و بنابراین برای حالت تحت کنترل و بدون خطای تخمین میانگین طول دنباله $ARL_0^+ = 10۲۴$ و نرخ هشدار نادرست $p_0^+ = 0/۰۰۰۹۷$ می‌باشد.

در نمودار دو طرفه نیز این مقادیر با استفاده از روابط $ARL_0 = ARL_0^+/2$ و $p_0 = 2p_0^+$ قابل محاسبه می‌باشند. برای انجام محاسبات در نمودار یک برنامه شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB تهیه شده است که عملکرد نمودار را در شرایط مختلف شبیه‌سازی می‌کند. هر مقدار محاسبه شده در برنامه شبیه‌سازی حداقل با ۱۰۰۰۰ تکرار بدست آمده است. برای بررسی صحت عملکرد برنامه شبیه‌سازی، مقادیر ARL و احتمالات بدست آمده در حالت بدون خطای تخمین با مقادیر مشخص شده در مراجع و جداول استاندارد مقایسه شده است که این مقایسه

های مثبت و منفی در نمونه i ام را نشان می‌دهند. در رابطه فوق تابع علامت ($Sign$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Sign(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

اگر فرایند تحت کنترل باشد و میانه تغییر نکند، مقدار $P = 1/2$ بوده و مقدار مورد انتظار SN_i نیز برابر صفر می‌باشد. از آنجا که توزیع مشاهدات پیوسته فرض می‌شود، داریم $P\{X_{ij} - \mu_0 = 0\} = 0$ و به صورت نظری $Sign(X_{ij} - \mu_0) = 0$ هرگز رخ نمی‌دهد. البته در عمل ممکن است مشاهدات گرد شده و صفرهایی مشاهده شوند اما در هر حال تا زمانی که تعداد صفرها بیش از حد نباشند محاسبه SN_i مطابق تعریف بالا و استفاده از حدود محاسبه شده بی‌اشکال است.

استفاده از آماره SN_i این مزیت را به همراه دارد که حدود کنترلی نمودار نسبت به مقدار صفر متقارن است. برای کنترل فرایند در نمودار علامت و برای رسیدن به یک احتمال هشدار معین P در این نمودار، باید حد (حدود) نمودار با استفاده از جداول احتمالی تعریف شده برای آماره SN_i مشخص شوند. برای این کار احتمال هشدار با استفاده از رابطه $P = p(|SN_i| \geq UCL | \mu = \mu_0)$ مشخص می‌شود که در آن UCL حد کنترلی بالای نمودار می‌باشد.

پس از تعیین حد (حدود) نمودار اگر آماره آزمون در یک نمونه از این مقادیر تجاوز کند ($|SN_i| \geq UCL$) فرایند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود. در نمودار علامت دو طرفه، یک حد کنترل بالا $UCL > 0$ و یک حد کنترل پایین $LCL < 0$ برای رسیدن به یک احتمال هشدار نادرست (P) یا میانگین طول دنباله (ARL) معین در حالت تحت کنترل انتخاب می‌شوند که در آن $LCL = -UCL$ می‌باشد. در نمودار علامت یک طرفه، فقط یکی از حدود کنترل در نظر گرفته می‌شوند. میانگین طول دنباله (ARL) نمودار علامت دو طرفه با استفاده از رابطه $L(\mu) = 1/P(|SN_i| \geq UCL)$ محاسبه می‌شود. مقادیر ARL نمودار علامت برای حالت یک طرفه در جهت مثبت به صورت $L^+(\mu) = 1/P(SN_i \geq UCL)$ بدست می‌آید. مقدار ARL نمودار علامت در حالت تحت کنترل برای تمام توزیع‌ها با میانه یکسان برابر می‌باشد. بزرگترین مقدار ممکن برای ARL تحت حال کنترل نمودار علامت در طرح‌های متقارن یک طرفه و دو طرفه در صورتیکه $P = 1/2$ باشد، به ترتیب برابر با 2^n و 2^{n-1} می‌باشد.

۳. بررسی خطای تخمین در نمودار علامت

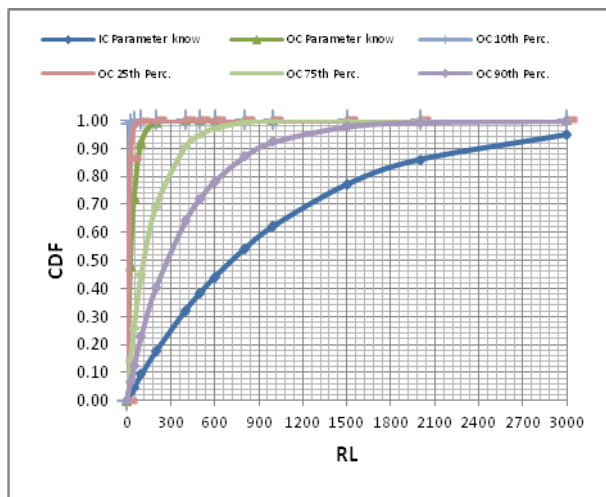
برای استفاده از نمودار علامت باید مقدار پارامتر مکان (میانه) در حالت تحت کنترل مشخص باشد و در صورتیکه این مقدار مجهول باشد باید در فاز I و با استفاده از اطلاعات حاصل از m نمونه n

توزیعهای نرمال، یکنواخت، لاپلاس و کوشی می باشد بررسی شده است. برای این کار توزیع تجمعی طول دنباله در حالت تخمینی با توزیع طول دنباله با پارامترهای معلوم مقایسه شده است. شکلهای ۱ تا ۴ نمودارهای تابع توزیع تجمعی طول دنباله را در توزیعهای مختلف و در دو وضعیت تحت کنترل (IC) و خارج از کنترل (OC) نشان می دهد. در حالت تخمینی پارامتر مکان (μ_0) بیشتر و کمتر از مقدار واقعی خود فرض شده و چهار صدک از پارامتر مکان شامل دو صدک پایینی و دو صدک بالایی به عنوان برآوردهای پارامتر در نظر گرفته شده است.

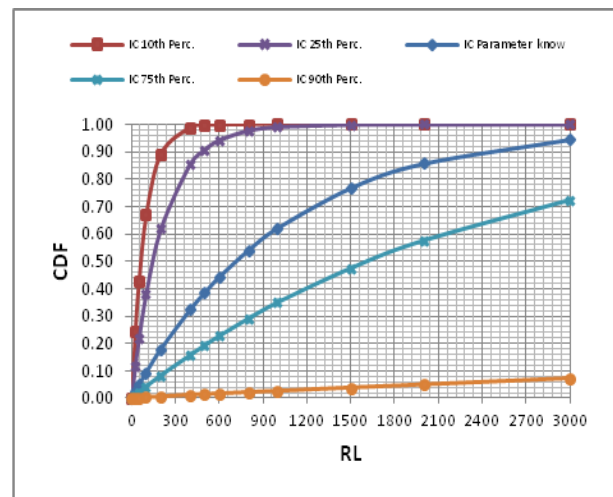
نشاندهنده اختلاف ناچیز بین مقادیر بدست آمده در برنامه شبیه سازی و مقادیر ارایه شده در مراجع است و از اینرو می توان از برنامه شبیه سازی برای بررسی عملکرد نمودار علامت استفاده نمود.

۳-۱. اثر خطای تخمین بر عملکرد نمودار علامت

برای بررسی اثر خطای تخمین بر عملکرد نمودار علامت، توزیع طول دنباله این نمودار در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل در شرایطی که پارامترها با استفاده از نمونه مرجعی با $m=20$ و زیر گروه های $n=10$ تخمین زده شده و خروجی فرآیند دارای

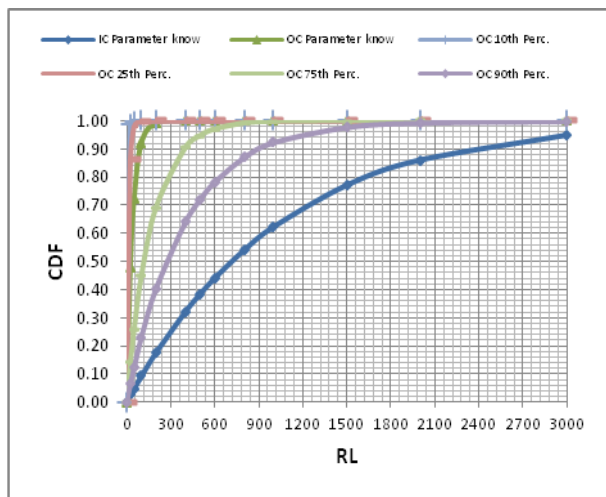


(b)

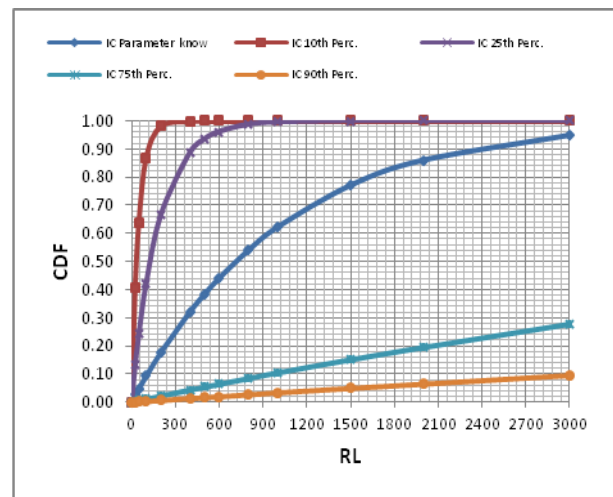


(a)

شکل ۱. نمودار توزیع تجمعی طول دنباله نمودار علامت در توزیع یکنواخت در حالت (a) تحت کنترل و (b) خارج از کنترل ($\delta = 0/5$)

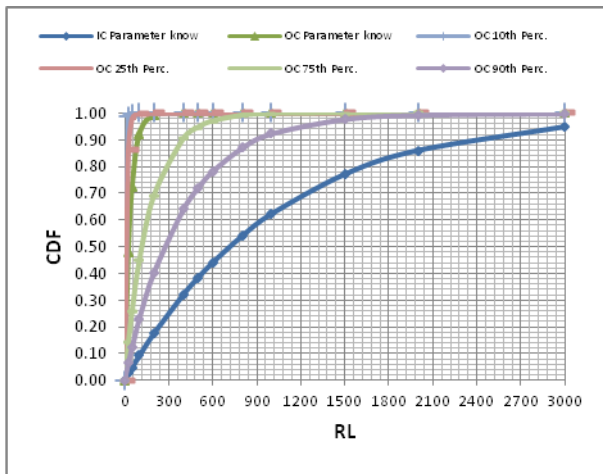


(b)

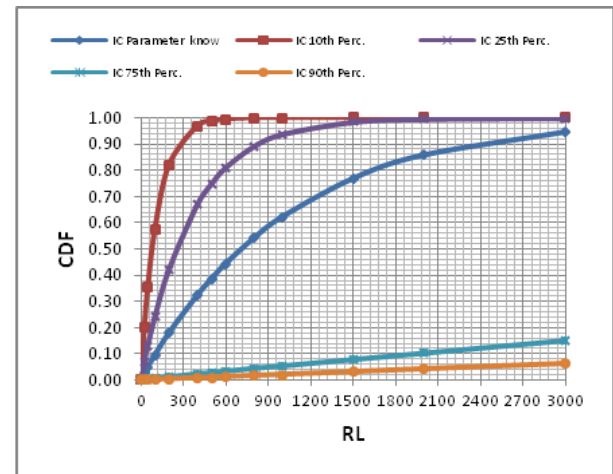


(a)

شکل ۲. نمودار توزیع تجمعی طول دنباله نمودار علامت در توزیع نرمال در حالت (a) تحت کنترل و (b) خارج از کنترل ($\delta = 0/5$)



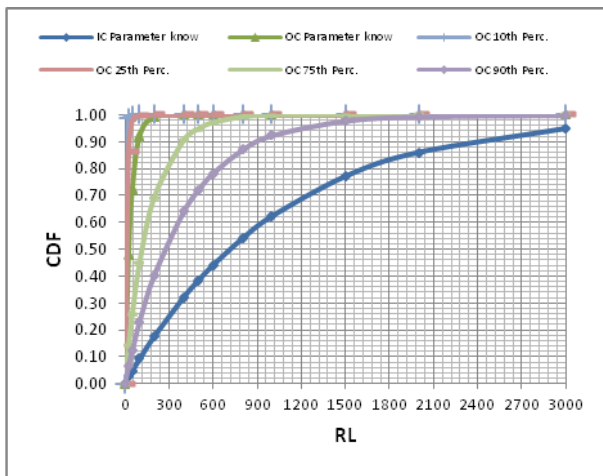
(b)



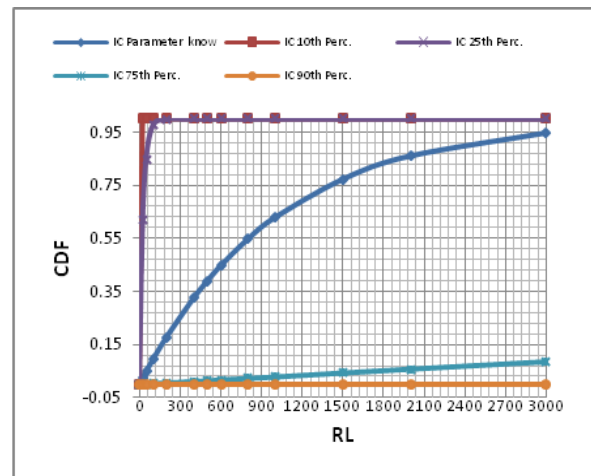
(a)

شکل ۳. نمودار توزیع تجمعی طول دنباله نمودار علامت در توزیع لاپلاس در حالت (a) تحت کنترل و (b) خارج از کنترل

$$(\delta = 0/5)$$



(b)



(a)

شکل ۴. نمودار توزیع تجمعی طول دنباله نمودار علامت در توزیع کوشی در حالت (a) تحت کنترل و (b) خارج از کنترل

$$(\delta = 0/5)$$

نسبت به زمانی که پارامتر معلوم باشد هشدار می‌دهد و این اثر هرچه تخمین در صدک‌های دورتر از مقدار واقعی آن رخ دهد بیشتر خواهد بود.

همچنین اگر $\mu_0 = 10$ امین و 25 امین صدک توزیع نمونه‌ای مربوط به خود (یعنی مقادیر کمتر از مقدار واقعی) را به جای مقدار معلوم گرفته باشد، تعداد هشدارهای اشتباه افزایش یافته و نمودار سریعتر و با احتمال بیشتری نسبت به زمانی که پارامتر معلوم باشد هشدار می‌دهد. علت آن است که در حالتیکه تخمین μ_0 کمتر از مقدار واقعی باشد، در شرایط خارج از کنترل مقدار شیفت افزایش یافته و شیفت بوجود آمده در فرآیند در جهت مخالف با تخمین نادرست پارامتر مکان عمل کرده و نمودار

در حالت خارج از کنترل شیفتی به اندازه $\delta = 0/5$ برای فرآیند در نظر گرفته شده است. با بررسی شکلها مشخص می‌شود که رفتار کلی نمودار علامت در هر یک از توزیع‌های فرایند یکسان بوده و تنها در مقادیر محاسبه شده‌ی طول دنباله در حالات متناظر تفاوت وجود دارد که دلیل آن را می‌توان به وجود تفاوت در مقادیر تخمین زده شده برای پارامتر مکان μ_0 در توزیع‌های مختلف نسبت داد.

همچنین مشاهده می‌شود که در هر دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل زمانی که $\mu_0 = 90$ امین و 75 امین صدک توزیع نمونه‌ای مربوط به خود (یعنی مقادیر بیشتر از مقدار واقعی) را به جای مقدار معلوم گرفته است، نمودار کندتر و با احتمال کمتری

تغییرات فرایند را سریعتر کشف می‌کند. در جدول ۱ عملکرد نمودار علامت در دو حالت پارامتر معلوم و پارامتر مجهول که با استفاده از $m=20$ نمونه $n=10$ تایی تخمین زده شده‌اند آمده است. نتایج براساس تخمین پارامتر مکان در توزیعهای یکنواخت، نرمال، لاپلاس و کوشی در حالت تحت کنترل بررسی شده‌اند. در تخمین پارامتر مکان، برآورد محاسبه شده برای توزیع یکنواخت و لاپلاس کمتر از مقدار واقعی و برای توزیع نرمال و کوشی بیشتر از مقدار واقعی بدست آمده‌اند.

سریعتر هشدار می‌دهد. بالعکس هنگامی که تخمین μ بیشتر از مقدار واقعی باشد در شرایط خارج از کنترل شیفت بوجود آمده در فرآیند هم جهت با تخمین نادرست پارامتر مکان بوده و مقدار شیفت کاهش یافته و نمودار دیرتر هشدار می‌دهد. به طور کلی تا زمانی که شیفت رخ داده در فرآیند مثبت و پارامتر مکان تخمینی بیشتر از مقدار واقعی پارامتر باشد و یا شیفت رخ داده در فرآیند منفی و پارامتر مکان تخمینی کمتر از مقدار واقعی پارامتر باشد، نمودار تغییرات بوجود آمده را کندتر و در غیر این صورت نمودار

جدول ۱. عملکرد نمودار علامت در حالت تخمین پارامتر با استفاده از $m=20$ نمونه $n=10$ تایی

مشخصه	یکنواخت		نرمال		لاپلاس		کوشی	
	معلوم	تخمین (کمتر از مقدار واقعی)	معلوم	تخمین (بیشتر از مقدار واقعی)	معلوم	تخمین (کمتر از مقدار واقعی)	معلوم	تخمین (بیشتر از مقدار واقعی)
$\delta = 0$								
ARL	1024.0	722.9	1024.0	1212.9	1024.0	728.2	1024.0	5237.4
SDRL	1023.6	720.2	1021.7	1212.9	1023.6	726.4	1011.2	4767.2
Q(0.10)	107.8	75.0	109.2	126.6	107.8	75.5	107.3	555.7
Median	713.0	501.5	715.4	843.1	713.0	504.8	717.7	3614.0
Q(0.90)	2376.5	1667.7	2352.7	2787.6	2376.5	1679.8	2353.8	12048.0
$\delta = 0.25$								
ARL	265.8	196.1	168.9	193.7	75.5	62.7	19.4	36.3
SDRL	264.4	197.3	167.5	192.0	75.3	62.1	19	35.6
Q(0.10)	27.6	20.2	16.7	20.3	7.4	5.9	1.4	3.3
Median	186.5	134.1	115.5	131.9	51.9	43.0	12.5	24.3
Q(0.90)	614.8	455.5	385.5	441.4	173.5	142.9	43.1	82.0
$\delta = 0.5$								
ARL	81.1	61.8	40.0	44.6	17.0	15.1	5.3	6.5
SDRL	81.0	61.7	39.4	43.8	16.4	14.5	4.7	6.0
Q(0.10)	8.1	6.1	3.6	4.1	1.1	1.0	0.0	0.0
Median	55.9	41.8	26.9	30.1	10.8	9.7	3.0	3.7
Q(0.90)	185.0	141.6	90.4	99.7	37.5	33.2	10.4	13.0
$\delta = 1$								
ARL	10.7	8.6	5.6	6.0	3.7	3.5	2.3	2.5
SDRL	10.2	8.1	5.1	5.5	3.1	2.9	1.8	1.9
Q(0.10)	0.8	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Median	6.6	5.1	3.0	3.2	1.9	1.7	1.0	1.0
Q(0.90)	23.3	18.3	11.3	12.2	6.9	6.1	3.8	4.0
$\delta = 1.5$								
ARL	2.0	1.6	2.0	2.1	1.9	1.8	1.8	1.8
SDRL	1.4	1.1	1.4	1.5	1.2	1.2	1.2	1.2
Q(0.10)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Median	0.6	0.0	0.5	0.8	0.0	0.0	0.0	0.0
Q(0.90)	3	2.0	3.0	3.0	2.4	2.1	2.0	2.0
$\delta = 2$								
ARL	0.0	0.0	1.3	1.3	1.3	1.3	1.5	1.5
SDRL	0.0	0.0	0.6	0.6	0.7	0.7	0.9	0.9
Q(0.10)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Median	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Q(0.90)	0.0	0.0	1	1.0	1.0	1.0	2.0	2.0

جدول ۲. مقادیر ARL و احتمال هشدار اشتباه در دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل ($\delta = 0.5$) به ازای خطاهای تخمین متفاوت

خطای تخمین		-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1
یکنواخت	ARL	10.74	81.06	265.90	1024.03	4883.02	31391.93	7167619.05
	PRS	0.093089918	0.012336782	0.003760791	0.000976268	0.000204848	0.000031915	0.000000176
نرمال	ARL	5.63	40.01	168.96	1023.90	9200.80	128954.24	Inf
	PRS	0.177725297	0.024990728	0.005918554	0.000979448	0.000108711	0.000007805	0.000000010
لاپلاس	ARL	3.65	16.96	75.50	1023.54	35088.25	1314046.70	Inf
	PRS	0.273606942	0.058963350	0.013244759	0.000977055	0.000028535	0.000000829	0.000000001
کوشی	ARL	2.33	5.26	19.38	1025.04	879337.77	Inf	Inf
	PRS	0.429140753	0.190285955	0.051591930	0.000975043	0.000001198	0.000000010	0.00
یکنواخت	ARL	2.00	10.74	28.04	81.08	265.89	1024.65	31391.93
	PRS	0.499882057	0.093089918	0.035668404	0.012333089	0.003761064	0.000975980	0.000031915
نرمال	ARL	2.00	5.63	13.06	40.02	168.93	1023.77	129956.92
	PRS	0.500846477	0.177712416	0.076544223	0.024984585	0.005919658	0.000976840	0.000007727
لاپلاس	ARL	1.86	3.66	6.69	16.96	75.54	1024.65	1268502.75
	PRS	0.538964990	0.273594273	0.149436058	0.058960646	0.013238471	0.000975980	0.000000819
کوشی	ARL	1.76	2.33	3.08	5.25	19.39	1024.93	Inf
	PRS	0.569555279	0.429144617	0.324617076	0.190320788	0.051585558	0.000975725	0.000000007

نمودار علامت برای چهار توزیع یکنواخت، نرمال، لاپلاس و کوشی با پارامترهای تخمین زده شده از m نمونه $n=10$ تایی ترسیم شده است. همان طور که دیده می‌شود با افزایش تعداد نمونه، توزیع طول دنباله نمودار با پارامترهای تخمینی به نمودار با پارامترهای معلوم نزدیک می‌شود. علت بالا یا پایین قرار گرفتن نمودارها در حالت تخمینی نسبت به حالت معلوم، مثبت یا منفی بودن خطای تخمین می‌باشد.

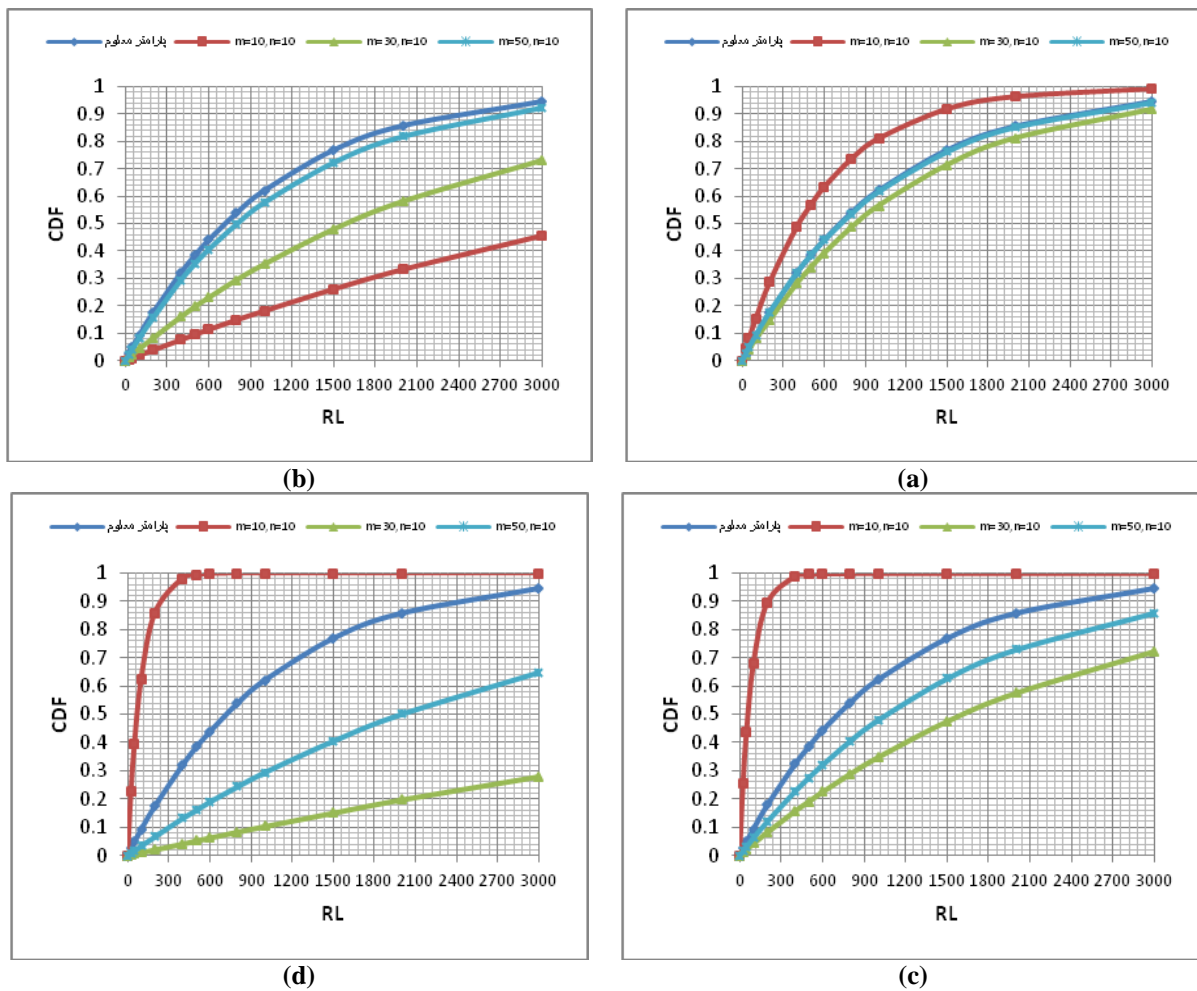
اگر خطای تخمین مثبت باشد نمودار مربوط به پارامتر تخمینی پایین‌تر از نمودار مربوط به پارامتر معلوم و برای خطای تخمین منفی این نمودار بالاتر از نمودار مربوط به پارامتر معلوم قرار می‌گیرد. در هر حالت با افزایش تعداد نمونه، نمودار با پارامتر تخمینی به نمودار با پارامتر معلوم نزدیک می‌شود. در جدول ۳ درصد تغییر در نرخ هشدارهای اشتباه یکطرفه در نمودار کنترل علامت با پارامتر تخمینی و نمودار با پارامترهای معلوم نشان داده شده است. کیوزنبری [۷] پیشنهاد کرده است که اندازه نمونه به گونه‌ای مشخص شود که نرخ هشدارهای اشتباه بیشتر از ۱۰٪ نباشد.

با استفاده از این شاخص و با توجه به جدول ۳ مشخص می‌شود که برای رسیدن به عملکرد مطلوب و خطای مناسب در نمودار علامت در توزیع‌های یکنواخت، نرمال، لاپلاس و کوشی به ترتیب به ۱۰۰، ۳۰۰، ۵۰۰ و ۱۰۰۰ نمونه $n=10$ نیاز است.

جدول ۲ اثر مقادیر مختلف خطای تخمین پارامتر بر نمودار علامت را در چهار توزیع یکنواخت، نرمال، لاپلاس و کوشی نشان می‌دهد. در این جدول میانگین طول دنباله و احتمال هشدار اشتباه به ازای مقادیر مختلف تخمین پارامتر (بیشتر یا کمتر از مقدار واقعی) مشخص شده است. همان طور که در جدول دیده می‌شود به ازای تخمین بیشتر از مقدار واقعی، احتمال هشدار اشتباه کاهش و به ازای تخمین کمتر از مقدار واقعی، احتمال هشدار اشتباه افزایش می‌یابد. همچنین با در نظر گرفتن خطای تخمین، عملکرد نمودار علامت در حالت خارج از کنترل برای توزیع‌های دنباله پهن مطلوب‌تر از توزیع نرمال و توزیع دنباله نازک یکنواخت بوده و علاوه بر این حساسیت عملکرد نمودار نسبت به خطای تخمین در توزیع کوشی بیشتر از سایر توزیع‌ها می‌باشد.

۳-۲. تعیین تعداد نمونه مورد نیاز در نمودار علامت

هنگام طراحی یک نمودار کنترل باید اندازه نمونه مرجع برای تخمین پارامترها تعیین شود. یک مقدار مورد قبول برای اندازه نمونه مرجع تقریباً برابر با ۳۰ نمونه معمولاً ۵ تایی از فرآیند تحت کنترل آماری است. کیوزنبری [۱۷] توسط شبیه‌سازی نشان داد که در نمودار \bar{x} با حدود سه انحراف معیار، این میزان نمونه کافی نبوده و برای تخمین پارامترها حداقل به ۱۰۰ نمونه ۵ تایی نیاز است. در شکل (۶) نمودار تابع توزیع تجمعی طول دنباله در



شکل ۶. اثر تغییر تعداد نمونه بر نمودار توزیع تجمعی طول دنباله در توزیعهای (a) یکنواخت (b) نرمال (c) لاپلاس (d) کوشی

جدول ۳. درصد افزایش احتمال هشدار اشتباه با توجه به تخمین پارامتر با استفاده از m نمونه به اندازه n=10

چگالی	m									
	10	20	30	50	100	200	300	400	500	1000
یکنواخت	36.4	27.4	23.1	12.3	9.3	9.0	6.6	4.1	3.0	2.6
نرمال	47.9	40.8	29.3	27.1	17.2	11.1	8.9	6.6	6.6	4.6
لاپلاس	68.6	53.1	48.5	35.5	31.7	18.7	17.6	11.7	9.3	8.2
کوشی	60.4	41.4	37.9	31.1	20.0	17.8	13.5	13.6	10.3	6.2

۴. نتیجه گیری

در این مقاله اثر خطای تخمین پارامتر مکان بر پایش نمودار علامت یکطرفه بررسی شده است. نتایج حاصل نشان می دهند که در صورتیکه پارامتر مکان همراه با خطا (بیشتر و یا کمتر از مقدار واقعی) برآورد شود، عملکرد نمودار علامت تغییر خواهد نمود که میزان این تغییر به مقدار و جهت شیفت و خطای تخمین وابسته است. در حالت کلی اگر خطای برآورد مثبت و مقدار برآورد شده پارامتر بیشتر از مقدار واقعی باشد احتمال هشدار اشتباه کاهش

یافته و میانگین طول دنباله افزایش می یابد. همچنین در حالتیکه خطای برآورد منفی و برآورد پارامتر کمتر از مقدار واقعی باشد، میانگین طول دنباله کاهش می یابد. در برخی از موارد ممکن است شیفت حالت خارج از کنترل و خطای برآورد اثر یکدیگر را خنثی کنند و عملکرد نمودار مشابه حالتی باشد که خطا و شیفتی در پارامترهای فرآیند وجود ندارد. برای افزایش دقت تخمین پارامتر، تعداد نمونه های مورد نیاز برای تخمین پارامتر مکان در توزیهای مختلف محاسبه و نشان داده شده است که

تعداد مشاهدات مورد نیاز در توزیعهای دنباله پهن به مراتب بیشتر از توزیعهای دنباله نازک است.

مراجع

- [13] Chakraborti, S., Van de Wiel, MA., "A Nonparametric Control Chart Based on the Mann-Whitney Statistic", SPOR report, No: 24, Department of Mathematics and Computer Science, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Netherlands, 2004.
- [14] Woodall, W.H., Montgomery, D.C., "Research Issues and Ideas in Statistical Process Control", Journal of Quality Technology, Vol. 31, 1999, pp. 376-386.
- [15] Ghosh, B.K., Reynolds, M.R. Jr., Hui, Y.V., "Shewhart X^- Charts with Estimated Process Variance." Communication in Statistics-Theory and Methods, Vol. 10, 1981, pp. 1797-1822.
- [16] Ng, C.H., Case, K.E., "Control Limits and the ARL: Some Surprises," First Industrial Engineering Research Conference Proceedings, Norcross, GA: Institute of Industrial Engineers, 1992, pp. 127-129.
- [17] Quesenberry, C.P., "The Effect of Sample Size on Estimated Limits for and X Control Charts", Journal of Quality Technology, Vol. 25, No. 4, 1993, PP. 237-247.
- [18] Del Castillo, E., "Run Length Distributions and Economic Design of X -bar Charts with Unknown Process Variance", *Metrika*, Vol. 43, 1996a, pp. 189-201.
- [19] Del Castillo, E., "Evaluation of Run Length Distribution for X Charts With Unknown Variance," Journal of Quality Technology, Vol. 28, 1996b, PP. 116-122.
- [20] Burroughs, T.E., Rigdon, S.E., Champ, C.W., "An Analysis of Shewhart Charts With Runs Rules When No Standards Are Given", Proceedings of the Quality and Productivity Section, American Statistical Association, 1993, pp. 16-19.
- [21] Burroughs, T.E., Rigdon, S.E., Champ, C.W., "Analysis of the Shewhart S-Chart With Runs Rules When No Standards Are Given", Proceedings of the Twenty-Sixth Annual Meeting of the Midwest Decision Sciences Institute, Atlanta, 1995, pp. 268-270.
- [22] Bagshaw, M., Johnson, R.A., "The In-Hence of Reference Values and Estimated Variance on the ARL of CUSUM Tests", Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, Vol. 37, 1975, pp. 413-420.
- [23] Yang, M.C.K., "Properties of the CUSUM Chart When There Is No Standard Value", Journal of Chinese Statistical Association, Vol. 28, 1990, PP. 57-77.
- [1] Parent, E.A., Jr. "Sequential Ranking Procedures," Technical Report No. 80, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California, 1965.
- [2] Reynolds, M.R., JR. "A Sequential Nonparametric Test for Symmetry with Application to Process Control", Technical Report No. 148, Department of Operations Research and Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California. 1972.
- [3] McGilchrist C.A., Woodyer, K.D., "Note on a Distribution-free CUSUM Technique" *Technometrics* Vol. 17, 1975, pp. 321-325.
- [4] Bakir, S.T., "Nonparametric Procedures for Process Control", Ph.D. Dissertation, Dept. of Statistics, Va. Tech., Blacksburg. 1977.
- [5] Bakir, S.T., Reynolds, M.R., Jr. "A Nonparametric Procedure for Process Control Based on Within Group Ranking", *Technometrics*, Vol. 21, 1979. pp. 175-183.
- [6] Park, C., "Some Control Procedures Useful for One-sided Asymmetrical Distributions", Journal of the Korean Statistical Society, Vol. 14, No. 2, 1985. pp. 76-86.
- [7] Park, C., Reynolds, M.R., JR. "Nonparametric Procedures for Monitoring a Location Parameter Based on Linear Placement Statistics", *Sequential Analysis*, Vol. 6, 1987, pp. 303-323.
- [8] Amin, R.W., Searcy A.J., "A Nonparametric Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme", Communication in Statistics: Theory and Methods, Vol. 20, 1991, pp. 124-139.
- [9] Hackl, P., Ledolter, J., "A Control Chart Based on Ranks", Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 2, 1991, pp. 117-126.
- [10] Hackl, P. & Ledolter, J. "A New Nonparametric Quality Control Technique", *Communication Statistic Simulation*, Vol. 21, No. 2, 1992, pp. 423-443.
- [11] Amin, R., Reynolds, M. R. Jr. & Bakir, S. T. "Nonparametric Quality Control Charts Based on the Sign Statistic", *Communication Statistic Theory Methods*, Vol. 24, No. 6, 1995, pp. 1597-1623.
- [12] Arnold, B., "The Sign Test in Current Control", *Statistische Hefte*, Vol. 26, 1985, pp. 253-262.

- [24] Lu, C.W., Reynolds, M.R., "EWMA Control Charts for Monitoring the Mean of Autocorrelated Processes", Journal of Quality Technology, Vol. 31, 1999a, pp. 166–188.
- [25] Chen, G., "The Mean and Standard Deviation of the Run Length Distribution of X Charts When Control Limits are Estimated Statistic", Sinica, Vol. 7, 1997, pp. 789–798.
- [26] Lu, CW., Reynolds MR., Jr. "Control Charts for Monitoring the Mean and Variance of Autocorrelated processes", Journal of Quality Technology, Vol. 31, 1999b, pp. 259–274.
- [27] Albers, W., Kallenberg, W.C.M., "Estimation in Shewhart Control Charts: Effects and Corrections", Technical Report 1559, University of Twente, 2004.
- [28] Jones, L.A., Champ, C.W., Rigdon, S.E., "The Performance of Exponentially Weighted Moving Average Charts With Estimated Parameters", Technometrics, Vol. 43, 2001, pp. 156–167.
- [29] Jones, L.A., "The Statistical Design of EWMA Control Charts with Estimated Parameters", Journal of Quality Technology, Vol. 34, 2002, pp. 277-288.
- [30] Champ, C.W., Jones-Farmer, L.A., Rigdon, S.E., "Properties of the T^2 Control Chart when Parameters are Estimated", Technometrics, Vol. 47, 2005, pp. 437-445.
- [31] Nedumaran, G., Pignatiello, J.J., Jr. "On Constructing T^2 Control Charts for On-Line Process Monitoring", IIE Transactions, Vol. 31, 1999, pp. 529–536.
- [32] Lowry, C.A., Montgomery, D.C., "A Review of Multivariate Control Charts", IIE Transactions, Vol. 27, 1995, pp. 800–810.
- [33] Zhang, L., Chen, G., "A Note on EWMA Charts for Monitoring Mean Changes in Normal Process", Communication in Statistics-Theory and Methods, Vol. 31, 2002, pp. 649-661.
- [34] Albers, W., Kallenberg, W.C.M., "Empirical Non-Parametric Control Charts Estimation Effects and Corrections". Journal of Applied Statistics, Vol. 31, No. 3, 2004, pp. 345–360.